УДК 517.5

А. И. Степанец, д-р физ.-мат. наук,
В.С. Романюк, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КЛАССЫ (ψ, β)-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СРЕДНИМИ ИХ РЯДОВ ФАБЕРА

Вводится понятие (ψ, β)-производных функций комплексного переменного и на его основании определяются классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ (ψ, β)-дифференцируемых аналитических функций в ограниченных областях G. Классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ объединяют интегралы типа Коши, плотности $f(\zeta)$ которых таковы, что индуцируемые ими на единичной окружности функции $\tilde{f}(t)$ принадлежат классам периодических функций $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

Рассматриваются приближения функций $f \in L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ с помощью алгебраических полиномов, построенных на базе их разложений в ряды по многочленам Фабера.

Вводиться поняття (ψ, β)-похідних функцій комплексної змінної, на його основі визначаються класи $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ (ψ, β)-диференційовних аналітичних функцій в обмежених областях G. Класи $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ об'єднують інтеграли типу Коші, щільності яких $f(\zeta)$ такі, що функції $\tilde{f}(t)$, які індукуються ними на одиничному колі, належать класам періодичних функцій $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

Розглядаються наближення функцій $f \in L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ за допомогою алгебраїчних поліномів, які побудовані на базі їх розкладу в ряди за многочленами Фабера.

В 1983 г. в работах [1, 2] (см. также [3]) было введено понятие (ψ, β)-производных суммируемых периодических функций, посредством которого производилось разбиение таких функций на классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$, являющиеся естественным обобщением известных классов $W_\beta^r\mathfrak{N}$ Вейля—Надя и совпадающие с последними при надлежащем выборе параметров $\psi(\cdot)$ и β. К настоящему времени для классов $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ получены практически все результаты, связанные с аппроксимацией функций, которые ранее были известны для классов $W_\beta^r\mathfrak{N}$. Классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$ учитывают более тонкие свойства функций по сравнению с классами $W_\beta^r\mathfrak{N}$, и поэтому результаты, получающиеся для них, зачастую вскрывают новые эффекты, которые в шкале классов Вейля–Надя обнаружить не представляется возможным.

Впоследствии [4–5] понятие (ψ, β)-дифференцирования было распространено на множества функций, заданных на всей оси и являющихся не обязательно периодическими. Это позволило получить ряд результатов по приближению таких функций посредством целых функций экспоненциального типа, аналогичных результатам для классов $L_\beta^\psi\mathfrak{N}$.

В настоящей работе вводится понятие (ψ, β)-производных для функций комплексного переменного, на основании которого определяются классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ (ψ, β)-дифференцируемых аналитических в ограниченных областях G функций. Подходов к такому определению можно указать несколько. Мы же останавливаемся на таком, когда классы $L_\beta^\psi\mathfrak{N}(G)$ объединяют интегралы типа Коши, плотности $f(\zeta)$ которых таковы, что индуцируемые ими на единичной окружности функции $\tilde{f}(t)$ принадлежат классам периодических функций $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Предполагается также, что рассматриваемие области G ограничиваются жордановыми спрямляемыми кривыми, хотя из построений будет видно, что такое ограничение и не является необходимым.

В работе получено интегральное представление уклонений линейных средних рядов Фабера на классах $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$, отправляясь от которого, найдены оценки уклонений частных сумм Фабера, выраженные посредством величин $E_{n,\infty}(f^{\psi}_{\beta}; z)$. Величины $E_{n,\infty}(f^{\psi}_{\beta}; z)$ в каждой точке $z \in G$ представляют собой наилучшие приближения тригонометрическими полиномами порядка $n-1$ по $t \in R$ функции

$$If^{\psi}_{\beta}(z;t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f^{\psi}_{\beta}\left(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n})\right)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где $\Psi(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ – отображения, однозначно определенные областью G, а Γ — граница области G.

Установлены равномерные оценки величин $E_{n,\infty}(f^{\psi}_{\beta}; z)$ в замыкании фаберовой области G. В случае, когда G – единичный круг с центром в точке $z = 0$, эти оценки являются точными по порядку.

1. Классы функций. Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ; $w = \Phi(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая внешность области $\overline{G}$ — замыкания G — на внешность единичного круга $|w| < 1$, нормированная условиями

$$\lim_{z\to\infty} z^{-1}\Phi(z) = \alpha > 0;\ \Phi(\infty) = \infty,$$

$z = \Psi(w) = \Phi^{-1}(w)$ — функция, обратная к $\Phi(z)$.

Пусть, далее, на границе Γ задана суммируемая функция $f(\zeta)$ такая, что функция $f(\Psi(w))$ является суммируемой на единичной окружности $|w| = 1$:

$$\int\limits_{|w|=1} \left|f(\Psi(w))\right| |dw| = \int\limits_0^{2\pi} \left|f\left(\Psi(e^{it})\right)\right| dt = K < \infty.$$

Множество функций $f(\cdot)$, удовлетворяющих этому условию, обозначим через $L(\Gamma)$. Тогда $\tilde f(t) = f(\Psi(e^{it}))$ — 2π-периодическая суммируемая функция, разлагающаяся в ряд Фурье,

$$S\left[\tilde f\right] = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\tilde f)e^{ikt},$$

где $c_k(\tilde f)$ — ее коэффициенты Фурье.

Предположим, что для данной фиксированной последовательности $\psi(k)$, $k \in N$, и некоторого $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0} e^{i\beta\pi/2\,\mathrm{sign}\,k} \frac{c_k(\tilde f)}{\psi(|k|)} e^{ikt} \tag{1}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $\tilde f^{\psi}_{\beta}(t)$ и назовем (ψ, β)-производной функции $\tilde f(t)$. Функцию $\mu(\zeta)$, определенную на Γ, для которой почти всюду $\mu(\Psi(e^{it})) = \tilde f^{\psi}_{\beta}(t)$, назовем (ψ, β)-производной функции $f(\zeta)$ и обозначим через $f^{\psi}_{\beta}(\zeta)$. Множество функций $f(\zeta)$, определенных на Γ, у которых существуют (ψ, β)-производные, обозначим через $L^{\psi}_{\beta}(\Gamma)$ и через $L^{\psi}_{\beta}(G)$ — множество интегралов типа Коши

$$If(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\ \ f\in L^{\psi}_{\beta}(\Gamma). \tag{2}$$

Если $\mathfrak{N}(\Gamma)$ — некоторое подмножество функций $f \in L(\Gamma)$, то через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ будем обозначать подмножество функций из $L^{\psi}_{\beta}(\Gamma)$, для которых $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}(\Gamma)$.

Таким образом, $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$ – множество аналитических в G функций $F(z)$, представляемых равенством $F(z) = If(z)$, где $f(z)$ таковы, что $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}(\Gamma)$, т.е. $f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. Следовательно, классы $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(G)$ полностью определяются множеством плотностей интегралов типа Коши, т.е. множеством $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. Этот факт регулярно используется в дальнейшем.

2. Приближающие агрегаты. Если граница Γ области G спрямляема, то $\forall\, z \in G$ функция $(\Psi'(e^{it})e^{it}) / (\Psi(e^{it} - z))$ суммируема и разлагается по t в ряд Фурье

$$\frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it})-z}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{e^{ikt}}, \tag{3}$$

где $F_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — многочлены Фабера для области G (см., например, [6, с.362]).

Поэтому $\forall\, f \in L(\Gamma)$ в каждой точке $z \in G$

$$If(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\Psi(w))\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}dw\sim$$

$$\sim\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\Psi(e^{it}))\sum_{k=0}^{\infty}\frac{F_k(z)}{e^{ikt}}dt\sim\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f(\Psi(w))}{w^{k+1}}dw\right)F_k(z),$$

т.е.

$$If(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kF_k(z), \tag{4}$$

где

$$a_k=a_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}f(\Psi(w))w^{-k-1}\,dw$$

— коэффициенты Фабера функции $If(\cdot)$; ряд (4) называют рядом Фабера функции $If(\cdot)$.

Заметим, что числа a_k, $k = 0, 1, \ldots,$ совпадают с коэффициентами Фурье $c_k = c_k(\tilde{f})$, $k = 0, 1, \ldots,$ в комплексной форме функции $\tilde{f}(t) = f(\Psi(e^{it}))$.

Пусть теперь $\Lambda = \| \lambda^{(n)}_{k} \|$, $n = 0, 1, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, — произвольная треугольная числовая матрица, $\lambda^{(0)}_k = 1$. Отправляясь от разложения (4), $\forall\, f \in$ $\in L(\Gamma)$ полагаем

$$U_n(f;z;\Lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda^{(n)}_k a_k(f)F_k(z),\ \ n=1,2,\ldots. \tag{5}$$

Таким образом, посредством матрицы Λ задается метод построения полиномов $U_n(f; z; \Lambda)$ или, другими словами, конкретная последовательность полиномиальных операторов $U_n(f; \Lambda)$, определенных на множестве $L(\Gamma)$. В этом случае говорят, что матрица Λ определяет конкретный метод (Λ-метод) суммирования рядов Фабера. При каждом фиксированном n операторы $U_n(f; \Lambda)$ линейны. Поэтому Λ-методы называют линейными методами (процессами) суммирования рядов Фабера.

Пусть, далее, $\{\lambda_n(v)\}$, $n \in N$, – последовательность непрерывных на $[0; 1]$ функций, для которых $\lambda_n(k/n) = \lambda_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots$, где $\lambda_k^{(n)}$ — элементы матрицы Λ, и $\psi(v)$ — функция, непрерывная при всех $v \geq 1$. Тогда полагаем

$$\tau_n(v) = \tau_n(v;\Lambda;\psi) = \begin{cases} [1-\lambda_n(v)]\psi(nv), & 1/n \leq v \leq 1, \\ \psi(nv), & v \geq 1. \end{cases} \tag{6}$$

Доопределим $\tau_n(v)$ на промежутке $[0; 1/n]$ произвольным образом так, чтобы продолженная функция (которую по–прежнему будем обозначать $\tau_n(v)$) была непрерывной для всех $v \geq 0$ и $\tau_n(0) = 0$. Ясно, что тогда

$$\tau_n(k/n) = \begin{cases} \left(1-\lambda_k^{(n)}\right)\psi(k), & 1 \leq k \leq n, \\ \psi(k), & k \geq n. \end{cases}$$

Везде в дальнейшем функция $\psi(k)$, определяющая множества $L_\beta^\psi(\cdot)$, является сужением на множестве N натуральных чисел функции $\psi(v)$, непрерывной при всех $v \geq 0$ и участвующей в определении функций $\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi)$.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ, $f \in L_\beta^\psi M(\Gamma)$, где $M(\Gamma)$ — множество существенно ограниченных функций из $L(\Gamma)$, $\tau_n(v) = \tau_n(v; \Lambda; \psi)$ – функция, определяющаяся формулой* (6), *такая, что ее преобразование*

$$\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \tau_n(v)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv \tag{7}$$

суммируемо на $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tau}_n(t)\right| dt \leq K < \infty.$$

Тогда $\forall\, z \in G$ при любых $n \in N$ и $\beta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$If(z) - U_n(f;z;\Lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) \int_\Gamma \frac{f_\beta^\psi(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta - z}\,d\zeta\,dt. \tag{8}$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования в правой части формулы (8), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(t) \int_\Gamma \frac{f_\beta^\psi(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta - z}\,d\zeta\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mathcal{I}^{\psi}_{\beta,n}(f;\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

где

$$\mathcal{I}^{\psi}_{\beta,n}(f;\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t)f^{\psi}_{\beta}\left(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n})\right)dt.$$

В [7, с.56] показано, что в условиях теоремы почти для всех $x\in\mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t)f^{\psi}_{\beta}\left(\Psi(e^{i(x+t/n)})\right)dt=f\left(\Psi(e^{ix})\right)-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k^{(n)}c_k(\tilde{f})e^{ikx}, \tag{9}$$

в котором $\lambda_k^{(n)}=\lambda_{|k|}^{(n)}$. Полагая теперь $e^{ix}=\Phi(\zeta)$, получаем

$$\mathcal{I}^{\psi}_{\beta,n}(f;\zeta)=f(\zeta)-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k^{(n)}c_k(\tilde{f})\Phi^k(\zeta).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mathcal{I}^{\psi}_{\beta,n}(f;\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=If(z)-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k^{(n)}c_k(\tilde{f})\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

364

Но (см., например, [6, с.358]) $\forall\, z\in G$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}F_k(z), & k=0,1,\dots,\\ 0, & k=-1,-2,\dots.\end{cases}$$

Значит $\forall\, z\in G$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mathcal{I}^{\psi}_{\beta,n}(f;\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=If(z)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}a_k(f)\,F_k(z).$$

т.е. получаем искомое равенство (8).

Рассмотрим формулу (8) в случае, когда

$$\lambda_k(v)=\lambda_k(c;v)=\begin{cases}1, & 0\le v\le c,\\ 1-\dfrac{v-c}{1-c}\,\dfrac{\psi(n)}{\psi(nv)}, & c\le v\le 1,\\ 0, & v\ge 1,\end{cases} \tag{10}$$

где c — некоторое число из промежутка $[0;\,1)$, а $\psi(v)$ — некоторая функция, непрерывная при всех $v\ge 0$.

В этом случае согласно (6)

$$\tau_n(v)=\tau_n(v;\psi;c)=\begin{cases}0, & 0\le v\le c,\\ \dfrac{v-c}{1-c}\,\psi(n), & c\le v\le 1,\\ \psi(nv), & v\ge 1.\end{cases}$$

Обозначим через F_0 множество непрерывных для всех $v\ge 0$ выпуклых вниз при $v\ge 1$ функций $\psi(v)$, для которых

$$\lim_{v\to\infty}\psi(v)=0; \tag{11}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt<\infty. \tag{12}$$

Если $\psi \in F_0$, то согласно лемме 4.1 из [7] преобразование $\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t;\psi;c)$ вида (7) функции $\tau_n(v;\psi;c)$ является суммируемым на $\mathbb{R}$ при всех $n \in N$, $c \in [0;1)$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Поэтому, полагая $\Lambda_c = \{\lambda_n(c;\cdot)\}$, из теоремы 1 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ; $f \in L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$, $\psi \in F_0$. Тогда $\forall\, c \in [0;1)$ при любых $n \in N$ и $\beta \in \mathbb{R}$ в каждой точке $z \in G$ выполняется равенство*

$$If(z) - U_n(f;z;\Lambda_c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t;\psi;c)\int_{\Gamma}\frac{f^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta - z}\,d\zeta\,dt. \tag{13}$$

Обозначим теперь через $\mathfrak{M}$ множество непрерывных для всех $v \geq 0$ выпуклых вниз при $v \geq 1$ функций $\psi(v)$, для которых выполнено условие (11). Ясно, что $\mathfrak{M} \supset F_0$. Если $\psi \in \mathfrak{M}$, то в силу леммы 5.1 из [7] преобразование $(t;\beta)$ вида (7) функции $\tau_n(v;\psi;c)$ будет суммируемым на $\mathbb{R}$ при $\beta = 0$. Поэтому из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ; $f \in L^{\psi}_{0}M(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}$. Тогда $\forall\, c \in [0;1)$, $\forall\, n \in N$ в каждой точке $z \in G$ справедливо равенство*(13), *в котором $\hat{\tau}_n(t;\psi;c) = \hat{\tau}_n(t;0)$.*

Если $c = 1 - 1/n$, то из (5) и (10) следует, что в этом случае

$$U_n(f;z;\Lambda_{1-1/n}) \equiv S_{n-1}(f;z) = \sum_{k=o}^{n-1} a_k(f)F_k(z),$$

т.е. $U_n(f;z;\Lambda_{1-1/n})$ совпадает с частной суммой порядка $n-1$ ряда Фабера, и тогда из следствий 1 и 2 получаем следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ; $\psi \in \mathfrak{M}$,*

$$\tau_n(v) = \tau_n(v;\psi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq v \leq 1 - 1/n, \\ [1 + n(v-1)]\psi(n), & 1 - 1/n \leq v \leq 1, \\ \psi(nv), & v \geq 1, \end{cases}$$

и

$$\hat{\tau}_n(t) = \hat{\tau}_n(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\tau_n(v;\psi)\cos(vt + \beta\pi/2)\,dv. \tag{14}$$

Тогда если $f \in L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$ то при любых $n \in N$ в каждой точке $z \in G$ справедливо равенство

$$\rho_n(f;z) \equiv If(z) - S_{n-1}(f;z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t;\beta)\int_{\Gamma}\frac{f^{\psi}_{\beta}(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta - z}\,d\zeta\,dt, \tag{15}$$

в котором следует положить $\beta = 0$.

Если же $\psi \in F_0$, то равенство (15) *справедливо для всех $f \in L^{\psi}_{\beta}M(\Gamma)$ при любом $\beta \in \mathbb{R}$.*

Из (9) следует, что если функция $T_n(z;t)$ является тригонометрическим полиномом по переменной t порядка $n-1$ вида

$$T_n(z;t)=\sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k(z)e^{ikt}, \tag{16}$$

с коэффициентами, зависящими от z, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t;\beta)T_n(z;t)\,dt=0 \quad \forall\, n\in N,\ \forall\, \beta\in \mathbb{R} \tag{17}$$

при $\hat{\tau}_n(t;\beta)$, определенном формулой (14). Поэтому равенство (15) может быть записано следующим образом:

$$\rho_n(f;z)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\tau}_n(t;\beta)\delta_n(z;t/n)\,dt, \tag{18}$$

где

$$\delta_n(z;t/n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_\beta^\psi(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n}))}{\zeta-z}d\zeta-T_n(z;t/n).$$

Тогда из следствия 3 получаем такое следствие.

Следствие 4. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границ Γ. Тогда если $f\in L_\beta^\psi M(\Gamma)$ и $\psi\in F_0$, то $\forall\, n\in N$, $\forall\,\beta\in\mathbb{R}$ в каждой точке $z\in G$ выполняется равенство* (18). *Если же $\psi\in\mathfrak{M}$, то равенство* (18) *справедливо в каждой точке $z\in G$ при любом $n\in N$ и $\beta=0$.*

3. Основные результаты. Обозначим через $C(\Gamma)$ множество функций, непрерывных на кривой Γ. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ, $a=a(n)$ – произвольная последовательность, для которой $a(n)\ge a_0>0$. Тогда если $f\in L_\beta^\psi C(\Gamma)$, $\psi\in F_0$, то $\forall\, z\in G$ и $\forall\,\beta\in\mathbb{R}$*

$$\left|\rho_n(f;z)\right|\le\frac{4}{\pi^2}\psi(n)E_{n,\infty}(f_\beta^\psi;z)\ln^+\frac{n}{a(n)}+b_\beta^\psi(f;a;z),$$

где

$$E_{n,\infty}(f_\beta^\psi;z)=\inf_{c_k^{(n)}(z)}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_\beta^\psi\left(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n})\right)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=-n+1}^{n-1}c_k^{(n)}(z)e^{ikt/n}\right|, \tag{19}$$

$$\ln^+t=\max\{\ln t;0\},$$

$$\left|b_\beta^\psi(f;a;z)\right|\le AE_{n,\infty}(f_\beta^\psi;z)\left[\psi(n)+P_n(a;\psi)+R_n(a;\psi)\right], \tag{20}$$

$$P_n(a;\psi)=\int_{1/a(n)}^{\infty}\frac{\psi(nt+n)}{t}dt,\quad R_n(a;\psi)=\int_{a(n)}^{\infty}\frac{\psi(n)-\psi(n+n/t)}{t}dt,$$

A — величина, не зависящая от $f(\cdot)$, $n\in N$ и $\beta\in\mathbb{R}$.

Доказательство. При каждом фиксированном $z\in G$ обозначим через $T_n^*(z;t)$ тригонометрический полином по переменной t вида (16), реализующий нижнюю грань в (19). Тогда $\forall\, t\in\mathbb{R}$ будем иметь

$$\left|\delta_n^*(z;t)\right|\overset{df}{=}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f_\beta^\psi\left(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it/n})\right)}{\zeta-z}d\zeta-T_n^*(z;t/n)\right|\le E_{n,\infty}(f_\beta^\psi;z),$$

и в силу следствия 4 $\forall z \in G$

$$\rho_n(f;z) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n^*(z;t)\hat{\tau}_n(t;\beta)dt. \tag{21}$$

В [7, с. 61] показано, что

$$\hat{\tau}_n(t;\beta) = \mathcal{J}_1(t;\beta) + \mathcal{J}_2(t;\beta), \tag{22}$$

где

$$\mathcal{J}_1(t;\beta) = \mathcal{J}_1(t;\beta;\psi) = \frac{\psi(n)}{\pi}\left[\frac{t - n\sin(t/n)}{t^2}\times\right.$$

$$\left.\times\sin(t+\beta\pi/2) + \frac{n(1-\cos(t/n))}{t^2}\cos(t+\beta\pi/2)\right]$$

и

$$\mathcal{J}_2(t;\beta) = \mathcal{J}_2(t;\beta;\psi) = \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\psi(nv)\cos(vt+\beta\pi/2)\,dt. \tag{23}$$

Повторяя рассуждения, с помощью которых было получено равенство (4.31) в [7, с. 61], приходим к заключению, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\,\mathcal{J}_1(t;\beta)\,dt = \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n^*(z;t)\cos(nt+\beta\pi/2)\,dt. \tag{24}$$

Таким образом, вследствие равенств (21) – (24) имеем

$$\rho_n(f;z) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\,\mathcal{J}_2(t;\beta)\,dt + \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\delta_n^*(z;t)\cos(nt+\beta\pi/2)\,dt.$$

Полученное равенство является аналогом равенства (21) из [8]. Поэтому, поступая так же, как и при доказательстве леммы 1 в [8], убеждаемся, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\psi \in F_0$ *и* $a = a(n)$ *– произвольная последовательность, для которой* $a(n) \geq a_0 > 0$. *Тогда* $\forall f \in L_\beta^\psi C(\Gamma)$, $\forall z \in G$ *и* $\forall n \in N$

$$\rho_n(f;z) = -\frac{\psi(n)}{\pi}\int_{|t|\geq a(n)}\delta_n^*(z;t)\frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t}\,dt + d_n^\psi(f;a;z),$$

где величина $|d_n^\psi(f;a;z)|$ *не превышает правой части* (20), *возможно с другой константой* A.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что

$$\left|\int_{|t|\geq a(n)}\delta_n^*(z;t)\frac{\sin(t+\beta\pi/2)}{t}\,dt\right| \leq \frac{4}{\pi^2}\psi(n)E_{n,\infty}(f_\beta^\psi;z)\left[\ln^+\frac{n}{a(n)} + O(1)\right].$$

Этот факт устанавливается аналогично тому, как в [8] было доказано соотношение (17).

Множество $\mathfrak{M}$ удобно разбить на подмножества $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_\infty$ следующим образом (см. [7, с. 93]): каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие две функции

$$\eta(t) = \eta(\psi;t) = \psi^{-1}(\tfrac{1}{2}\psi(t)),\ \ \mu(t) = \mu(\psi;t) = t/\big(\eta(t) - t\big)$$

и положим

$$\mathfrak{M}_c = \{\psi \in \mathfrak{M}: K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2,\, K_1, K_2 > 0\};$$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M}: 0 < \mu(\psi;t) < K,\, K > 0\};$$

$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon \mu(\psi;t)\uparrow\infty\},$$ $t \to \infty$

где K_1, K_2 и K — положительные величины, вообще говоря, зависящие от функции $\psi(\cdot)$.

В [7] показано, что $\mathfrak{M}_{c,\infty} \subset F_0$, $\mathfrak{M}_{c,\infty} \overset{df}{=} \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty$. Кроме того, там же установлено, что если $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, и в качестве $a(n)$ взять величину $\mu(n) = \mu(\psi; n)$, то $P_n(\mu;\psi) \le K\psi(n)$, $R_n(\mu;\psi) \le K\psi(n)$. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующая лемма.

Теорема 3. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ. Тогда если $f \in L^\psi_\beta C(\Gamma)$ и $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, то $\forall z \in G$ и $\forall \beta \in \mathbb{R}$*

$$|\rho_n(f;z)| \le \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\left[\ln^+(\eta(n)-n)+O(1)\right]E_{n,\infty}(f^\psi_\beta;z),$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n, β и $f(\cdot)$.

Для функций $\psi \in \mathfrak{M}_0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 3′. *Пусть G — область со спрямляемой жордановой границей Γ. Тогда если $f \in L^\psi_0 C(\Gamma)$ и $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall z \in G$*

$$|\rho_n(f;z)| \le \frac{4}{\pi^2}\psi(n)[\ln n + O(1)]\,E_{n,\infty}(f^\psi_0;z), \tag{25}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n и по $f(\cdot)$.

Доказательство. Если $\psi \in \mathfrak{M}$ и $\beta = 0$, то в силу следствия 4 $\forall z \in G$ справедливо равенство (18), согласно которому при условии, что в качестве полинома $T_n(z;t)$ выбран полином T_n^*, реализующий нижнюю грань в (19), будем иметь

$$\rho_n(f;z) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\hat{\tau}_n(t;0)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\,\mathcal{J}_1(t,0)\,dt + \int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\,\mathcal{J}_1(t,0)\,dt, \tag{26}$$

причем

$$\left|\delta_n^*(z;t)\right| \le E_{n,\infty}(f_0^\psi;z) \tag{27}$$

и, согласно (24),

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\,\mathcal{J}_1(t;0)dt\right| \le \frac{\psi(n)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\delta_n^*(z;t)\right||\cos nt|\,dt < \psi(n)E_{n,\infty}(f_0^\psi;z). \tag{28}$$

Далее, поскольку

$$\mathcal{J}_2(t;0) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos vt\,dv = -\frac{\psi(n)\sin t}{\pi t} - \frac{n}{\pi}\mathcal{J}_3(\psi;t), \tag{29}$$

где

$$\mathcal{J}_3(\psi;t) = \frac{1}{t}\int_1^\infty \psi'(nv)\sin vt\,dv, \tag{30}$$

то вследствие соотношений (26) – (30) получаем

$$\rho_n(f;z) = -\frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\frac{\sin t}{t}dt + b_0^\psi(f;z), \tag{31}$$

где

$$\left|b_0^\psi(f;z)\right| \le \psi(n)E_{n,\infty}(f_0^\psi;z) + \frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\delta_n^*(z;t)\right|\left|\mathcal{J}_3(\psi;t)\right|dt \le$$

$$\le E_{n,\infty}(f_0^\psi;z)\left[\psi(n)+\frac{n}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{J}_3(\psi;t)\right|dt\right].$$

Принимая во внимание второе из неравенств (10.9) из [7], убеждаемся, что $\forall\ \psi \in \mathfrak{M}_0$

$$\left|b_0^\psi(f;z)\right| \le K\,\psi(n)E_{n,\infty}(f_0^\psi;z), \tag{32}$$

где K — величина, равномерно ограниченная по n и $f(\cdot)$. Рассуждая так же, как и при завершении доказательства теоремы 1 в [8], убеждаемся, что справедливо соотношение

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n^*(z;t)\frac{\sin t}{t}dt\right| \le \frac{4}{\pi^2}E_{n,\infty}(f_0^\psi;z)[\ln n+O(1)]. \tag{33}$$

Объединяя соотношения (31) – (33), получаем неравенство (25).

* Получим простейшие оценки величин $E_{n,\infty}(\cdot;z)$, определяемых равенством (19). Начнем с рассмотрения случая, когда область G является единичным кругом, предварительно введя некоторые дополнительные обозначения.

Обозначим через C_0 множество функций $h(\cdot) \in C(|w|=1)$ таких, что если $h^*(\theta) \overset{df}{=} h(e^{i\theta})$ и

$$S[h^*] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h^*)\,e^{ik\theta},$$

где $c_k(h^*)$ — коэффициенты Фурье функции $h^*(\theta)$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(h^*)e^{ik\theta}$ является рядом Фурье некоторой функции $\hat{h} \in C(|w|=1)$, т.е., полагая

$$\hat{h}^*(\theta) = \hat{h}(e^{i\theta}), \tag{34}$$

имеем

$$S[\hat{h}^*] = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(h^*)e^{ik\theta}. \tag{35}$$

Лемма 2. *Пусть* $h \in C_0$ *и*

$$E_{n,\infty}(h;z) = \inf_{c_k^{(n)}(z)}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{h(we^{it})}{w-z}\,dw - \sum_{k=-n+1}^{n-1}c_k^{(n)}(z)e^{ikt}\right|,$$

где $c_k^{(n)}(z)$ *— произвольные функции переменной* z. *Тогда* $\forall\ z, |z|<1$,

$$E_{n,\infty}(h;z) \le E_n(\hat{h}^*), \tag{36}$$

где $E_n(\hat{h}^*)$ *— величина наилучшего приближения тригонометрическими полиномами порядка* $n-1$ *функции* $\hat{h}^*(\theta)$, *определенной соотношениями* (34) *и* (35).

Доказательство. Полагая $we^{it} = v$, имеем

$$Ih(z;t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{h(we^{it})}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=1}\frac{h(v)}{v-ze^{it}}\,dv.$$

Функция $Ih(z;t)$ при каждом фиксированном t аналитическая в круге $|z|<1$ и $\forall\, z, |z|<1$,

$$Ih(z;t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(ze^{it}\right)^k \frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=1} h(v)v^{-k-1}\,dv = \sum_{k=0}^{\infty}\left(ze^{it}\right)^k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^*(\sigma)e^{-ik\sigma}\,d\sigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(h^*)\left(ze^{it}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\hat{h}^*)\left(ze^{it}\right)^k = I\hat{h}(z;t).$$

Поэтому

$$E_{n,\infty}(h;z) = E_{n,\infty}(\hat{h};z). \tag{37}$$

Рассмотрим разность

$$R_n(z;t) = R_n(\hat{h};z;t) = I\hat{h}(z;t) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^{(n)} z^k e^{ikt} + \sum_{k=-n+1}^{-1}\alpha_k^{(n)}\frac{1}{\bar{z}^k}e^{ikt}\right], \tag{38}$$

где $\alpha_k^{(n)}$ — произвольные числа. Тогда ясно, что $\forall\, z, |z|<1$,

$$E_{n,\infty}(\hat{h};z) \le \inf_{\alpha_k^{(n)}}\sup_t \left|R_n(\hat{h};z;t)\right|.$$

Функция $I\hat{h}(z;t)$ при каждом фиксированном t является непрерывной в замкнутом круге $|z|<1$ и аналитической внутри его, причем (см., например, [9, с. 458]), в силу (35)

$$\lim_{z\to\zeta} I\hat{h}(z;t) = \hat{h}(\zeta e^{it}),\ |\zeta| = 1.$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в (38) – гармоническая в круге. Поэтому $R_n(z;t)$ $\forall\, t$ — функция, непрерывная в круге $|z|\le 1$ и гармоническая внутри него. Стало быть, $\forall\, z, |z|<1$, и $\forall\, t$

$$E_{n,\infty}(\hat{h};z) \le \inf_{\alpha_k^{(n)}}\sup_t\max_{|\zeta|=1}\left|R_n(\hat{h};\zeta;t)\right|, \tag{39}$$

где

$$R_n(\hat{h};\zeta;t) = \hat{h}(\zeta e^{it}) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^{(n)}\zeta^k e^{ikt} + \sum_{k=-n+1}^{-1}\alpha_k^{(n)}\bar{\zeta}^{-k}e^{ikt}\right].$$

Поэтому, полагая $\zeta = e^{i\tau}$, с учетом (39) имеем

$$E_{n,\infty}(\hat{h};z) \le \inf_{\alpha_k^{(n)}}\sup_t\max_\tau\left|\hat{h}(e^{i(\tau+t)}) - \sum_{k=-n+1}^{n-1}\alpha_k^{(n)}e^{ik(\tau+t)}\right| =$$

$$= \inf_{\alpha_k^{(n)}}\sup_t\max_\tau\left|\hat{h}^*(\tau+t) - \sum_{k=-n+1}^{n-1}\alpha_k^{(n)}e^{ik(\tau+t)}\right| = E_n(\hat{h}^*).$$

Из этого соотношения и равенства (37) получаем оценку (36). Выбирая в качестве функции $h(\cdot)$ производную $f_\beta^\psi(\cdot)$, из леммы 2 и теорем 3 и 3′ получаем такое следствие.

Следствие 5. *Пусть D — внутренность единичного круга $|z|\le 1$. Тогда если $f\in L_\beta^\psi C_0$ и $\psi\in\mathfrak{M}_{c,\infty}$, то $\forall\, z\in D$*

$$\left|\rho_n(f;z)\right| \le 4/\pi^2\,\psi(n)\left[\ln^+(\eta(n)-n) + O(1)\right]E_n\left(\hat{g}_\beta^\psi\right). \tag{40}$$

Если же $f\in L_0^\psi C_0$ и $\psi\in\mathfrak{M}_0$, то

$$\left|\rho_n(f;z)\right| \le 4/\pi^2\, \psi(n)[\ln n + O(1)]\, E_n\left(\hat{g}_0^{\psi}\right), \tag{41}$$

где $O(1)$ *– величины, равномерно ограниченные по* n, *по* β, *по* $f(\cdot)$ *и по* $z \in \in D$, *а* $\hat{g}_\beta^\psi(t) = \hat{f}_\beta^\psi(e^{it})$.

Замечание. Поскольку функция $If(z)$ при $f \in L_\beta^\psi C_0$ непрерывна в $\overline{D}$-замыкании D, то оценки (40), (41) остаются справедливыми $\forall\, z \in \overline{D}$.

Заметим также, что правая часть соотношения (40) в точности совпадает с оценкой уклонений частных сумм Фурье на классах $C_\beta^\psi C$, полученной в [8], которая является неулучшаемой в том смысле, что на всем пространстве $C_\beta^\psi C$ константу $4/\pi^2$ уменьшить нельзя.

Рассуждения, с помощью которых устанавливалась лемма 2, позволяют доказать неравенства вида (36) для областей довольно общей структуры, которые иногда (см., например, [10]) называют фаберовыми.

Говорят, что область G, ограниченная замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, фаберова ($G \in \mathfrak{F}$), если для любой функции $g(w)$, аналитической в круге $|w| < 1$ и непрерывной на $|w| \le 1$ ($g \in \mathcal{A}(|w| \le 1)$) выполняется неравенство

$$\sup_{z\in G}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}\,d\zeta\right| \le C \sup_{|w|<1}|g(w)|, \tag{42}$$

где C — величина, которая может зависеть только от области G. Множество фаберовых областей, для которых выполняется (42) при данном значении C, обозначим через $\mathfrak{F}_c$.

Для того чтобы судить о том, насколько широк класс $\mathfrak{F}$, достаточно отметить, что он содержит области Радона без точек заострения, а значит, все выпуклые области и области класса (А) (см., например, [10]).

Для формулировки следующего утверждения потребуется ряд обозначений. Пусть $h \in L(\Gamma)$ и $S[h^*] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h^*)e^{ik\theta}$ — ряд Фурье функции $h^*(\sigma) \overset{\text{df}}{=} h(\Psi(e^{i\sigma}))$, где $c_k(h^*)$ — ее коэффициенты Фурье, а $\Psi(e^{i\sigma}) = \Psi(w)$ — функция, определенная в п.1. Условимся, что и в дальнейшем, если $g \in L(\Gamma)$, то через $g^*(\cdot)$ будем обозначать функцию, определенную на всей действительной оси такую, что $g^*(\theta) = g(\Psi(e^{i\theta}))$, а через $c_k(\varphi)$, как и раньше, — коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L(0, 2\pi)$.

Через $C_0(\Gamma)$ обозначим множество функций $h \in C(\Gamma)$, для которых существует функция $\hat{h} \in C(\Gamma)$ такая, что

$$S\left[\hat{h}\left(\Psi(e^{i\sigma})\right)\right] = S\left[\hat{h}^*\right] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(h^*)e^{ik\sigma}.$$

Лемма 3. *Пусть* $G \in \mathfrak{F}_c$, $\Gamma = \partial G$, $h \in C_0(\Gamma)$ *и*

$$E_{n,\infty}(h;z) = \inf_{c_k^{(n)}(z)} \sup_t \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it}))}{\zeta - z}\,d\zeta - \sum_{k=-n+1}^{n-1} c_k^{(n)}(z)e^{ikt}\right|,$$

где $c_k^{(n)}(z)$ *— произвольные функции переменной* z. *Тогда* $\forall\, z \in G$

$$E_{n,\infty}(h;z) \le CE_n^+(\hat{h}^*), \tag{43}$$

где $E_n^+(\hat{h}^*)$ — *величина наилучшего приближения тригонометрическими полиномами порядка* $n-1$ *вида*

$$P_n(\theta) = \sum_{k=o}^{n-1} a_k e^{ik\theta}$$

функции $\hat{h}^*(\theta)$.

Доказательство. Пусть

$$Ih(z;t) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it}))}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

и

$$R_n(h;z) = \inf_{\gamma_k^{(n)}} \sup_t \left| Ih(z;t) - \sum_{k=-n+1}^{n-1} \gamma_k^{(n)} F_k(z) e^{ikt} \right|, \tag{44}$$

где $F_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — как и раньше, — многочлены Фабера для области G, а $\gamma_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1,$ — произвольные комплексные числа. Тогда, очевидно, $\forall\, z \in G$ будем иметь

$$E_{n,\infty}(h;z) \le R_n(h;z) \tag{45}$$

и, таким образом, остается показать, что величина $R_n(h;z)$ не превышает правой части (43). С этой целью заметим, что $\forall\, z \in G$ и $\forall\, t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$Ih(z;t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\hat{h}(\Psi(\Phi(\zeta)e^{it}))}{\zeta - z}\,d\zeta \overset{\text{df}}{=} I\hat{h}(z;t). \tag{46}$$

Действительно, полагая $\Phi(\zeta) = e^{i\theta}$, имеем

$$Ih(z;t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h\left(\Psi(e^{i(\theta+t)})\right)}{\Psi(e^{i\theta}) - z}\Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h^*(\theta+t)\frac{\Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}}{\Psi(e^{i\theta}) - z}\,d\theta. \tag{47}$$

Таким образом, величина $Ih(z;t)$ представляется сверткой суммируемых функций $h^*(\cdot)$ и

$$K(\theta;z) = \Psi'(e^{i\theta})e^{i\theta}\Big/\left(\Psi(e^{i\theta}) - z\right),\ z \in G.$$

Поэтому, учитывая соотношение (3), находим

$$c_k\left(Ih(z;\cdot)\right) = c_k(h^*)\,c_{-k}\left(K(\cdot\,;z)\right) = \begin{cases} 0, & k = -1, -2, \ldots, \\ c_k(h^*)F_k(z), & k = 0, 1, 2, \ldots\ . \end{cases} \tag{48}$$

Определяя аналогичным образом величины $c_k(I\hat{h}(z;\cdot))$, приходим к выводу, что они также совпадают с правой частью равенства (48), и, таким образом, $\forall\, z \in G$

$$c_k\left(Ih(z;\cdot)\right) = c_k\left(I\hat{h}(z;\cdot)\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$$

Следовательно, ряды Фурье функций $Ih(z;t)$ и $I\hat{h}(z;t)$ $\forall\, z \in G$ совпадают, а поскольку эти функции непрерывны по переменной t, то отсюда заключаем, что они тождественны. Из (46) и (44) следует, что $\forall\, z \in G$

$$R_n(h;z) = \inf_{\gamma_k^{(n)}} \sup_t \left| I\hat{h}(z;t) - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} F_k(z) e^{ikt} \right|. \tag{49}$$

Если функция $g(w)$ аналитическая в круге $|w| < 1$ и на окружности $|w| = 1$

имеет почти всюду угловые предельные значения $\overline{g}(w)$ такие, что функция $\overline{g}(\Phi(\zeta))$, $\zeta \in \Gamma$, суммируема на Γ, т.е.

$$\int_\Gamma \left|\overline{g}\big(\Phi(\zeta)\big)\right| |d\zeta| = \int_{|w|=1} |\overline{g}(w)| |\Psi'(w)| |dw| < \infty,$$

то функцию

$$F_G g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{g}\big(\Phi(\zeta)\big)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G, \tag{50}$$

называют преобразованием Фабера функции $g(w)$ [11, с. 154]. Если $G \in \mathfrak{F}_c$ и $g \in \mathcal{A}(|w| \le 1)$, то вследствие (42) имеем

$$\sup_{z \in G} \left|F_G g(z)\right| \le C \sup_{|w|<1} |g(w)|. \tag{51}$$

Отметим также, что в случае, когда $g(w)$ является многочленом, $g(w) = \sum_{k=0}^n a_k w^k$, то $F_G g(z) = \sum_{k=0}^n a_k F_k(z)$. При каждом фиксированном t $\forall\, w$, $|w| < 1$, положим

$$g_t(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\hat{h}\big(\Psi(\tau e^{it})\big)}{\tau - w} d\tau - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} w^k e^{ikt}.$$

Функция $\hat{h}(\Psi(\cdot))$ имеет те же свойства, что и функция $\hat{h}(\cdot)$ в лемме 2. Поэтому функция

$$I(\hat{h} \circ \Psi)(z; t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\hat{h}\big(\Psi(\tau e^{it})\big)}{\tau - z} d\tau$$

при каждом фиксированном t является непрерывной в замкнутом круге $|z| \le 1$ и аналитической внутри его, причем

$$\lim_{z \to \tau} I(\hat{h} \circ \Psi)(z; t) = \hat{h}\big(\Psi(\tau e^{it})\big), \ |\tau| = 1.$$

Таким образом, функция $g_t(w)$ также является аналитической в круге $|w| < 1$, угловые предельные значения которой на окружности $|w| = 1$ образуют непрерывную функцию

$$\overline{g}_t(w) = \hat{h}\big(\Psi(\tau e^{it})\big) - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} w^k e^{ikt}, \tag{52}$$

т.е. $g_t(w) \in \mathcal{A}(|w| \le 1)$, и поэтому в силу (50) и (46)

$$F_G g_t(z) = I\hat{h}(z; t) - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} F_k(z) e^{ikt}. \tag{53}$$

Значит, согласно (51) и (53) $\forall\, z \in G$ и $\forall\, t \in \mathbb{R}$

$$\left| I\hat{h}(z; t) - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} F_k(z) e^{ikt} \right| \le C \sup_{|w|<1} |g_t(w)| = C \max_{|w|=1} |\overline{g}_t(w)|,$$

откуда, полагая $w = e^{i\sigma}$, с учетом (49) и (52) получаем

$$R_n(h; z) \le C \inf_{\gamma_k^{(n)}} \sup_t \max_\sigma \left| \hat{h}\big(\Psi(e^{i(\sigma+t)})\big) - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k^{(n)} e^{ik(\sigma+t)} \right| \le E_n^+(\hat{h}^*). \tag{54}$$

Оценка (43) является следствием неравенств (54) и (45).

В качестве следствий из теорем 2, 3 и 3′ и леммы 3 получаем следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $G \in \mathfrak{F}_c$, $\Gamma = \partial G$ *и* $a = a(n)$ — *произвольная последовательность, для которой* $a(n) \geq a_0 > 0$. *Тогда если* $f \in L^{\psi}_{\beta} C_0(\Gamma)$, $\psi \in F_0$, *то* $\forall z \in G$ *и* $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\left|\rho_n(f; z)\right| \leq \frac{4C}{\pi^2}\left[\psi(n)\ln^+\frac{n}{a(n)} + O\big(\psi(n) + P_n(a; \psi) + R_n(a; \psi)\big)\right] E_n^+(\hat{g}^{\psi}_{\beta}),$$

где величины $P_n(a; \psi)$ *и* $R_n(a; \psi)$ *имеют тот же смысл, что и в теореме* 2, *и* $\hat{g}^{\psi}_{\beta}(t) = \hat{f}^{\psi}_{\beta}\left(\Psi(e^{it})\right)$.

Теорема 5. *Пусть* $G \in \mathfrak{F}_c$ *и* $\Gamma = \partial G$. *Тогда если* $f \in L^{\psi}_{\beta} C_0(\Gamma)$ *и* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, *то* $\forall z \in G$ *и* $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$\left|\rho_n(f; z)\right| \leq \frac{4C}{\pi^2}\psi(n)\left[\ln^+(\eta(n) - n) + O(1)\right] E_n^+(\hat{g}^{\psi}_{\beta}).$$

Если же $f \in L^{\psi}_0 C_0(\Gamma)$ *и* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$\left|\rho_n(f; z)\right| \leq \frac{4C}{\pi^2}\psi(n)\left[\ln n + O(1)\right] \; E_n^+(\hat{g}^{\psi}_0),$$

где $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные по* n, β, $f(\cdot)$ *и* $z \in G$, *а* $\hat{g}^{\psi}_{\beta}(t) = \hat{f}^{\psi}_{\beta}\left(\Psi(e^{it})\right)$.

Замечание. Легко видеть, что множество $C_0(\Gamma)$ совпадает с множеством функций $h(\cdot) \in C(\Gamma)$ таких, что функции $\tilde{h}^*(\theta)$ — тригонометрически сопряженные к $h^*(\theta)$, — непрерывны на $\mathbb{R}$. При этом $\hat{h}^*(\theta) = c_0(h^*)/2 + (h^*(\theta) + i\tilde{h}^*(\theta))/2$.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.– Киев, 1983.– 57 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.– Киев, 1983.– 57 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.69).
3. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.– Докл. АН УССР.– 1984.– **277**, №5.– С. 1074–1077.
4. *Степанец А. И.* Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси // Укр. мат. журн.– 1988.– **40**, №2.– С. 198–209.
5. *Степанец А. И.* Приближение целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.– Киев, 1988.– С. 3–47.– (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
6. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.– М.: Наука, 1977.– 512 с.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.– Киев: Наук. думка, 1987.– 268 с.
8. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)–дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.– 1989.– **41**, №4.– С. 499–510.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2–х т.– М.: Мир, 1965.– Т.1.– 615 с.
10. *Дынькин Е. М.* О равномерном приближении функций в жордановых областях // Сиб. мат. журн.– 1977.– **18**, №4.– С. 775–786.
11. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера.– М.: Наука, 1964.– 336 с.

Получено 29.07.91