УДК 534.1

Ю. В. Теплинский, канд. физ.-мат. наук, **В. Е. Лучик**, инж.(Каменец-Подол. пед. ин-т)

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Для нелинейных дифференциальных систем с импульсным воздействием в пространстве ограниенных последовательностей предлагается модификация численно-аналитического метода А. М. Самойленко. Для линейной системы уравнений эта модификация позволяет в некоторых случаях решать периодическую задачу управления с наперед заданной точностью.

Для нелінійних диференціальних систем з імпульсною дією в просторі обмежених послідовностей пропонується модифікація чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка. Для лінійної системи рівнянь ця модифікація дає можливість у деяких випадках розв'язати періодичну задачу керування з наперед указаною точністю.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсами

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) \quad \text{при} \quad t \neq t_i, \quad \Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots)$ принадлежит пространству $\mathfrak{M}$ ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|x\| = \sup\{|x_1|, |x_2| \dots\}$, $f(t, x)$ и $H_i(t_i, x)$ — счетномерные непрерывные и периодические по t с периодом T вектор-функции, определенные в некоторой области

$$D^*: (t, x) \in R^1 \times D = (-\infty, +\infty) \times \{x \in \mathfrak{M} \,|\, \|x\| \le R = \text{const}\},$$

ε — положительный параметр, а возмущающие функции связаны условием периодичности $H_{i+b} = H_i$, $t_{i+b} - t_i = T$, где b — некоторое натуральное число, $i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

В работе [1] показано, что если в области D^*:

1) $\max\limits_{t\in[\tau,\tau+T]} \{\|f(t, x)\|, \|H_i(t, x)\|\} = M = \text{const} < \infty$;

2) $\max\limits_{t\in[\tau,\tau+T]} \{\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})\|, \|H_i(t, \bar{x}) - H_i(t_i, \bar{\bar{x}})\|\} \le L\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|$, $\quad (\nabla)$

где $0 < L = \text{const} < \infty$; $x, \bar{x}, \bar{\bar{x}} \in D$, а τ — произвольная постоянная из R^1, то существует единственное управление (μ_1, μ_2) такое, что уравнение с импульсами

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x) - \mu_1, \; t \neq t_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x) - \mu_2 \tag{2}$$

имеет T-периодическое решение $x(t, \tau, x_0) \in D^*$, удовлетворяющее начальному условию $x(\tau, \tau, x_0) = x_0$, а

$$x_0 \in D_f = \{x \in \mathfrak{M} \,|\, \|x\| \le R - \varepsilon(p+1)MT/2\} \subset D.$$

где $p = b/T$, а $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\varepsilon(p+1)MT/2 < R$.

В настоящей статье получено такое решение. Рассмотрим укороченную (конечномерную) систему уравнений, соответствующую уравнению (1):

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}), t \neq t_i;$$

$$\Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=t_i} = \varepsilon \overset{(n)}{H}_i(t_i, \overset{(n)}{x}). \tag{3}$$

Здесь $\overset{(n)}{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, $\overset{(n)}{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $\overset{(n)}{H}_i = (h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots, h_n^{(i)})$, где $(h_1^{(i)}, h_2^{(i)}, \ldots) = H_i$.

При любом $n \in (1, 2, \ldots)$ существует единственное управление $(\overset{(n)}{\mu}_1, \overset{(n)}{\mu}_2)$ такое, что решение системы уравнений с импульсами

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{f}(t, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_1, t \neq t_i;$$

$$\Delta \overset{(n)}{x}\Big|_{t=t_i} = \varepsilon \overset{(n)}{H}_i(t_i, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_2, \tag{4}$$

$\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0)$ с начальными значениями τ, $\overset{(n)}{x}_0 \in D_f$, будет T-периодическим. Приведем условия, при которых $\lim\limits_{n\to\infty} \overset{(n)}{x}(t) = x(t)$.

Система (4) не является укороченной по отношению к системе (2), и аналог теоремы К. П. Персидского об укорочении неприменим.

Пусть моменты импульсов t_i разделены, т. е. $t_{i+1} - t_i \geq c = \text{const} > 0$ при $i = 1, 2, \ldots$. Тогда на периоде будет конечное число импульсов, которое обозначим b.

Все дальнейшие рассуждения относятся к отрезку $[\tau, \tau + T]$, ибо при любом n решение $\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0)$ T-периодично [1].

Учитывая результат следствия 2 из [1], получаем

$$\|\overset{(n)}{\mu}_1\| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\varepsilon}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \|\overset{(n)}{f}(s, \overset{(n)}{x}_m(s, \tau, \overset{(n)}{x}_0))\|\, ds \leq \frac{\varepsilon}{T} MT = \varepsilon M,$$

$$\|\overset{(n)}{\mu}_2\| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau < t_j < \tau+T} \|H_j(t_j, \overset{(n)}{x}_m(t_j, \tau, \overset{(n)}{x}_0))\| \leq \frac{\varepsilon}{pT} Mb,$$

где $\overset{(n)}{x}_m$ определяются рекуррентными формулами (7) из [1]. Обозначим $\max\{\varepsilon M, \varepsilon bM/pT\} = N$.

Лемма. *Из последовательностей* $\{\overset{(n)}{\mu}_1\}$ *и* $\{\overset{(n)}{\mu}_2\}$ *можно выделить подпоследовательности* $\{\overset{(k)}{\mu}_1\}$ *и* $\{\overset{(k)}{\mu}_2\}$, *сходящиеся соответственно к некоторым элементам* μ_1^0 *и* μ_2^0 *из* $\mathfrak{M}$ *в слабом смысле.*

Действительно, последовательности $\{\|\overset{(n)}{\mu}_1\|\}$ и $\{\|\overset{(n)}{\mu}_2\|\}$ ограничены постоянной N. Это позволяет применить метод диагонализации и получить требуемое утверждение.

Для простоты записей положим $k = n$ и вернемся к рассмотрению уравнений (4).

Решение $\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0)$ этой системы можно представить в виде

$$\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0) = \overset{(n)}{x}_0 + \int_\tau^t \left[\varepsilon \overset{(n)}{f}\left(\sigma, \overset{(n)}{x}(\sigma, \tau, \overset{(n)}{x}_0)\right) - \overset{(n)}{\mu}_1 \right] d\sigma +$$

$$+ \sum_{\tau < t_i < t} \left[\varepsilon \overset{(n)}{H}_i \left(t_i, \overset{(n)}{x}(t_i, \tau, \overset{(n)}{x}_0) \right) - \overset{(n)}{\mu}_2 \right]. \tag{5}$$

Оценивая его по норме, получаем

$$\|\overset{(n)}{x}\| \le \|\overset{(n)}{x}_0\| + \| \int_\tau^t [\varepsilon \overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_1] \, d\sigma +$$

$$+ \sum_{\tau < t_i < t} [\varepsilon \overset{(n)}{H}_i(t_i, \overset{(n)}{x}(t_i, \tau, \overset{(n)}{x}_0)) - \overset{(n)}{\mu}_2] \|$$

или, учитывая выражения (4) из [1], имеем

$$\|\overset{(n)}{x}\| \le \|\overset{(n)}{x}_0\| + \varepsilon \| \int_\tau^t [\overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) - \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \overset{(n)}{f}(s, \overset{(n)}{x}) \, ds] \, d\sigma +$$

$$+ \sum_{\tau < t_i < t} [\overset{(n)}{H}_i(t_i, \overset{(n)}{x}) - \frac{1}{pT} \sum_{\tau < t_i < \tau + T} \overset{(n)}{H}_i(t_i, \overset{(n)}{x})] \|.$$

Отсюда, принимая во внимание утверждение леммы из [1], получаем оценку для $\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0)$:

$$\|\overset{(n)}{x}\| \le \|\overset{(n)}{x}_0\| + \varepsilon M \alpha(t), \tag{6}$$

справедливую при всех $t \in [\tau, \tau + T]$, где $\alpha(t) = 2(1 + p)(t - \tau)(1 - (t - \tau)/T)$. Из неравенства (6) следует, что последовательность $\{\overset{(n)}{x}\}$ равномерно ограничена на отрезке $[\tau, \tau + T]$.

Пусть $\bar{t}$ и $\bar{\bar{t}}$ принадлежат отрезку $[\tau, t_1]$, где t_1 — момент первого импульса на отрезке $[\tau, \tau + T]$, $\bar{t} > \bar{\bar{t}}$. Тогда

$$\overset{(n)}{x}(\bar{t}) - \overset{(n)}{x}(\bar{\bar{t}}) = \int_\tau^{\bar{t}} [\varepsilon \overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_1] \, d\sigma - \int_\tau^{\bar{\bar{t}}} [\varepsilon \overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_1] \, d\sigma =$$

$$= \int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} [\varepsilon \overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) - \overset{(n)}{\mu}_1] \, d\sigma.$$

Отсюда

$$\left\| \overset{(n)}{x}(\bar{t}) - \overset{(n)}{x}(\bar{\bar{t}}) \right\| \le \int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} \left\| \varepsilon \overset{(n)}{f}\left(\sigma, \overset{(n)}{x}\right) - \overset{(n)}{\mu}_1 \right\| d\sigma \le$$

$$\le \int_{\bar{\bar{t}}}^{\bar{t}} [\varepsilon \| \overset{(n)}{f}(\sigma, \overset{(n)}{x}) \| + \| \overset{(n)}{\mu}_1 \|] \, d\sigma \le (\varepsilon M + N) \left\| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right\|. \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует равностепенная непрерывность последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$ на $[\tau, t_1]$.

На основании теоремы Арцела – Асколи из последовательности $\{\overset{(n)}{x_1}\}$ можно выбрать подпоследовательность $\overset{(\alpha_1)}{x_1}, \overset{(\alpha_2)}{x_1}, \ldots \overset{(\alpha_m)}{x_1}, \ldots$, сходящуюся равномерно по t на отрезке $[\tau, t_1]$.

Из последовательности $\overset{(\alpha_1)}{x_2}, \overset{(\alpha_2)}{x_2}, \ldots \overset{(\alpha_m)}{x_2}, \ldots$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\overset{(\beta_1)}{x_2}, \overset{(\beta_2)}{x_2}, \ldots, \overset{(\beta_m)}{x_2}, \ldots$. Этот процесс продолжим неограниченно. По методу диагонализации из последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$ выберем подпоследовательность $\overset{(\alpha_1)}{x}, \overset{(\beta_2)}{x}, \ldots \overset{(\gamma_3)}{x}, \ldots$, которая сходится равномерно по координатам на отрезке $[\tau, t_1]$. Обозначим ее $\{\overset{(n_1)}{x}\}$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\overset{(n_1)}{x}\}$ на отрезке $[t_1 + 0, t_2]$, где t_2 — второй момент импульсного воздействия на отрезке $[\tau, \tau + T]$, $t_2 > t_1$. При всех $\bar{t}, \bar{\bar{t}}$ из $[t_1 + 0, t_2]$ для последовательности $\{\overset{(n_1)}{x}\}$ неравенства (6) и (7) справедливы, поэтому из последовательности $\{\overset{(n_1)}{x}\}$ выделим последовательность $\{\overset{(n_2)}{x}\}$, сходящуюся равномерно по координатам на отрезках $[\tau, t_1]$, $[t_1 + 0, t_2]$.

Через конечное число шагов получаем последовательность $\{\overset{(s)}{x}\}$, являющуюся подпоследовательностью последовательности $\{\overset{(n)}{x}\}$, причем $\{\overset{(s)}{x}\}$ сходится равномерно по координатам на каждом из отрезков, входящих в $[\tau, \tau + T]$ и не содержащих импульсных моментов t_i, к некоторой T-периодической вектор-функции $x^0(t)$.

Говорят, что функция $z(t, x) = \{z_1(t, x), z_2(t, x), \ldots\} \in C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(x)$, т. е. удовлетворяет усиленным условиям Коши — Липшица по x в области D^*, если для любых двух точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m, x'_{m+1}, x'_{m+2}, \ldots)$ и $\bar{\bar{x}} = (x_1, \ldots, x_m, x''_{m+1}, x''_{m+2}, \ldots)$ из области D справедливо неравенство

$$|z_s(t, \bar{x}) - z_s(t, \bar{\bar{x}})| \leq \delta(t)\, \Delta x\, \varepsilon_s(m), \quad s = 1, 2, 3, \ldots, \quad t \in R^1,$$

где $\delta(t)$ — непрерывная по t функция, $\Delta x = \sup\{|x'_{m+1} - x''_{m+1}|, \ldots\}$, $\varepsilon_s(m) \to 0$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим последовательность дифференциальных систем

$$\frac{d\overset{(s)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(s)}{f}\left(t, \overset{(s)}{x}\right) - \overset{(s)}{\mu}_1, \quad t \neq t_i;$$
$$\Delta \overset{(s)}{x}\Big|_{t=t_i} = \varepsilon \overset{(s)}{H}_i(t_i, \overset{(s)}{x}(t_i)) - \overset{(s)}{\mu}_2. \tag{8}$$

Предположим, что функции $f(t, x), H_i(t, x) \in C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(x)$, при всех целых i и докажем, что в таком случае $x^0(t) = \lim\limits_{s \to \infty} \overset{(s)}{x}(t, \tau, \overset{(s)}{x}_0) \equiv x(t, \tau, x_0)$, $t \in R^1$, где $x(t, \tau, x_0)$

— решение системы уравнений (2), а сходимость равномерно слабая.

Последовательность $\{\overset{(s)}{x}(t)\}$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \overset{(1)}{x}_1(t) \\ \overset{(1)}{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \overset{(2)}{x}_1(t) \\ \overset{(2)}{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}; \ldots; \begin{pmatrix} \overset{(n)}{x}_1(t) \\ \overset{(n)}{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}; \ldots,$$

причем в каждом столбце, начиная с некоторого номера, все элементы равны нулю тождественно по t.

Зафиксируем число l и запишем неравенство

$$\left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_1(t), \overset{(n)}{x}_2(t), \ldots\right) - f_l\left(t, x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots\right) \right| \le$$

$$\le \left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_1(t), \overset{(n)}{x}_2(t), \ldots\right) - f_l\left(t, x_1^0(t), \ldots, x_g^0(t), \overset{(n)}{x}_{g+1}(t), \overset{(n)}{x}_{g+2}(t), \ldots\right) \right| +$$

$$+ \left| f_l\left(t, x_1^0(t), \ldots, x_g^0(t), \overset{(n)}{x}_{g+1}(t), \overset{(n)}{x}_{g+2}(t), \ldots\right) - f_l\left(t, x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots\right) \right|.$$

Разности, стоящие в правой части, обозначим $A(l, g)$ и $B(l, g)$ соответственно. Поскольку $f \in C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(x)$, то

$$B(l, g) \le \delta(t) \sup\left\{ \left| x_{g+1}^0(t) - \overset{(n)}{x}_{g+1}(t) \right|, \left| x_{g+2}^0(t) - \overset{(n)}{x}_{g+2}(t) \right|, \ldots \right\} \varepsilon_l(g),$$

где $\varepsilon_l(g) \to 0$ при $g \to \infty$, а значит, для любого сколь угодно малого числа ν существует такой номер g^0, что $\varepsilon_l(g^0) < \nu$. Учитывая, что все функции $\overset{(s)}{x}(t)$, а значит и функция $x^0(t)$, равномерно ограничены по норме некоторой постоянной, которую обозначим K^0, приходим к неравенству

$$B(l, g^0) \le 2\delta(t) K^0 \cdot \varepsilon_l(g^0) < 2\delta(t) K^0 \nu. \tag{9}$$

Зафиксируем значение $g = g^0$. Тогда справедлива оценка

$$A(l, g^0) \le 2\delta(t)\, \varepsilon_l(g^0) \sup\left\{ \left| x_1^0(t) - \overset{(n)}{x}_1(t) \right|, \ldots, \left| x_{g^0}^0(t) - \overset{(n)}{x}_{g^0}(t) \right| \right\}. \tag{10}$$

Но $\overset{(s)}{x}(t)$ стремится в слабом смысле к $x^0(t)$ равномерно по t. Это означает, что найдется такой номер $N(l, \nu)$, что при $n \ge N(l, \nu)$ справедливо соотношение

$$\sup\left\{ \left| x_1^0(t) - \overset{(n)}{x}_1(t) \right|, \ldots, \left| x_{g^0}^0(t) - \overset{(n)}{x}_{g^0}(t) \right| \right\} < \nu,$$

откуда, учитывая оценку (10), приходим к неравенству

$$A(l, g^0) + B(l, g^0) < \delta(t)\,(2K^0 + \varepsilon_l(0))\nu.$$

Пусть t — произвольное значение аргумента из сегмента $[\tau, \tau + T]$, не совпадающее с моментом импульса, а σ — сегмент, включающий t, не содержащий момента импульса такой, что $\sigma \subset [\tau, \tau + T]$. Обозначим $\delta = \max_{\sigma} \delta(t)$. Тогда равномерно относительно $t \in \sigma$

$$\left| f_l\left(t, \overset{(n)}{x}_1(t), \overset{(n)}{x}_2(t), \ldots\right) - f_l\left(t, x_1^0(t), x_2^0(t), \ldots\right) \right| < \delta(2K^0 + \varepsilon_l(0))\nu,$$

как только $n \geq N(l, \nu)$. Это говорит о том, что равномерно по $t \in \sigma$ $f_l(t, \overset{(s)}{x}(t)) \to f_l(t, x^0(t))$ при $s \to \infty$. Очевидно, последнее утверждение справедливо для всех $l = 1, 2, 3, \ldots$. Переходя к пределу при $s \to \infty$ в первом равенстве системы уравнений (8), получаем

$$\lim_{s\to\infty} \frac{d\overset{(s)}{x}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}(t) = \varepsilon f(t, x^0(t)) - \mu_1^0 \text{ при } t \neq t_i.$$

Учитывая, что функции $H_i(t, x) \in C_{\widetilde{\mathrm{Lip}}}(x)$ и проводя аналогичные рассуждения, имеем

$$\lim_{s\to\infty} H_i(t_i, \overset{(s)}{x}(t_i)) \to H_i(t_i, x^0(t_i)).$$

Справедливы соотношения

$$\frac{d\,x^0(t)}{dt} = \varepsilon f(t, x^0(t)) - \mu_1^0, t \neq t_i;$$

$$\Delta x^0 \big|_{t=t_i} = \varepsilon H_i(t_i, x^0(t_i)) - \mu_2^0.$$

Но $x^0(t)$ T-периодично. Тогда в силу единственности управления [1] справедливы равенства

$$\mu_1^0 = \mu_1, \mu_2^0 = \mu_2, x^0(t) = x(t).$$

Таким образом, существует такая подпоследовательность последовательности укороченных систем уравнений вида (3), что последовательность решений соответствующих систем уравнений (4) в слабом смысле удовлетворяет соотношению $\lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{x}(t, \tau, \overset{(s)}{x}_0) = x(t, \tau, x_0)$, где $x(t, \tau, x_0)$ — T-периодическое решение уравнения (2), причем $\mu_k = \lim_{s\to\infty} \overset{(s)}{\mu}_k$, $k = 1, 2$.

Более того, любая подпоследовательность последовательности $\{\overset{(n)}{\mu}_i\}$, $i = 1, 2$, содержит в себе сходящуюся подпоследовательность, причем каждая из них сходится в слабом смысле к одному и тому же пределу μ_i, $i = 1, 2$. Это утверждение справедливо и для любой подпоследовательности последовательности $\{\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x}_0)\}$. Каждая из них содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к одному и тому же пределу $x(t, \tau, x_0)$ в слабом смысле.

Докажем это утверждение для последовательности $\{\overset{(n)}{x}(t)\}$. Пусть $\{\overset{(r)}{x}(t, \tau, \overset{(r)}{x}_0)\}$ — произвольная ее подпоследовательность, $r = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим теперь соответствующую последовательность систем уравненеий вида (4), где индекс n заменен индексом r. Для нее справедливы все рассуждения, приведенные выше. Это значит, что существует подпоследовательность $\{\overset{(l)}{x}(t, \tau, \overset{(l)}{x_0})\}$, $l = 1, 2, \ldots$, последовательности $\{\overset{(r)}{x}\}$, которая слабо сходится опять же к функции $x(t, \tau, x_0)$ в то время, как $\{\overset{(l)}{\mu_i}\} \to \mu_i$, $i = 1, 2$, в силу единственности управления (μ_1, μ_2).

Покажем теперь, что и вся последовательность $\{\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x_0})\}$, $n = 1, 2, \ldots$, слабо сходится к $x(t, \tau, x_0)$, а последовательности $\{\overset{(n)}{\mu_k}\}$ — к μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, соответственно. Предположим противное, т. е. что соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \overset{(n)}{x}\left(t, \tau, \overset{(n)}{x_0}\right) = x(t, \tau, x_0), \qquad (\Delta)$$

понимаемое в слабом смысле, не справедливо для $\overset{(n)}{x_\rho}(t, \tau, \overset{(n)}{x_0})$, где $\overset{(n)}{x_\rho}$ — ρ-я координата вектора $\overset{(n)}{x}$ в точке $\bar{t} \in [\tau, \tau + T]$. В таком случае существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого сколь угодно большого $N > 0$ найдется такой номер $m \geq N$, при котором

$$\left| x_\rho(\bar{t}, \tau, x_0) - \overset{(m)}{x_\rho}\left(\bar{t}, \tau, \overset{(m)}{x_0}\right) \right| \geq \varepsilon_0. \qquad (*)$$

Выберем бесконечно возрастающую последовательность положительных чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots$ и по ней определим последовательность натуральных чисел $m_k \geq N_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых справедливо неравенство (*), в которое вместо m поставлено m_k. Но последовательность $\{\overset{(m_k)}{x_\rho}\}$ является подпоследовательностью $\{\overset{(n)}{x_\rho}\}$, а значит, содержит в себе сходящуюся к x_ρ подпоследовательность $\{\overset{(m_i)}{x_\rho}\}$. Это означает, что при некотором N_0 для $m_l \geq N_0$ неравенство (*) для $\{\overset{(m_i)}{x_\rho}\}$ выполняться не может. Получили противоречие, доказывающее представление (Δ).

Равенство $\mu_k = \lim\limits_{n \to \infty} \overset{(n)}{\mu_k}$, $k = 1, 2$, доказывается аналогично. Отметим, что предельный переход (Δ) осуществляется равномерно по t на любом отрезке из множества R^1, не содержащем момента импульсного воздействия.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что в области* D^* *выполняются условия*(∇), *функции* $f(t, x)$, $H_i(t, x) \in C_{\widetilde{\text{Lip}}}(x)$ *при всех целых значениях* i *непрерывны и периодичны по* t *с периодом* T, *причем возмущающие функции связаны условием периодичности.*

Тогда T-периодическое решение $\overset{(n)}{x}(t, \tau, \overset{(n)}{x_0})$ *ситемы уравнений* (4) *в слабом смысле удовлетворяет условию* (Δ), *где* $x(t, \tau, x_0)$ — *T-периодическое решение системы уравнений* (2), *причем* $\mu_k = \lim\limits_{n \to \infty} \overset{(n)}{\mu_k}$, $k = 1, 2$.

Замечание Второе из условий (∇), а также требование, чтобы функции $f(t, x)$ и $H_i(t, x)$, $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, удовлетворяли усиленным условиям Коши – Липшица, можно заменить одним, а именно:

$$\max_{t\in[\tau,\tau+T]} \{\| f(t, x) - f(t, \bar{x}) \|, \quad \| H_i(t, x) - H_i(t, \bar{x}) \|\} \le \varepsilon(n) \| x - \bar{x} \|,$$

где точки $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ и $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_{n+1}, \ldots)$ принадлежат области D, $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Особо рассмотрим случай линейной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x, \ t \ne t_j, \quad \Delta x \big|_{t\ne t_j} = \varepsilon B_j x(t_j - 0), \tag{11}$$

где $x \in \mathfrak{M}$, $A(t) = \left[a_{is}(t) \right]_{i,s=1}^{\infty}$ и $B_j = \left[{}^{-}b_{is}^{(j)} \right]_{i,s=1}^{\infty}$ — бесконечные матрицы, ε — положительный параметр, $j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$.

Пусть выполняются условия:

1) функции $a_{is}(t)$, $i, s = 1, 2, \ldots$, T-периодичны и непрерывны на R^1;

2) $\sup \{\| A(t) \|_0, \| B_j \|\} \le M = \text{const} < \infty$;

3) $B_{j+b} = B_j$, $t_{j+b} - t_j = T$, где b — некоторое натуральное число, значит моменты импульсов разделены.

Здесь обозначено

$$\left\| B_j \right\| = \sup_i \sum_{s=1}^{\infty} \left| b_{is}^{j} \right|, \ \| \Delta(t) \|_0 = \sup_i \sum_{s=1}^{\infty} \max_t \left| a_{is}(t) \right|.$$

Очевидно, при условиях 1 – 3 существует единственное управление (μ_1, μ_2) такое, что система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x - \mu_1, \ t \ne t_j;$$

$$\Delta x \big|_{t\ne t_j} = \varepsilon B_j x(t_j - 0) - \mu_2 \tag{12}$$

имеет T-периодическое решение $x(t, \tau, x_0) \in D^*$ такое, что $x(\tau, \tau, x_0) = x_0 \in D_f$, причем

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon}{T} \int_{\tau}^{\tau+t} A(\sigma)x \, d\sigma, \quad \mu_2 = \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau<t_j<\tau+T} B_j x(t_j - 0).$$

Системе уравнений (11) соответствует укороченная (конечномерная) система уравнений

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{A}(t) \overset{(n)}{x}, \ t \ne t_j;$$

$$\Delta x \big|_{t=t_j} = \varepsilon \overset{(n)}{B_j} \overset{(n)}{x}(t_j - 0), \tag{13}$$

где $\overset{(n)}{A}(t) = \left[a_{is}(t) \right]_{i,s=1}^{n}$, $\overset{(n)}{B_j} = \left[b_{is}^{(j)}(t) \right]_{i,s=1}^{n}$.

Для нее, естественно, при условиях 1 – 3, также существует единственное управление $(\overset{(n)}{\mu_1}, \overset{(n)}{\mu_2})$ такое, что решение системы уравнений

$$\frac{d\overset{(n)}{x}}{dt} = \varepsilon \overset{(n)}{A}(t)\overset{(n)}{x} - \overset{(n)}{\mu}_1,\ t \neq t_j;$$

$$\Delta x \big|_{t=t_j} = \varepsilon \overset{(n)}{B}_j \overset{(n)}{x}(t_j - 0) - \overset{(n)}{\mu}_2 \tag{14}$$

$\overset{(n)}{x}(t,\tau,\overset{(n)}{x}_0)$ с начальными значениями τ, $\overset{(n)}{x}_0$ будет T-периодическим.

Приведем условия, при которых предельный переход (Δ) в рассматриваемом случае осуществляется в сильном смысле (по норме пространства $\mathfrak{M}$) и получим оценки для приближения решения $x(t, \tau, x_0)$ функцией $\overset{(n)}{x}(t,\tau,\overset{(n)}{x}_0)$.

Теорема 2. *Пусть система уравнений* (11) *такова, что выполняются условия* 1 – 3 *и, кроме того, справедливы неравенства*

$$\| A(t) - \overset{(n)}{A}(t)\|_0 \leq \xi(n),\ \| B_j - \overset{(n)}{B}_j\|_0 \leq \beta(n),\ \ j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Тогда для решения системы уравнений (12) $x = x(t, \tau, x_0)$, $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots\right) \in$ $\in D_f$ *такого, что* $\|(0, \ldots, 0, \overset{(n+1)}{x_0}, \overset{(n+2)}{x_0}, \ldots)\| \leq \eta(n)$ *справедлива оценка* $\| x - \overset{(n)}{x} \| \leq P\alpha(n)$, *где* $P = \mathrm{const} < \infty$, $\alpha(n) = \max\{\eta(n), \xi(n), \beta(n)\}$. *Если* $\alpha(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то предельный переход*(Δ) *осуществляется в сильном смысле.*

Доказательство. Заметим сначала, что из условий (15) следуют оценки

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} \max_t \left| a_{is}(t) \right| \leq \xi(n),\ \sum_{s=n+1}^{\infty} \left| b_{is}^j \right| \leq \beta(n),\ i = 1, 2, \ldots;\ j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots,$$

приводящие к выполнению усиленных условий Коши — Липшица для векторных функций $A(t)x$ и $B_j x(t_j - 0)$ при $\alpha(n) \to 0$, $n \to \infty$.

С учетом условий 1 – 3 из изложенного выше вытекает справедливость представления (Δ).

Напомним, что при $x_0 \in D_f$ как решение $x(t, \tau, x_0)$, так и решение $\overset{(n)}{x}(t,\tau,\overset{(n)}{x}_0)$ ограничены по норме постоянной R, $t \in [\tau, \tau + T]$.

Учитывая представление (5), получаем неравенство

$$\left\| x - \overset{(n)}{x} \right\| \leq \left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\| + \int_{\tau}^{t} \left[\varepsilon \left\| A(\sigma)x - \overset{(n)}{A}(\sigma)\overset{(n)}{x} \right\| + \left\| \mu_1 - \overset{(n)}{\mu}_1 \right\| \right] d\sigma +$$

$$+ \sum_{\tau < t_j < t} \left[\varepsilon \left\| B_j x(t_j - 0) - \overset{(n)}{B}_j \overset{(n)}{x}(t_j - 0) \right\| + \left\| \mu_2 - \overset{(n)}{\mu}_2 \right\| \right]. \tag{18}$$

Из соотношений

$$\| A(\sigma)x - \overset{(n)}{A}(\sigma)\overset{(n)}{x} \| \leq M\| x - \overset{(n)}{x} \| + R\xi(n),$$

$$\| B_j x(t_j - 0) - \overset{(n)}{B}_j \overset{(n)}{x}(t_j - 0) \| \leq M\| x - \overset{(n)}{x} \| + R\beta(n)$$

следуют оценки

$$\left\| \mu_1 - \overset{(n)}{\mu}_1 \right\| \leq \frac{\varepsilon}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \left\| A(\sigma)x - \overset{(n)}{A}(\sigma)\overset{(n)}{x} \right\| d\sigma \leq \varepsilon R\xi(n) + \varepsilon M \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0,$$

$$\left\| \mu_2 - \overset{(n)}{\mu}_2 \right\| \leq \frac{\varepsilon}{pT} \sum_{\tau < t_j < \tau+T} \left\| B_j x(t_j - 0) - \overset{(n)}{B}_j \overset{(n)}{x}(t_j - 0) \right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon bM/pT \, \| x - \overset{(n)}{x} \|_0 + \varepsilon bR/pT \, \beta(n).$$

Тогда из неравенства (16) получаем

$$\left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 \leq \left\| x_0 - \overset{(n)}{x}_0 \right\|_0 + 2 \int\limits_{\tau}^{t} \left[\varepsilon M \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 + \varepsilon\xi(n)R \right] d\sigma +$$

$$+ \sum_{\tau < t_j < t} \left[\varepsilon M \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 + \varepsilon R\beta(n) + \frac{\varepsilon bM}{pT} \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon bR}{pT} \beta(n) \right] \leq \left[1 + 2\varepsilon RT + \varepsilon Rb\left(1 + \frac{b}{pT} \right) \right] \alpha(n) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} 2\varepsilon M \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 d\sigma + \sum_{\tau < t_j < t} \varepsilon M \left(1 + \frac{b}{pT} \right) \left\| x - \overset{(n)}{x} \right\|_0 .$$

Воспользовавшись леммой 2.1 из [2] будем иметь оценку $\| x - \overset{(n)}{x} \| \leq P\alpha(n)$, где

$$P = \left[1 + 2\varepsilon RT + \varepsilon Rb(1 + b/pT) \right] \left(\varepsilon M(1 + b/pT) \right)^b e^{2\varepsilon MT} = \text{const} < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Заметим в заключение, что если требуется найти решение $x(t)$ системы уравнений (12) с точностью до δ, то следует выбрать укороченную до n-го порядка систему (13), где n подчиняется условию

$$\alpha(n) \leq \delta_1/P, \; 0 < \delta_1 \leq \delta.$$

Затем, воспользовавшись оценкой из следствия 1 работы [1], надо провести такое число шагов m итерационного процесса, при котором выполняется неравенство

$$\| \overset{(n)}{x} - \overset{(n)}{x}_m \| < \delta_2, \; \delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

где $\overset{(n)}{x}_m(t)$ определяются рекуррентным соотношением (7) из [1]. Этот процесс вполне реализуем на ЭВМ и является одной из модификаций численно-аналитического метода А. М. Самойленко [3]. Кроме того, следует решить задачу оптимизации процесса, состоящую в оптимальном выборе постоянных δ_1 и δ_2.

1. *Теплинский Ю. В., Цигановский Н. С.* Об одной периодической задаче управления для дифференциальных уравнений с импульсами в пространстве ограниченных числовых последовательностей // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №2. – С. 271 – 275.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Вища шк., 1976. – 180 с.

Получено 16. 01. 91