УДК 519.1

В. В. Строк, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ЦИРКУЛЯНТНЫЕ МАТРИЦЫ И СПЕКТРЫ ГРАФОВ ДЕ БРЕЙНА

Изучается блочное строение k–циркулянтных матриц A порядка n ($k \geq 2$, $k \mid n$) и доказаны утверждения, позволяющие ряд задач с матрицами $A + A^T$ сводить к аналогичным задачам с матрицами меньшего порядка — блоками матриц A и A^T. Получен спектр и число остовных деревьев неориентированного графа де Брейна.

Вивчається блочна структура k–циркулянтних матриць A порядку n ($k \geq 2$, $k \mid n$) та доведено твердження, що дозволяють ряд задач з матрицями $A + A^T$ зводити до аналогічних задач з матрицями меншого порядку — блоками матриць A і A^T. Одержано спектр та число фактор-дерев неорієнтованого графа де Брьойна.

1. Введение. В данной статье исследуются особенности блочного строения k–циркулянтных матриц и свойства их блоков с целью нахождения собственных значений разреженных матриц с фиксированным расположением нулевых элементов, в частности, матриц смежности графов комбинаторных последовательностей. Полученные результаты позволили вычислить спектр и установить число остовных деревьев неориентированных графов де Брейна и могут быть использованы для анализа теоретико–графовых моделей, связанных с разработкой эффективных алгоритмов. Наиболее полно результаты о циркулянтных матрицах (k-циркулянтах) изложены в работах [1, 2].

2. Основные определения и обозначения. В статье используются алгебраические свойства вещественных k–циркулянтных матриц (k–циркулянтов) – матриц, у которых каждая строка (кроме первой) получается из предыдущей в результате циклического сдвига на k столбцов. Орграфом де Брейна $\vec{G}_{k,n} = (V, \vec{E})$ [3] на $|V| = k^n$ вершинах называется помеченный орграф, у которого каждая вершина представлена n-кой над алфавитом $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ и дуга $\overrightarrow{v_i v_j} \in \vec{E}$ направлена из вершины $v_i = (b_1, \ldots, b_n)$ в вершину $v_j = (c_1, \ldots, c_n)$ тогда и только тогда, когда $b_{i+1} = c_i$, $i = \overline{1, n-1}$.

Пусть $A = [a_{ij}]$ — k–циркулянтная $(0, 1)$–матрица порядка k^n, $k > 1$, первая вектор–строка которой $(a_1, a_2, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$. Связь между элементами a_{ij} i–й строки и элементами предыдущей строки такова: $a_{ij} = a_{i-1, j-k}$ (mod k^n). Легко установить, что матрица A является матрицей смежности орграфа $\vec{G}_{k,n}$ (см., например, [4]). Матрицу $A = A(\vec{G}_{k,n})$ представим в следующем, удобном для дальнейших преобразований, виде:

$$A(\vec{G}_{k,n}) = (D_1, D_2, \ldots, D_k)^T, D_i = D, i = \overline{1, k}, \tag{1}$$

где

$$D = \sum_{q=1}^{m}{}^{\bullet} e_q = \mathrm{diag}(e_1, e_2, \ldots, e_m)$$

— $(k^{n-1} \times k^n)$-матрица, являющаяся прямой суммой вектор-строк $e_q = (b_1, \ldots, b_k) = (1, \ldots, 1)$, $m = k^{n-1}$.

Неориентированным графом де Брейна $G_{k,n}$ порядка k^n называется граф, матрица смежности которого $A(G_{k,n}) = A + A^T$, где $A = A(\vec{G}_{k,n})$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями для операций над матрицами: $A \otimes B$ и $A \dot{+} B$ – соответственно прямое произведение и прямая сумма матриц; $I_{(i)+c(j)}(I^{(i)+c(j)})$ — прибавление j-й строки (столбца), умноженной на c, к i-й строке (столбцу). Множество всех матриц порядка r обозначается через M_r. Матрицы $A, B \in M_r$ называются эквивалентными ($A \sim \sim B$), если существуют такие невырожденные матрицы $P, Q \in M_r$, что $B = PAQ$. Используемые обозначения и определения можно найти, например, в [5].

3. Блочное строение k-циркулянтов и эквивалентность. Представим произвольный k-циркулянт A порядка n ($k \ge 2$, $k \mid n$) в блочном виде $A = (D_1, \dots, D_k)$, где $D_i = D = (A_1, \dots, A_k)$, $A_j \in M_{n/k}$, $i, j = \overline{1, k}$. Тогда матрица $\mathcal{A} = A + A^T$ примет блочную форму

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 + A_1^T & A_2 + A_1^T & \dots & A_k + A_1^T \\ A_1 + A_2^T & A_2 + A_2^T & \dots & A_k + A_2^T \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ A_1 + A_k^T & A_2 + A_k^T & \dots & A_k + A_k^T \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Ряд свойств циркулянтов описывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть произвольный k-циркулянт A порядка n ($k \ge 2$, $k \mid n$) с первой вектор-строкой $(a_1, \dots, a_n)$ разбит на блоки $A_{ij} = A_j$ порядка n/k, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le k$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1^0 *Любой блок $C_{r,v}$ матрицы $\mathfrak{B} = AA^T$, $1 \le r \le k$, $1 \le v \le k$, является симметричной матрицей $\mathfrak{C} = \sum A_j A_j^T = [c_{l,m}]$ порядка n/k, у которой (l, m)-элемент задается формулой*

$$c_{l,m} = \sum_{s=1}^{n} a_{n-(l-1)k+s} a_{n-(m-1)k+s}.$$

2^0 *Матрица $\hat{A} = \sum A_j$ является q-циркулянтом порядка n/k с первой вектор-строкой $(b_1, \dots, b_{n/k})$, где $q \equiv k \pmod{n/k}$, $b_i = \sum_{s=0}^{k-1} a_{i+sn/k}$, $i = \overline{1, n/k}$ (индексы приведены к наименьшим положительным остаткам по* mod n*).*

Доказательство. Блочная форма (2) матрицы A такова, что для получения формул, определяющих элементы матриц $\mathfrak{C}$ и $\hat{A}$, достаточно выполнить указанные произведение и суммирование соответствующих блоков. Из характера суммирования блоков A_j (построчное суммирование элементов циркулянта A с шагом n/k) усматривается, что $\hat{A}$ является некоторым q-циркулянтом. Для определения q рассмотрим первые вектор-строки $(a_1, \dots, a_n)$ и $(b_1, \dots, b_{n/k})$ матриц A и $\hat{A}$, соответственно. В предположении, что $\hat{A}$ — q-циркулянт, для элемента $b_{2,q+1}$ второй вектор-строки матрицы $\hat{A}$ справедливо равенство $b_{2,q+1} = b_1$. Заметим, что элемент $a_1 \in (a_1, \dots, a_n)$ является слагаемым как в $b_1 \in (b_1, \dots, b_{n/k})$, так и в $b_{2,q+1}$. Поскольку A —

k–циркулянт, то $a_1 = a_{2,\,k+1}$. С другой стороны, элемент $a_{2,\,k+1}$, находясь во второй строке блока A_r, $r =]k(k+1)/n[$, будет занимать в нем позицию $(2, j^*)$, $j^* \equiv (k+1) (\mathrm{mod}\ n/k)$, являясь также слагаемым для элемента $b_{2,\,q+1}$, т.е. $b_{2,\,q+1} = b_{2,\,j^*}$ и, следовательно, $q \equiv k (\mathrm{mod}\ n/k)$, что и требовалось доказать.

Введем теперь квадратную λ-матрицу порядка k $C(\alpha_0, \beta_0) = \beta_0 J + (\alpha_0 - \beta_0) I$, где α_0 и β_0 – многочлены от λ $(\alpha_0 \neq \beta_0)$, I — единичная матрица, J — матрица, все элементы которой равны 1. Попытаемся привести характеристическую матрицу для матрицы $\mathcal{A}$ к более простому виду.

Теорема 2. *Если A — k-циркулянт порядка n $(k \geq 2,\ k \mid n)$ и $\mathcal{A} = A + A^T$ — матрица блочного порядка k с блоками порядка n/k, то матрица $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0) = C(\alpha_0, \beta_0) \otimes I_{n/k} - \mathcal{A}$ эквивалентна матрице*

$$B(\alpha_1, \beta_1) = \beta_1^{-1}\, k I_{k-1} \otimes I_{n/k} \dotplus [\alpha_1 I_{n/k} + \beta_1 (k^{-1} \mathfrak{B} - \mathfrak{C}) - \hat{\mathcal{A}}],$$

где

$$\alpha_1 = \alpha_0 + (k-1)\beta_0,\ \ \beta_1 = k/(\alpha_0 - \beta_0),\ \hat{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^{k} A_j + \sum_{j=1}^{k} A_j^T,$$

$$\mathfrak{C} = \sum_{j=1}^{k} A_j A_j^T,\ \ \mathfrak{B} = \sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{j=1}^{l} A_j^T.$$

Доказательство. Рассмотрим следующие наборы элементарных преобразований матриц блочного порядка k с блоками порядка n/k:

$$a)\ \{I_{(i)-(k)}\},\ i = \overline{1, k-1};\quad b)\ \{I^{(i)-(k)}\},\ i = \overline{1, k-1};$$

$$c)\ \{I^{(i)-(1)}\},\ i = \overline{2, k-1};\quad d)\ \{I^{(1)-(i)}\},\ i = \overline{2, k-1};$$

$$e)\ \{I^{(i)+(1)/k}\},\ i = \overline{2, k};\quad f)\ \{I^{(k)+(i)}\},\ i = \overline{2, k-1};$$

$$g)\ \{I_{(k)+(i)/k}\},\ i = \overline{1, k-1};\ h)\ \{I^{(k)-(i)^*}\},\ i = \overline{1, k-1},$$

где $(i)^* = ((i)/(\alpha_0 - \beta_0)(\delta_{1i}(k-1)+1))(A_k^T - A_i^T)$, а δ_{1i} — символ Кронекера. Легко видеть, что с этими преобразованиями совпадают операции, получаемые с помощью соответствующих левых блочно элементарных матриц

$$E_a = \begin{bmatrix} I & & & -I \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \dots \\ 0 & & I & -I \\ O\ \dots & & O & I \end{bmatrix},\ E_g = \begin{bmatrix} I & & & O \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \dots \\ 0 & & I & O \\ k^{-1}I\ \dots & & k^{-1}I & I \end{bmatrix}$$

и правых блочно элементарных матриц

$$E_b = \begin{bmatrix} I & & & O \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \dots \\ 0 & & I & O \\ -I & \dots & -I & I \end{bmatrix}, \quad E_c = \begin{bmatrix} I & -I & \dots & -I & O \\ O & I & & 0 & \\ \dots & & \ddots & & \\ & 0 & & & \\ O & & & & I \end{bmatrix},$$

$$E_d = \begin{bmatrix} I & O & \dots & O \\ -I & I & 0 & \\ \dots & & \ddots & \\ -I & 0 & & \\ O & & & I \end{bmatrix}, \quad E_e = \begin{bmatrix} I & k^{-1}I & \dots & k^{-1}I \\ O & I & 0 & \\ \dots & & \ddots & \\ & 0 & & \\ O & & & I \end{bmatrix},$$

$$E_f = \begin{bmatrix} I & & & O \\ & & 0 & I \\ & \ddots & & \dots \\ 0 & & I & I \\ O & \dots & O & I \end{bmatrix}, \quad E_h = \begin{bmatrix} I & & & -(\gamma k)^{-1}(A_k^T - A_1^T) \\ & I & 0 & -\gamma^{-1}(A_k^T - A_2^T) \\ & \ddots & & \dots\dots\dots\dots \\ 0 & & I & -\gamma^{-1}(A_k^T - A_{k-1}^T) \\ O & \dots & O & I \end{bmatrix},$$

где $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$. Реализуя указанные преобразования, найдем матрицу $P\mathcal{A}Q$, где $P = E_g E_a$, $Q = E_b E_c E_d E_e E_f E_h$. Как несложно вычислить,

$$P = \begin{bmatrix} I & & & -I \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \dots \\ 0 & & I & -I \\ k^{-1}I & & \dots & k^{-1}I \end{bmatrix},$$

$$kQ = \begin{bmatrix} k(k-1)I & -I & -I & \cdots & -I & \gamma^{-1}(kA_1^T - A^T(\gamma)) \\ -kI & (k-1)I & -I & \cdots & -I & \gamma^{-1}(kA_2^T - A^T(\gamma)) \\ -kI & -I & (k-1)I & \cdots & -I & \gamma^{-1}(kA_3^T - A^T(\gamma)) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ -kI & -I & -I & \cdots & (k-1)I & \gamma^{-1}(kA_{k-1}^T - A^T(\gamma)) \\ -kI & -I & -I & \cdots & -I & \gamma^{-1}(kA_k^T - A^T(\gamma)) \end{bmatrix},$$

где $A^T(\gamma) = \hat{A}^T - \gamma I$, $\hat{A}^T = \sum_{j=1}^{k} A_j^T$, $\hat{A}^T \in M_{n/k}$.

Тогда

$$P\mathcal{A}Q = \begin{bmatrix} H_1 & H_1 & \dots & H_1 \\ H_2 & H_2 & \dots & H_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ H_{k-1} & H_{k-1} & \dots & H_{k-1} \\ A_1 + k^{-1}\hat{A}^T & A_2 + k^{-1}\hat{A}^T & \dots & A_k + k^{-1}\hat{A}^T \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} O & \mathcal{H} \\ W & H \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

где $\mathcal{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_{k-1})^T$, $W = (kA_1 - \hat{A}, A_2 - k^{-1}\hat{A}, \ldots, A_{k-1} - k^{-1}\hat{A})$, $O \in M_{n-n/k}$, $\mathcal{H} \in M_{(n-n/k)\times(n/k)}$, $W \in M_{(n/k)\times(n-n/k)}$, а $H = \gamma^{-1}\left(\sum A_j A_j^T - k^{-1}\hat{A}\hat{A}^T\right) + k^{-1}(\hat{A} + \hat{A}^T)$; при этом

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{k} A_j,\ H_i = A_i^T - A_k^T,\ i = \overline{1, k-1},\ H \in M_{n/k}.$$

Далее,

$$P(C(\alpha_0, \beta_0) \otimes I_{n/k})Q =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma I & & & -\gamma I \\ & & 0 & \\ & \ddots & & \ldots \\ 0 & & \gamma I & -\gamma I \\ F & \ldots & F & F \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} k\gamma I & & & H_1 \\ & \gamma I & 0 & H_2 \\ & & \ddots & \ldots \\ & 0 & \gamma I & H_{k-1} \\ & O & & F \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где $F = k^{-1}(\alpha_0 + (k-1)\beta_0)I$, $F \in M_{n/k}$. Объединяя (4) и (5), получаем матрицу

$$B(\lambda) = P\{C(\alpha_0, \beta_0) \otimes I_{n/k} - \mathcal{A}\}Q = \begin{bmatrix} k\gamma I & & & \\ & \gamma I & 0 & O \\ & & \ddots & \ldots \\ & 0 & \gamma I & \\ & -W & & \hat{H} \end{bmatrix} \tag{6}$$

где $\hat{H} = F - H$, $H \in M_{n/k}$. После сокращения общих множителей (k и k^{-1} соответственно в верхней и нижней блочных строках) и исключения ненулевых элементов в нижней левой блочной строке матрица (6) приобретает вид $B(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_0 - \beta_0)I \dotplus L$, где

$$L = (\alpha_0 + (k-1)\beta_0)I_2 + \gamma^{-1}(\hat{A}\hat{A}^T - k\sum_{j=1}^{k} A_j A_j^T) - \hat{\mathcal{A}}, \tag{7}$$

при этом $\hat{\mathcal{A}} \doteq \hat{A} + \hat{A}^T$, $I_1 \in M_{(k-1)n/k}$, $I_2, A_j, \hat{A} \in M_{n/k}$. Путем несложных видоизменений выражения (7) получаем утверждение теоремы 2. Матрицы $\hat{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ вычисляются по формулам теоремы 1.

Следствие 1. *В случае матрицы смежности графа де Брейна* $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_{k,n})$ *порядка* k^n *матрица* $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0)$ *эквивалентна матрице*

$$B(\alpha_1, \beta_1) = \gamma I \dotplus \mathcal{A}(\alpha_1, \beta_1),$$

где $\mathcal{A}(\alpha_1, \beta_1) = C(\alpha_1, \beta_1) \otimes I_{k^{n-2}} - \mathcal{A}(G_{k,n-1})$, $\gamma = \alpha_0 - \beta_0$, $\alpha_1 = \alpha_0 - (k-1)(\beta_1 - \beta_0)$, $\beta_1 = k\gamma^{-1}$, $I \in M_{(k-1)k^{n-1}}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}(G_{k,n})$ — матрица смежности графа $G_{k,n}$ порядка k^n. Блоки $A_i \in M_{k^{n-1}}$, входящие в блочную вектор-строку $D = (A_1, \ldots, A_k)$ матрицы $A(\vec{G}_{k,n})$, представим в блочной форме $A_i = (D_1^{(i)}, \ldots, D_k^{(i)})^T$. Здесь блок $D_i^{(i)} = D = \dot{\sum}_{q=1}^{m} e_q \dotplus O$, $m = k^{n-2}$ (см. (1)), а остальные блоки —

нулевые матрицы. Поэтому матрица $\hat{A} = \sum_{j=1}^{k} A_j = (D_1^{(1)}, \dots, D_k^{(k)})^T = (D, \dots, D)^T = A(\vec{G}_{k,n-1})$, $D \in M_{k^{n-2} \times k^{n-1}}$; следовательно, $\mathcal{A} = \hat{A} + \hat{A}^T = \mathcal{A}(G_{k,\, n-1})$ является матрицей смежности графа де Брейна порядка k^{n-1}. Нетрудно убедиться, что теперь матрица $\mathfrak{C} = kI_2$ (см. теорему 2), а $\mathfrak{B} = \hat{A}\hat{A}^T = kJ \otimes I_3$ ($J \in M_k$, $I_2 \in M_{k^{n-1}}$, $I_3 \in M_{k^{n-2}}$). Подставляя полученные выражения в (7), имеем

$$L = ((\alpha_1 - \beta_1)I + \beta_1 J) \otimes I_3 - \mathcal{A}(G_{k,\, n-1}),$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 + (k-1)\beta_0 - k(k-1)(\alpha_0 - \beta_0)^{-1} = \alpha_0 - (k-1)(\beta_1 - \beta_0)$, $\beta_1 = k(\alpha_0 - \beta_0)^{-1}$, $I, J \in M_k$. Легко видеть, что $(\alpha_1 - \beta_1)I + \beta_1 J = C(\alpha_1, \beta_1)$, и следовательно, $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0) \sim B(\alpha_1, \beta_1)$, что и требовалось доказать.

4. Спектры графов де Брейна. Прежде, чем перейти к нахождению собственных значений матрицы смежности графа $G_{k,\, n}$, докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *В условиях следствия* 1 *многочлен* $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = \det \mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0)$ *представим в виде*

$$P_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\alpha_0 + (k-1)\beta_0 - 2k) \prod_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i)^{(k-1)k^{n-1-i}} \tag{8}$$

где $\alpha_i = \alpha_{i-1} - (k-1)(\beta_i - \beta_{i-1})$, $\beta_i = k/(\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})$, $i = \overline{1, n-1}$.

Доказательство. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_{k,\, n})$, то в результате последовательного применения теоремы 2 к матрицам $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0)$, $\mathcal{A}(\alpha_1, \beta_1)$, $\dots$, $\mathcal{A}(\alpha_{n-2}, \beta_{n-2})$ на $(n-1)$-м шаге матрица $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0)$ будет иметь вид

$$B(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-2}{}^{\bullet} (\alpha_j - \beta_j) I_j \dotplus \mathcal{A}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}),$$

где I_j — единичная матрица порядка $(k-1)k^{n-1-j}$, а $\mathcal{A}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = C(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) - \mathcal{A}(G_{k,\, 1})$. Так как $\mathcal{A}(G_{k,1}) = 2J$, $J \in M_k$, то $\det \mathcal{A}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) = \alpha_{n-1} + (k-1)\beta_{n-1} - 2k$. Но так как $\alpha_{n-1} + (k-1)\beta_{n-1} = \alpha_{n-2} + (k-1)\beta_{n-2} = \dots = \alpha_0 + (k-1)\beta_0$, что усматривается из рекуррентных соотношений для α_j и β_j, то отсюда получаем (8).

Легко видеть, что каждой разности $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, $i = \overline{1, n-1}$, соответствует непрерывная дробь [6] $b_0 + K_{j=1}^{i}(a_j / b_j)$, где $b_0 = b_j = \alpha_0 + (k-1)\beta_0$ $(j = \overline{1, i-1})$, $b_i = \alpha_0 - \beta_0$, $a_j = -k^2$, $j = \overline{1, i}$. Поэтому в дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Если* S_n, R_n *и* f_n *— соответственно* n*-е числитель, знаменатель и подходящая дробь непрерывной дроби* $b_0 + K(a_j / b_j)$, *где* $a_j = -a$, $a \in N$, $b_0 = b_j = \lambda$ *— действительная переменная, то* $S_n = S_n(\lambda, a)$ *и* $R_n = R_n(\lambda, a)$ *являются многочленами по* λ *вида*

$$S_n(\lambda, a) = R_{n+1}(\lambda, a) = a^{(n+1)/2} U_{n+1}(\lambda / 2\sqrt{a}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n+1-i}{i}a^i\lambda^{n+1-2i}, \tag{9}$$

а

$$f_n = f_n(\lambda, a) = \sqrt{a}\,U_{n+1}(\lambda/2\sqrt{a})\,/\,U_n(\lambda/2\sqrt{a}), \tag{10}$$

где $U_n(x)$ *— многочлен Чебышева второго рода* ($m = [(n+1)/2]$).

Доказательство. В условиях леммы система разностных уравнений, из которой определяются S_n и R_n непрерывной дроби $\lambda + K(-a/\lambda)$, имеет вид

$$S_n(\lambda, a) = \lambda S_{n-1}(\lambda, a) - aS_{n-2}(\lambda, a),\ n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$R_n(\lambda, a) = \lambda R_{n-1}(\lambda, a) - aR_{n-2}(\lambda, a),\ n = 1, 2, 3, \dots, \tag{11}$$

с начальными условиями $S_0(\lambda, a) = \lambda$, $S_{-1}(\lambda, a) = 1$, $R_0(\lambda, a) = 1$, $R_{-1}(\lambda, a) = 0$. Легко видеть, что $R_n(\lambda, a) = S_{n-1}(\lambda, a)$ и вычисление подходящей дроби $f_n(\lambda, a)$ связано с решением однородного разностного уравнения (11), общее решение которого имеет вид

$$S_n(\lambda, a) = d_1x_1^n + d_2x_2^n, \tag{12}$$

где x_1, x_2 — корни характеристического уравнения $x^2 - \lambda x + a = 0$ для разностного уравнения (11): $x_1 = \sqrt{a}(\nu + \sqrt{\nu^2-1})$, $x_2 = \sqrt{a}(\nu - \sqrt{\nu^2-1})$, $\nu = \lambda/2\sqrt{a}$, при этом $\nu \neq \pm 1$, так как $x_1 \neq x_2$; d_1 и d_2 определяются из (12): $d_1 + d_2 = \lambda$, $d_1x_1 + d_2x_2 = \lambda^2 - a$. Находим $d_1 = \sqrt{a}(\nu + \gamma)$, $d_2 = \sqrt{a}(\nu - \gamma)$, где $\gamma = (2\nu^2 - 1) \times (2\sqrt{\nu^2-1})^{-1}$. Отсюда следует

$$S_n(\lambda, a) = a^{(n+1)/2}\{(\nu+\gamma)(\nu + \sqrt{\nu^2-1})^n + (\nu-\gamma)(\nu - \sqrt{\nu^2-1})^n\} =$$

$$= a^{(n+1)/2}\frac{\left(\nu + \sqrt{\nu^2-1}\right)^{n+2} - \left(\nu - \sqrt{\nu^2-1}\right)^{n+2}}{2\sqrt{\nu^2-1}} = a^{(n+1)/2}U_{n+1}(\lambda/2\sqrt{a}),$$

где

$$U_{n+1}(\nu) = \cancel{\boxed{\textstyle\sum_{j=1}^{k} A_j = (D_1^{(1)}, \dots, D_k^{(k)})^T}} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{n+1-i}{i}(2\nu)^{n+1-2i}$$

— многочлен Чебышева второго рода [7]. Лемма доказана.

Заметим, что корни многочлена $S_n(\lambda, a)$ определяются выражением $\lambda_i = 2\sqrt{a}\cos i\pi/(n+1)$, $i = \overline{1,n}$, поскольку он тождественно совпадает с многочленом $U_{n+1}(\lambda/2\sqrt{a})$.

Теорема 3. *Характеристический многочлен неориентированного графа де Брейна* $G = G_{k,n}$ *может быть факторизован в виде*

$$P_G(\lambda) = k^h(\lambda - 2k)\,U_n^{k-1}(\lambda/2k)\prod_{i=1}^{n-1}\{k^iU_i(\lambda/2k)\}^{(k-1)^2k^{n-1-i}} \tag{13}$$

где $U_i(x)$ *— многочлены Чебышева второго рода*, $h = n(k-1)$.

Доказательство. Рассмотрим простейший случай матрицы C, когда $\alpha_0 = \lambda$, $\beta_0 = 0$. Тогда при $A = A(\vec{G}_{k,n})$ матрица $\mathcal{A}(\alpha_0, \beta_0) = \mathcal{A}(\lambda) = \lambda I - \mathcal{A}(G_{k,n})$

и, следовательно, $P_{\mathcal{A}}(\lambda) = P_G(\lambda)$ — характеристический многочлен графа $G_{k,n}$. В данном случае $\alpha_i + (k-1)\beta_i = \alpha_{i-1} + (k-1)\beta_{i-1} = \ldots = \alpha_0 + (k-1)\beta_0 = \lambda$ и разность $\alpha_i - \beta_i = \alpha_{i-1} + (k-1)\beta_{i-1} - k^2/(\alpha_{i-1} - \beta_{i-1})$ можно представить в виде i-й подходящей дроби $f_i(\lambda, a)$ непрерывной дроби $\lambda + K(-a/\lambda)$, где $a = k^2$. Тогда на основании леммы 2 находим $f_i(\lambda, k^2) = k\,U_{i+1}(\lambda/2k)/U_i(\lambda/2k)$. При подстановке полученных выражений в (8) получаем

$$P_G(\lambda) = (\lambda - 2k)\prod_{i=0}^{n-1}\{k\,U_{i+1}(\lambda/2k)\big/U_i(\lambda/2k)\}^{(k-1)k^{n-1-i}}$$

откуда следует (13).

Из леммы 2 и теоремы 3 легко вывести следующее утверждение.

Следствие 2. *Спектром графа* $G_{k,n}$ *является*

$$\mathrm{Sp}G_{k,n} = \begin{bmatrix} 2k, & \left\{2k\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right\}_{i=\overline{1,n}}, & \left\{2k\cos\dfrac{i\pi}{j+1}\right\}_{j=\overline{1,n-1}}^{i=\overline{1,j}} \\ 1, & k-1, & (k-1)^2k^{n-1-j} \end{bmatrix}.$$

Теорема 4. *Пусть* $G_{k,n}$ *— граф де Брейна и* $t(G_{k,n})$ *означает число остовных деревьев, содержащихся в* $G_{k,n}$. *Тогда*

$$t(G_{k,n}) = (n+1)^{k-1}\prod_{i=1}^{n-1}\{k^i(i+1)\}^{(k-1)^2k^{n-1-i}} \cdot k^{n(k-2)}. \tag{14}$$

Доказательство. Для любого регулярного мультиграфа G степени r $t(G) = m^{-1}\prod_{i=2}^{m}(r - \lambda_i) = m^{-1}P'_G(r)$, где λ_i — собственные значения мультиграфа G, m — его порядок (известное утверждение Хученройтера [5]). Для графа $G_{k,n}$ $r = 2k$, $m = k^n$. Тогда, используя теорему 3, имеем

$$P'_G(2k) = k^{n}U_n^{k-1}(1)\prod_{i=1}^{n-1}\{k^iU_i(1)\}^{(k-1)^2k^{n-1-i}}, \tag{15}$$

где $U_i(1)$ — сумма коэффициентов многочлена Чебышева второго рода $U_i(x)$, $i = \overline{1,n}$. Подставляя (15) в приведенное выше выражение для $t(G)$ и принимая во внимание тот факт, что $U_i(1) = i + 1$ (см., например, [7]), получаем выражение (14).

5. Приложения и замечания. В заключение укажем на возможность использования найденного подхода для получения характеристических многочленов и спектров некоторых специальных классов графов. Пусть $\hat{T}_{k,n}$ — корневое дерево высоты n с q петлями у корня, при этом корневая вершина имеет степень h (без учета петель) и все h вершин, смежных с корневой, являются корнями полных k-нарных деревьев высоты $n-1$. Нетрудно убедиться, что матрицей смежности дерева $\hat{T}_{k,n}$ является квадратная матрица порядка $1 + h(k^n - 1)/(k-1)$ вида

$$\mathcal{A}(\hat{T}_{k,n}) = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\mathcal{A}(\hat{T}_{k,n-1})} & \begin{matrix} O_2 \\ D \end{matrix} \\ \hline O_2^T & D^T & O_1 \end{array}\right],$$

где D — $(hk^{n-2} \times hk^{n-1})$-матрица вида (1); O_1 и O_2 — нулевые матрицы с размерами соответственно $hk^{n-2} \times hk^{n-1}$ и $(1 + h(k^{n-2} - 1)/(k-1)) \times hk^{n-1}$. Представим в блочно диагональном виде матрицу $\lambda I = \lambda \dot{+} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda I_{hk^i}$, что соответствует блочному разбиению матрицы $\mathcal{A}(\hat{T}_{k,n})$. В результате последовательного исключения элементов (ненулевых) в подматрицах $D^{(i)}$ матриц $\lambda I - \mathcal{A}(\hat{T}_{k,n-i})$, $i=\overline{0, n-1}$ $(D^{(0)} = D)$, получаем, что

$$\{\lambda I - \mathcal{A}(\hat{T}_{k,n})\} \sim \{(\lambda - 2g - hf_{n-1}^{-1}(\lambda, k)) \dot{+} \sum_{i=0}^{n-1}{}^{\bullet} f_{n-1-i}(\lambda, k) I_{hk^i}\},$$

где $f_{n-1-i}(\lambda, k) = \lambda + \mathop{K}\limits_{j=1}^{n-1-i} (-a_j / \lambda), a_j = k, f_0 = \lambda$. Тогда на основании леммы 2 характеристический многочлен дерева может быть факторизован в виде

$$P_{\hat{T}}(\lambda) = k^{(n-1)/2} h\{h^{-1}\sqrt{k}(\lambda - 2g)U_n(\lambda / 2\sqrt{k}) - U_{n-1}(\lambda / 2\sqrt{k})\} \times$$

$$\times \{k^{n/2}U_n(\lambda / 2\sqrt{k})\}^{h-1} \left[\prod_{i=1}^{n-1} \{k^{i/2}U_i(\lambda / 2\sqrt{k})\}^{q_i}\right]^{h(k-1)}, \qquad (16)$$

где $U_i(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, $q = k^{n-1-i}$.

При $g = 0$, $h = k$ из (16) получаем соотношение для характеристического многочлена полного высоты n k-нарного дерева

$$P_T(\lambda) = k^{(n+1)/2} U_{n+1}(\lambda / 2\sqrt{k}) \prod_{i=1}^{n} \{k^{i/2}U_i(\lambda / 2\sqrt{k})\}^{(k-1)k^{n-i}},$$

откуда следует полученный ранее в [8, 9] его спектр. При $g = 0$, $h = k = 1$ из (16) следует известное [5] выражение для характеристического многочлена простой цепи порядка $n + 1$. В случае $g = 1$, $h = k - 1$ из (16) получаем соотношение для характеристического многочлена остовных деревьев с петлей у корня графа де Брейна [10]. Указанные деревья обладают тем замечательным свойством, что их прямая сумма по ребрам является представлением графа $G_{k,n}$ [10]. Спектр графа де Брейна $G_{2,n}$ получен ранее в работе [11].

1. *Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е.* Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. – М.: Наука, 1987.– 320 с.
2. *Ablow C.M., Brenner J.L.* Roots and canonical forms for circulant matrices // Trans. Amer. Math. Soc.– 1963.– **107**, N 2.– P. 360–376.
3. *Де Брейн Н. Г.* Одна комбинаторная задача // Киберн. сб. – 1969.–Вып. 6.– С.33–40.
4. *Кратко М. И., Строк В. В.* Последовательности де Брейна с ограничениями // Вопросы кибернетики. Комбинаторный анализ и теория графов.–М.: Наука, 1980.–С.80–84.
5. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и применение.– Киев: Наук. думка, 1984.–384 с.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби.– М.: Мир, 1985.–416 с.
7. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества.– М.: Мир, 1982.–256 с.
8. *Gutman I.* Characteristic and matching polynomials of some compound graphs // Publ. Inst. Math.– 1980.– **27**.– P. 61–66.
9. *Raut G.* Spectrul arborilor *k*-ary completi // Studii si cercetari matematice.– 1983.– **35**, N 3.– P. 183–188.
10. *Хоменко Н. П., Строк В. В.* –*T*-факторизация 𝔊𝔅–графов // Теория графов.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977.–С.135–142.
11. *Strok V., Yaworski E.* Spectrum of the binary de Bruijn graph // XVII Yugoslav. Symp. Oper. Res. (Dubrovnik–Kupari; 9-12.10.1990).– Beograd: Naučna Knjiga, 1990.– P. 165–168.

Получено 13.12.91