УДК 517.927.4

Н. И. Ронто, д-р физ.-мат. наук,
Т. В. Путятина, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ К МНОГОТОЧЕЧНЫМ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Обосновывается метод алгебраической коллокации для приближенного построения решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в случае линейных многоточечных краевых условий, содержащих определенные интегралы.

Обгрунтовується метод алгебраїчної колокації для наближеної побудови розв'язків систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь у випадку лінійних багатоточкових крайових умов, що містять означені інтеграли.

Сходимость метода алгебраической и тригонометрической коллокации для нелинейных краевых задач в случае двухточечных и многоточечных краевых условий изучалась в [1, 2]. В данной работе этот метод распространяется на более общий тип задач, когда краевые условия содержат функционалы с интегральными слагаемыми.

Пусть требуется найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ t \in [a, b],\ x \in E_n, \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\sum_{i=0}^{q} A_i x(\tau_i) + \int_a^T B(s) x(s) ds = d,\ T \in (a, b], \tag{2}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n, f(t, x) = (f_1(t, x), \ldots, f_n(t, n))$ — вектор-функция со значениями в E_n, определенная и непрерывная по t, x для $t \in [a, b], x \in D \subset E_n$, D — замкнутая ограниченная область пространства E_n; $B(s)$ — $(n \times n)$-мерная матрица с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами; A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, q$, — заданные постоянные $(n \times n)$-мерные матрицы такие, что

$$\det\Big(R = \sum_{i=0}^{q} A_i + B_0\Big) \neq 0,\ B_0 = \int_a^T B(s) ds,\ T \in (a, b];$$

$d = (d_1, \ldots, d_n)$ — заданный постоянный вектор.

Решение поставленной задачи ищем приближенно в виде векторного полинома степени $m + 1$

$$x_m(t) = Q_0 + \sum_{k=1}^{m+1} Q_k t^k,$$

удовлетворяющего краевому условию (2):

$$\sum_{i=0}^{q} A_i x_m(t_i) + \int_a^T B(s) x_m(s) ds = d \tag{3}$$

при произвольных значениях векторных коэффициентов $Q_k = (Q_{k1}, \ldots, Q_{kn})$, $k = 1, 2, \ldots, m + 1$. Из условия (3) определяется коэффициент

© Н. И. РОНТО, Т.В. ПУТЯТИНА 1992

$$Q_0 = R^{-1}d + R^{-1}\sum_{k=1}^{m+1} H_kQ_k - R^{-1}\sum_{k=1}^{m+1} B_kQ_k,$$

где

$$H_k = -\sum_{i=0}^{q} A_i\tau_i^k, \; B_k = \int_a^T B(s)s^k ds, T \in (a, b], k = 0, 1,\ldots, m + 1.$$

Для существования Q_0 необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\det(R = \sum_{i=0}^{q} A_i + B_0) \neq 0.$$

Итак, для приближенного решения $x_m(t)$ получаем следующее представление:

$$x_m(t) = R^{-1}d + R^{-1}\sum_{k=1}^{m+1} H_kQ_k - R^{-1}\sum_{k=1}^{m+1} B_kQ_k + \sum_{k=1}^{m+1} Q_kt^k,$$

$$B_k = \int_a^T B(s)s^k ds, T \in (a, b], k = 0, 1,\ldots, m + 1, \tag{4}$$

$$H_k = -\sum_{i=0}^{q} A_i\tau_i^k, a = \tau_0 < \tau_1 <\ldots< \tau_q = b.$$

Неизвестные векторные коэффициенты Q_k, $k = 1,\ldots, m + 1$, согласно общей схеме метода коллокации определяются из условия обращения в нуль невязки $dx_m(t) / dt - f(t, x_m(t))$ в фиксированных $(m + 1)$ точках коллокации $t_0, t_1,\ldots ,t_m$, т.е. из системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений

$$\frac{dx_m(t_i)}{dt} = f(t, x_m(t_i)), i = 0, 1,\ldots, m. \tag{5}$$

Выберем в качестве узлов коллокации t_i, $i = 0, 1,\ldots,m$, корни многочлена $(m + 1)$ степени $P_{m+1}(t, \rho)$, принадлежащего системе ортогональных с весом $\rho(t)$ на отрезке $[a, b]$ полиномов, где $\rho(t)$ — неотрицательная суммируемая функция, для которой $\int_a^b \frac{ds}{\rho(s)} < \infty$. Известно [3], что полином $P_{m+1}(t, \rho)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ровно $(m + 1)$ различных действительных корней.

Предположим, что краевая задача (1), (2) имеет решение $x^0(t)$, принадлежащее области D вместе с некоторой своей окрестностью. Выясним условия, при которых система уравнений (5) разрешима, и оценим отклонение приближенного решения $x_m(t)$ от точного решения $x^0(t)$.

Будем обозначать через $C[a, b]$ пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций

$$x(t) \doteq (x_1(t),\ldots, x_n(t)) \tag{6}$$

с нормой

$$\left|x(t)\right|_C = \max_{i=1,\cdots,n} \max_{t\in[a,b]}\left|x_i(t)\right| = \max_{i=1,\cdots,n}\left|x_i(t)\right|_0$$

и понимать под $|x(t)|_0$ вектор

$$|x(t)|_0 = (\max_{t\in[a,b]}|x_1(t)|, \cdots, \max_{t\in[a,b]}|x_n(t)|).$$

Рассмотрим также пространство $L^2_\rho[a, b]$ квадратично суммируемых с весом $\rho(t)$ на отрезке $[a, b]$ вектор-функций, для которых посредством $|x(t)|_2$ будем обозначать норму

$$|x(t)|_2 = \max_{i=1,\cdots,n}\left[\int_a^b \rho(s)|x_i(s)|^2 ds\right]^{1/2}.$$

Неравенства между векторами понимаем покомпонентно. Для вектор-функции (6) наилучшим равномерным приближением $E_m(x)$ будем считать вектор $E_m(x) = (E_m(x_1), \ldots, E_m(x_n))$, где $E_m(x_k)$ — наилучшее равномерное приближение функции $x_k(t)$, а $E^0_m(x) = \max_{k=1,\ldots,n} E_m(x_k)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Предположим, что:*

1) *краевая задача* (1), (2) *имет решение* $x^0 = x^0(t)$;

2) *функция* $f(t, x)$ *и матрица Якоби* $(\partial f(t,x)/\partial x) = F(t,x)$ *определены и непрерывны при*

$$t \in [a, b], |x - x^0|_C \le \delta, \delta > 0; \tag{7}$$

3) *система уравнений в вариациях относительно решения* $x^0(t)$

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x^0)x \tag{8}$$

при однородных краевых условиях (2) *имеет лишь нулевое решение;*

4) *матрицы* A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, q$, $B(s)$ *такие, что*

$$\det\left(R = \sum_{i=0}^{q} A_i + B_0\right) \ne 0, B_0 = \int_a^T B(s)ds, T \in (a, b].$$

Тогда:

1) *можно указать такое* $\alpha > 0$, *что в шаре*

$$\left|\frac{dx}{dt} - \frac{dx^0}{dt}\right|_2 \le \alpha \tag{9}$$

абсолютно непрерывных на $[a, b]$ *функций* $x(t)$ *решение краевой задачи* $x^0(t)$ *единственно;*

2) *при достаточно больших* m ($m \ge m_0$) *метод коллокации* (5), (4) *определяет в* (9) *единственное приближенное решение* $x_m = x_m(t)$ *вида* (4);

3) *последовательность приближений* $x_m(t)$ *равномерно, а* $dx_m(t)/dt$ *в метрике* $L^2_\rho[a,b]$ *сходится при* $m \to \infty$ *соответственно к* $x^0(t)$ *и* $dx^0(t)/dt$, *причем*

$$\left|x_m(t) - x^0(t)\right|_C \le c_1 E^0_m\left(\frac{dx^0}{dt}\right); \tag{10}$$

$$\left|\frac{dx_m(t)}{dt} - \frac{dx^0(t)}{dt}\right|_2 \le c_2 E^0_m\left(\frac{dx^0}{dt}\right). \tag{11}$$

$$E_m^0\left(\frac{dx^0}{dt}\right)=\max_{i=1,\ldots,n} E_m^0\left(\frac{dx_i^0}{dt}\right),$$

где $E_m^0\left(\frac{dx_i^0}{dt}\right)$ *— наилучшее равномерное приближение функции* dx_i^0/dt *многочленом степени не выше* m*;* c_1, c_2 *— не зависящие от* m *константы.*

Доказательство основано на сведении исходной краевой задачи и системы уравнений (5) к двум равносильным им операторным уравнениям в пространстве $L_p^2[a,b]$ с последующим применением к ним теоремы 3.1 из [1]. Для этого введем в рассмотрение функцию Грина $G(t, s)$ краевой задачи для системы уравнений $dx / dt = 0$ при однородных краевых условиях

$$\sum_{i=0}^{q} A_i x(\tau_i)+\int_a^T B(s)x(s)ds=0,\, T\in(a,b],\, a=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_q=b.$$

Можно показать, что эта функция имеет вид

$$G(t,s)=\begin{cases} -\left(\sum_{i=0}^{q}F_i+H_1(s)+H_2(s)\right)^{-1}\left[\sum_{i=k}^{q}F_i+H_2(s)\right], & t\in[a,s),\ \tau_{k-1}\le s\le\tau_k, \\ E-\left(\sum_{i=0}^{q}F_i+H_1(s)+H_2(s)\right)^{-1}\left[\sum_{i=k}^{q}F_i+H_2(s)\right], & t\in(s,b],\ \tau_{k-1}\le s\le\tau_k, \end{cases} \tag{12}$$

$$H_1(s)=\int_a^s B(t)dt,\, H_2(s)=\int_s^T B(t)dt.$$

Из (12) следует, что оператор G

$$Gv=R^{-1}d+\int_a^b G(t,s)v(s)ds \tag{13}$$

является линейным вполне непрерывным оператором из $L_p^2[a, b]$ в пространство $C[a, b]$.

Положим $v^0(t)= dx^0(t) / dt$. Тогда

$$x^0 = Gv^0. \tag{14}$$

Ввиду ограниченности оператора G в пространстве $L_p^2[a, b]$ можем выбрать шар

$$| v-v^0 |_2\le\alpha \tag{15}$$

столь малого радиуса α, чтобы функции $x = Gv$ удовлетворяли условию (7).

Зададим в шаре (15) пространства $L_p^2[a, b]$ оператор K, переводящий функции $v(t)$ из этого шара в шар пространства $C[a, b]$ по формуле

$$Kv = f(t, \int_a^b G(t,s)v(s)ds+R^{-1}d).$$

Из непрерывности вектор-функции $f(t, x)$ и вполне непрерывности оператора G следует, что оператор K в области (15) является вполне непрерывным.

Обозначим через P оператор вложения пространства $C[a, b]$ в пространство $L_\rho^2[a, b]$. Тогда задача (1), (2) равносильна операторному уравнению

$$v = PKv, \tag{16}$$

решаемому в пространстве $L_\rho^2[a, b]$.

Так как P — оператор вложения, то он является линейным и непрерывным. Решения исходной краевой задачи и операторного уравнения (16), очевидно, связаны соотношением (14).

Положив $v_m = dx_m(t) / dt$, получим

$$x_m = Gv_m. \tag{17}$$

Тогда систему алгебраических уравнений метода коллокации (5) можно записать в виде

$$P_m v_m = P_m K v_m, \tag{18}$$

где P_m — линейный оператор, сопоставляющий каждой непрерывной на $[a, b]$ функции ее интерполяционный многочлен Лагранжа степени не выше m, построенный по рассматриваемым узлам, которые являются корнями ортогонального многочлена $P_{m+1}(t, \rho)$.

По теореме Эрдеш — Туран [4] интерполяционный многочлен Лагранжа любой непрерывной функции, построенный по выбранным узлам $t_0, t_1, \ldots, t_m$, среднеквадратически с весом $\rho(t)$ стремится к приближаемой функции, т.е. операторы $P_m: C[a, b] \to L_\rho^2[a, b]$ сильно стремятся к оператору P. Тогда по теореме Банаха — Штейнгауза [5] нормы операторов P_m ограничены:

$$\| P_m \| \le c_4 = \text{const}, \ m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

Так как $x_m(t)$ — полином степени $(m + 1)$, то $v_m(t) = dx_m(t) / dt$ — полином степени не выше m. Поэтому

$$P_m v_m = v_m, \tag{20}$$

а это позволяет записать операторное уравнение (18) в виде

$$v_m = P_m K v_m. \tag{21}$$

Из предположения о том, что система уравнений (8) при однородных краевых условиях (2) имеет только тривиальное решение, следует, что уравнение

$$v - PK'(v^0)v = 0, \tag{22}$$

где $K'(v) = (\partial f(t, Gv)/\partial x)G$, имеет тоже лишь тривиальное решение. Из непрерывности матрицы Якоби $F(t, x)$ в области (7) следует непрерывная дифференцируемость оператора K в шаре $| v - v^0 |_2 \le \alpha$. Таким образом, для операторных уравнений (16) и (21) выполняются все условия теоремы 3.1 [1]. (Изолированность решения v^0 вытекает из того, что уравнение (22) имеет лишь нулевое решение [6].)

Из утверждений теоремы 3.1 [1] следует:

1) решение $v = v^0$ уравнения (16) единственно в шаре (15);

2) при достаточно больших $m \ge m_0$ уравнение (21) также имеет в шаре $| v - v^0 |_2 \le \alpha$ единственное решение v_m, стремящееся к v^0 при $m \to \infty$ по норме пространства $L_\rho^2[a, b]$:

$$| v_m - v^0 |_2 \xrightarrow[m \to \infty]{} 0; \tag{23}$$

3) для отклонения v_m от v^0 верна оценка

$$| v_m - v^0 |_2 \le c_3 | (P_m - P)Kv^0 |_2 = c_3 | v^0 - P_m P^{-1} v^0 |_2,\ m \ge m_0. \tag{24}$$

Пусть $p_m(t) = (p_{m1}(t), \ldots, p_{mn}(t))$ — произвольный векторный многочлен степени не выше m. Тогда $P_m P^{-1} p_m(t) = p_m(t)$, и из неравенства (24) вытекает доказываемое соотношение (11):

$$| v_m - v^0 |_2 \le c_3(| v^0(t) - p_m(t) |_2 + | P_m P^{-1}(v^0 - p_m(t)) |_2) =$$

$$= c_3 \max_{i=1,\ldots,n} (| v_i^0(t) - p_{mi}(t) |_2 + | P_m P^{-1}(v_i^0 - p_{mi}(t)) |_2) \le$$

$$\le c_3 \max_{i=1,\ldots,n} | v_i^0(t) - p_{mi}(t) |_0 \left[\left(\int_a^b \rho(s) ds \right)^{1/2} + c_4 \right] \le$$

$$\le c_3 \left[\left(\int_a^b \rho(s) ds \right)^{1/2} + c_4 \right] \max_{i=1,\ldots,n} E_m(v_i^0) \le c_2 E_m^0(v^0).$$

Для получения оценки (10) учтем соотношение

$$x_m(t) - x^0(t) = \int_a^b G(t,s)(v_m(s) - v^0(s)) ds, \tag{25}$$

в силу которого

$$| x_m(t) - x^0(t) |_C = \max_{i=1,\ldots,n} | x_{mi}(t) - x_i^0(t) |_0 =$$

$$= \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^n \int_a^b G_{ij}(t,s)(v_{mj}(s) - v_j^0(s)) ds \right|_0 =$$

$$= \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^n \int_a^b \frac{G_{ij}(t,s)}{\sqrt{\rho(s)}} \sqrt{\rho(s)} (v_{mj}(s) - v_j^0(s)) ds \right|_0, \tag{26}$$

где $G_{ij}(t, s)$ — элементы матрицы Грина $G(t, s)$.

Воспользовавшись неравенством Коши — Буняковского, из соотношения (26) получаем

$$| x_m(t) - x^0(t) |_C \le \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^n \left(\int_a^b \frac{\left| G_{ij}(t,s) \right|^2}{\rho(s)} ds \right)^{1/2} \left| v_{mj} - v_j^0 \right|_2 \right|_0.$$

Положим

$$\max_{j=1,\ldots,n} \left| \left(\int_a^b \frac{\left| G_{ij}(t,s) \right|^2}{\rho(s)} ds \right)^{1/2} \right|_0 = c_i;$$

тогда

$$| x_m(t) - x^0(t) |_C \le \max_{i=1,\ldots,n} c_i \left(\sum_{j=1}^n \left| v_{mj} - v_j^0 \right|_2 \right),$$

и следовательно,

$$|x_m(t) - x^0(t)|_C \le \max_{i=1,\dots,n} c_i(nc_2 E_m^0(v^0)) = c_1 E_m^0(v^0).$$

Это и завершает доказательство теоремы.

Проиллюстрируем приведенную выше схему метода коллокации на конкретном примере.

Пусть на отрезке $[0, 1]$ требуется найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1 - tx_2 + te^t,$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - tx_1 + 1, \tag{27}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(1) + \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{bmatrix} 3-e \\ 1-e \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Приближенное решение краевой задачи (27), (28) находим в виде (4). При $m = 2$ оно задается формулой

$$x_2(t) = R^{-1}d - R^{-1}\left[\sum_{k=1}^{3}\left(A_1 a^k + A_2 b^k\right)Q_k\right] - R^{-1}\sum_{k=1}^{3} B_k Q_k + \sum_{k=1}^{3} Q_k t^k,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B_k = \int_0^1 B(s)s^k ds,\ k = 0, 1, 2, 3,$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ R = A_1 + A_2 + B_0,\ d = \begin{bmatrix} 3-e \\ 1-e \end{bmatrix},\ a = 0,\ b = 1.$$

Проделав необходимые вычисления, с учетом того, что $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix}$, $Q_3 = \begin{bmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{bmatrix}$, получим следующую формулу для вычисления приближеного решения:

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} Q_{01} \\ Q_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} Q_{31} \\ Q_{32} \end{bmatrix} t^3, \tag{29}$$

где

$$Q_{01} = 2 - \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{2}{3}Q_{21} - \frac{3}{4}Q_{31} + \frac{1}{3}Q_{22} + \frac{1}{2}Q_{32},$$

$$Q_{02} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}Q_{11} - \frac{1}{2}Q_{12} + \frac{1}{6}Q_{21} - \frac{1}{3}Q_{22} + \frac{1}{8}Q_{31} - \frac{1}{4}Q_{32}.$$

Выберем в качестве узлов коллокации t_1, t_2, t_3 корни многочлена Чебышева первого рода $T_3(t) = 4t^3 - 3t$, отнесенные к отрезку $[0, 1]$. Этот многочлен на отрезке $[-1, 1]$ имеет три корня $t_1' = -\sqrt{3}/2$, $t_2' = 0$, $t_3' = \sqrt{3}/2$. Применяя преобразование $t = \frac{1}{2}(1 + t')$, получаем нужные точки на отрезке $[0, 1]$: $t_1 = 0{,}0669873$; $t_2 = 0{,}5$; $t_3 = 0{,}9330127$.

Согласно схеме метода коллокации неизвестные коэффициенты Q_k, $k = 1, 2, 3$, определяются из системы уравнений (5), которая для краевой задачи (27), (28) принимает вид

$$(Q_{11} + 2Q_{21}t_i + 3Q_{31}t_i^2) = (2 - \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{2}{3}Q_{21} - \frac{3}{4}Q_{31} + \frac{1}{3}Q_{22} + \frac{1}{2}Q_{32} +$$

$$+ Q_{11}t_i + Q_{21}t_i^2 + Q_{31}t_i^3) - t_i(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}\, Q_{11} - \frac{1}{2}Q_{12} + \frac{1}{6}Q_{21} - \frac{1}{3}Q_{22} +$$

$$+ \frac{1}{8}Q_{31} - \frac{1}{4}Q_{32} + Q_{12}t_i + Q_{22}t_i^2 + Q_{32}t_i^3) + t_i e^{t_i}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$(Q_{12} + 2Q_{22}t_i + 3Q_{32}t_i^2) = (2 - \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{2}{3}Q_{21} - \frac{3}{4}Q_{31} + \frac{1}{3}Q_{22} + \frac{1}{2}Q_{32} +$$

$$+ Q_{11}t_i + Q_{21}t_i^2 + Q_{31}t_i^3)(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e + \frac{1}{4}\, Q_{11} - \frac{1}{2}Q_{12} + \frac{1}{6}Q_{21} - \frac{1}{3}Q_{22} +$$

$$+ \frac{1}{8}Q_{31} - \frac{1}{4}Q_{32} + Q_{12}t_i + Q_{22}t_i^2 + Q_{32}t_i^3) - t_i(2 - \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{2}{3}Q_{21} -$$

$$- \frac{3}{4}Q_{31} + \frac{1}{3}Q_{22} + \frac{1}{2}Q_{32} + Q_{11}t_i + Q_{21}t_i^2 + Q_{31}t_i^3) + 1, \quad i = 1, 2, 3;$$

где $t_1 = 0{,}0669873$; $t_2 = 0{,}5$; $t_3 = 0{,}9330127$. Решая эти уравнения, для компонент неизвестных векторов получаем

$$Q_{11} = 0{,}711;\ Q_{21} = 0{,}499;\ Q_{31} = 0{,}818;$$

$$Q_{12} = 0{,}985;\ Q_{22} = 0{,}135;\ Q_{32} = -0{,}142.$$

Следовательно, согласно (29) приближенное решение краевой задачи (27), (28) представляется в виде полинома третьей степени

$$x_{21}(t) = 0{,}6723334 + 0{,}711t + 0{,}499t^2 + 0{,}818t^3,$$

$$x_{22}(t) = 0{,}0020257 + 0{,}985t + 0{,}135t^2 - 0{,}142t^3. \tag{30}$$

Сравнивая значения точного решения $x^0(t) = (x_1^0(t),\ x_2^0(t)) = (e^t,\ t)$ краевой задачи (27), (28) в точках $t = 0;\ 0{,}5;\ 1$ со значениями полученного решения (30), видно, что даже при невысоком порядке приближения ($m = 2$) точность удовлетворительная. Для достижения большей точности вычислений следует увеличить число m.

1. *Вайникко Г. М.* О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1966. – **6**, №1. – С.35 – 42.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
4. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. –М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.–686 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.; Л.: Физматгиз, 1959. – 632 с.
6. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Получено 05. 11. 91