УДК 517.5, 519.7

И. Я. Тырыгин, мл. науч. сотр. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ε–ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ СЖАТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Описан подход к проблеме сжатия информации при кодировании изображений, когда на первом шаге вычисляется значение ε-энтропии класса функций, соответствующих последовательностям изображений, а на втором шаге применяется субоптимальное вероятностное кодирование.

Описаний підхід до проблеми стиску інформації при кодуванні зображень, коли на першому кроці обчислюється значення ε-ентропії класу функцій, які відповідають послідовностям зображень, а на другому кроці застосовується субоптимальне ймовірносне кодування.

Проблема сжатия информации из области компьютерной математики, появившейся на грани теоретической математики и компьютерных наук, занимает одно из основных мест в сфере интересов специалистов. Различные подходы к решению возникающих задач основываются на разных информационных моделях, среди которых, как полярные случаи, возникают вероятностные и детерминистские модели. Понятия энтропии в вероятностном и ε-энтропии в детерминистском случаях используются для определения количественных характеристик рассматриваемых моделей. Однако до настоящего времени не выяснена связь между этими понятиями. В данной статье устанавливается такая связь и на ее основе указывается способ построения алгоритмов, обеспечивающих максимально возможную степень сжатия информации. Все рассуждения проводятся для случая функций, описывающих изменения яркостей элементов экрана по времени, т.е. для последовательностей телевизионных изображений. Выбор таких множеств функций обусловлен тем, что задача сжатия видеоинформации является в настоящее время областью наибольшего применения результатов теоретических исследований.

1. Определения. Пусть заданы натуральные числа m и T. На множестве

$$G = \{(k, l, t) | \, k, l, t \in N, \, 1 \le k, l \le m, \, 1 \le t \le T\}$$

определим классы функций S_1 и S_2 соотношениями

$$\bar{f}(k, l, t) \in [0, 1] \quad (\bar{f} \in S_1),$$

$$\bar{\bar{f}}(k, l, t) \in Q = \{(x, y, z) | \, x, y, z \in R^3, 0 \le x, y, z, x + y + z \le 1\} \quad (\bar{\bar{f}} \in S_2).$$

Функции класса S_1 описывают последовательности черно-белых изображений, класс S_2 — модель множества последовательностей цветных изображений. В последнем случае можно рассматривать ограничения более сложного вида $0 \le \alpha x + \beta y + \gamma z \le 1$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$, связанные при различных (α, β, γ) с разными характеристиками цветности, однако с точки зрения проводимых рассуждений все эти случаи по сути не отличаются от случая $\alpha = \beta = \gamma = 1$. При фиксированном $\varepsilon > 0$ нетрудно подсчитать значение ε-энтропии $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$ класса S_1 относительно метрики

$$\rho_1(f_1, f_2) = \max_G \left| f_1(\cdot) - f_2(\cdot) \right|$$

и, соответственно, ε-энтропию $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)$ класса S_2 относительно метрики

© И. Я. ТЫРЫГИН, 1992

$$\rho_2(f_1,f_2)=\max_G\|f_1(\cdot)-f_2(\cdot)\|_C=\max\left\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|\right\},$$

$$f_i=(x_i,y_i,z_i),\ i=\overline{1,2}.$$

Отсюда получаем (см. также [1])

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)=m^2\cdot T\cdot\log_2\frac{1}{2\varepsilon},$$

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)=m^2\cdot T\cdot\mathcal{H}_\varepsilon^C(Q)\approx m^2\cdot T\cdot\log_2\frac{1}{48\varepsilon^3}.$$

Величины $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$ и $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)$ указывают нижний предел необходимого количества информации при кодировании функций из классов S_1 и S_2 с точностью ε в равновероятностном случае. Анализ компактов из S_1 и S_2, задаваемых ограничениями типа модуля непрерывности относительно времени t, содержится в [1].

2. Подход к задаче кодирования. Далее будем рассматривать задачу кодирования с точностью ε функций из множеств S_1 и S_2 с учетом распределения вероятности на этих множествах. Именно: пусть на множествах S_1 и S_2 заданы вероятностные меры $\mu_1(\cdot)$ и $\mu_2(\cdot)$. Предположим, что фиксированному $\varepsilon>0$ соответствуют минимальные ε-сети

$$\left\{\bar f_i\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)}$$

в S_1 ($\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)=\log_2\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$) и

$$\left\{\bar{\bar f}_i\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)}$$

в S_2 ($\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)=\log_2\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)$). Для каждой из ε-сетей существует разбиение диаметра не больше 2ε в исходном множестве:

$$\left\{\overline{M}(\bar f_i,\varepsilon)\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)}\ \text{для}\ S_1,\ \left\{\overline{\overline{M}}(\bar{\bar f}_i,\varepsilon)\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)}\ \text{для}\ S_2.$$

Среди функций $\bar f_i$, $\bar{\bar f}_i$ зададим распределения вероятностей равенствами

$$\bar p_i=p(\bar f_i)=\mu_1\left(\overline{M}(\bar f_i,\varepsilon)\right),$$

$$\bar{\bar p}_i=p(\bar{\bar f}_i)=\mu_2\left(\overline{\overline{M}}(\bar{\bar f}_i,\varepsilon)\right).$$

Далее покажем, что минимальной ε-сети соответствует наименьшее значение энтропии

$$H=\sum_i p_i\cdot\log_2\frac{1}{p_i}.$$

Точнее говоря, установим, что при укрупнении ячеек ε-сети значение энтропии H может только уменьшиться. Для этого предположим, что $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{\mathcal{N}_1}$ также ε-сеть, например, в S_1, $\mathcal{N}_1>\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$, $\left\{M(g_j,\varepsilon)\right\}_{j=1}^{\mathcal{N}_1}$ — разбиение множества S_1, соответствующее этой ε-сети, и $p_j=p(g_j)=\mu_1(M(g_j,\varepsilon))$.

Теорема (о монотонности энтропии). *Если для всех* $i=\overline{1,\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)}$, $j=$

$= \overline{1,\mathcal{N}_1}$, выполняется условие

$$\overline{p}_i = p(\bar{f}_i) \geq p_j = p(g_j),$$

где

$$\operatorname{int} \overline{M}(\bar{f}_i,\varepsilon) \bigcap \operatorname{int} M(g_j,\varepsilon) \neq \varnothing,$$

то

$$H_1 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \overline{p}_i \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{p}_i} \leq H_2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_1} p_j \cdot \log_2 \frac{1}{p_j}.$$

Аналогичное утверждение справедливо и для множества S_2.

Доказательство. Пусть M_k — элементы пересечения разбиений

$$\left\{\overline{M}(\bar{f}_i,\varepsilon)\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)}, \left\{M(g_j,\varepsilon)\right\}_{j=1}^{\mathcal{N}_1}, \; R = \overline{1,\mathcal{N}_0}\,(\geq \mathcal{N}_1),$$

и $\hat{p}_k = \mu_1(M_k)$. Тогда если $\bigcup_{k=1}^{n_1(i)} M_{i_k} = \overline{M}(\bar{f}_i,\varepsilon)$, то $\sum_{k=1}^{n_1(i)} \hat{p}_{i_k} = \overline{p}_i$, и из $\bigcup_{k=1}^{n_2(j)} M_{j_k} = M(g_j,\varepsilon)$ следует $\sum_{k=1}^{n_2(j)} \hat{p}_{j_k} = p_j$. С учетом введенных обозначений получаем

$$H_1 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \overline{p}_i \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{p}_i} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \sum_{k=1}^{n_1(j)} \hat{p}_{i_k} \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{p}_i},$$

$$H_2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_1} p_j \cdot \log_2 \frac{1}{p_j} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_1} \sum_{k=1}^{n_2(j)} \hat{p}_{j_k} \cdot \log_2 \frac{1}{p_j},$$

где $M_{i_k} \subset \overline{M}(\bar{f}_i,\varepsilon)$, $M_{j_k} \subset M(g_j,\varepsilon)$. Отсюда следует

$$H_2 - H_1 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_1} \sum_{k=1}^{n_2(j)} \hat{p}_{j_k} \cdot \log_2 \frac{1}{p_j} - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \sum_{k=1}^{n_1(i)} \hat{p}_{i_k} \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{p}_i} = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}_0} \hat{p}_k \cdot \log_2 \frac{\overline{p}_i}{p_j},$$

где, по построению, $M_k \subset \{\overline{M}(\bar{f}_i,\varepsilon) \cap M(g_j,\varepsilon)\} \neq \varnothing$, т.е. $\overline{p}_i \,/\, p_j \geq 1$. Таким образом $H_2 - H_1 \geq 0$. Теорема справедлива и в более общих случаях, а не только для множеств S_1 и S_2.

Исходя из доказанной теоремы, можно сформулировать общий подход к задаче вероятностного кодирования функций из заранее заданных множеств, например, S_1 и S_2, который состоит в последовательном решении задач о вычислении вначале величин ε-энтропии $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$, $\mathcal{H}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)$ и, затем, нахождении реализуемых алгоритмов вероятностного кодирования источников

$$\left\{\bar{f}_i, \overline{p}_i\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)}, \; \left\{\overline{\overline{f}}_i, \overline{\overline{p}}_i\right\}_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)}.$$

Проще говоря, сначала вычисляем значение ε-энтропии исходного множества без учета распределения вероятности и строим ε-сеть, а потом находим приемлемые алгоритмы вероятностного кодирования только на множестве функций из ε-сети, учитывая вероятности появления каждой функции из ε-сети. Здесь необходимо минимизировать избыточность такого кодирования (на элемент изображения), т.е. величину

$$0 \leq \overline{R} = \frac{\overline{C} - \overline{H}}{m^2 T} = \frac{1}{m^2 T}\left\{\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \overline{p}_i\, \overline{m}_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \overline{p}_i \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{p}_i}\right\}$$

для S_1 или

$$0 \le \overline{\overline{R}} = \frac{\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{H}}}{m^2 T} = \frac{1}{m^2 T} \left\{ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)} \overline{\overline{p}}_i \overline{\overline{m}}_i - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)} \overline{\overline{p}}_i \cdot \log_2 \frac{1}{\overline{\overline{p}}_i} \right\}$$

для S_2, где $\overline{m}_i$, $\overline{\overline{m}}_i$ — длины префиксных кодов для функций $\bar{f}_i$, $\bar{\bar{f}}_i$. Известны алгоритмы Хаффмана [2] (минимизирующий иизбыточность) и Шеннона – Фано [3], при теоретическом использовании которых получаем в данном случае $0 \le \overline{R}$, $\overline{\overline{R}} \le 1 / m^2 \cdot T$. Среднее количество информации при таком подходе будет минимально относительно всех других способов кодирования функций из S_1 и S_2 с точностью ε. Это вытекает из доказанной выше теоремы и свойств алгоритмов Хаффмана и Шеннона – Фано.

3. Оценки избыточности. В практически важных случаях, однако, числа $\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)$, $\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_2}(S_2)$ слишком велики для реального построения систем оптимальных кодов сразу на всем множестве функций из ε-сети, что препятствует практическому применению таких кодов в общих случаях (см., например, [4, 5]). По этой же причине невозможно статистически определить значения вероятностей $\overline{p}_i$, $\overline{\overline{p}}_i$. Рассмотрим более локальные алгоритмы блочного кодирования функций $\bar{f}_i$, $\bar{\bar{f}}_i$ с небольшим увеличением избыточности, предполагая наличие одного или нескольких процессоров, играющих роль словарей.

Рассмотрим случай множества S_1. Для каждого из m^2 элементов изображения $(k, l), k, l = \overline{1, m}$, считаем известными дискретные плотности вероятности

$$\delta_{k,l}^{\varepsilon}(x) = p(2\varepsilon \cdot i \le x < 2\varepsilon \cdot (i+1),\ i = \overline{1, 1/2\varepsilon - 2};\ 1 - 2\varepsilon \le x < 1)$$

и условной вероятности

$$\gamma_{k,l}^{\varepsilon}(x / y) = p(2\varepsilon \cdot i \le x < 2\varepsilon \cdot (i+1),\ i = \overline{1, 1/2\varepsilon - 2};\ 1 - 2\varepsilon \le x < 1 /$$

$$2\varepsilon \cdot j \le y < 2\varepsilon \cdot (j+1),\ j = \overline{1, 1/2\varepsilon - 2};\ 1 - 2\varepsilon \le y \le 1).$$

Далее будем рассматривать две простейшие модели определения $\overline{p}_i = p\ (\bar{f}_i)$, а именно: в первом случае полагаем

$$\overline{p}_i^1 = \prod_{t=1}^{T} \prod_{k,l=1}^{m} \delta_{k,l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(k,l,t))$$

(последовательность независимых изображений), во втором случае (марковский процесс)

$$\overline{p}_i^2 = \prod_{t=1}^{T} \prod_{k,l=1}^{m} \gamma_{k,l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(k,l,t) / \bar{f}_i(k,\ l,\ t-1)),$$

где

$$\gamma_{k,l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(k,l,1) / \bar{f}_i(k,l,0)) = \delta_{k,l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(k,l,1)).$$

Корректность определения $\overline{p}_i^1$ через произведение $\delta_{k,l}^{\varepsilon}$ следует из равенства

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_\varepsilon^{\rho_1}(S_1)} \overline{p}_i^1 = \prod_{k,l=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{1/2\varepsilon} \delta_{k,l}^{\varepsilon}(x_i) \right\}^T = 1,$$

где $2\varepsilon(i-1) < \forall\ x_i < 2\varepsilon i$, $i = \overline{1, 1/2\varepsilon}$, и

$$\sum_{i=1}^{1/2\varepsilon} \delta_{k,l}^{\varepsilon}(x_i) = 1,$$

$1 \le k,\ l \le m$. В случае условных вероятностей корректность определения $\overline{p}_i^2$ доказывается аналогично.

Рассмотрим способ кодирования с помощью одного процессора. Зафиксируем параметр $n \in N$ $(m / n \in N)$. Алгоритм состоит в последовательной обработке $(m / n)^2$ блоков $m \times n$, составляющих исходный блок $m \times m$, при каждом $1 \le t \le T$ и кодировании по Хаффману сужения функции $\bar{f}_i$ на каждом блоке $n \times n$. Для этого необходимо изменить априорные распределения вероятности на блоках $n \times n$, получить единое для всех блоков модифицированное распределение вероятности среди сужений $\bar{f}_i$ и построить код Хаффмана по новому распределению. Это обусловлено единственностью словаря кодирования для всех блоков $n \times n$. Полученный код длины $\overline{m}_i$ состоит из последовательности $(m / n)^2 \cdot T$ кодов Хаффмана по измененному распределению для сужений $\bar{f}_i$ на блоках $n \times n$ при каждом t. Также необходимо минимизировать избыточность $\overline{R}$ путем оптимального подбора модифицированного распределения вероятностей. Для построения такого распределения уравняем между собой $\delta_{k,l}^{\varepsilon}(x)$ и $\gamma_{k,l}^{\varepsilon}(x / y)$, стоящие в блоках $n \times n$ на одинаковых местах, т.е. положим

$$\overline{\delta}_{u_1+k,\,v_1+l}^{\varepsilon}(x) = \overline{\delta}_{u_2+k,\,v_2+l}^{\varepsilon}(x),$$

$$\overline{\gamma}_{u_1+k,\,v_1+l}^{\varepsilon}(x / y) = \overline{\gamma}_{u_2+k,\,v_2+l}^{\varepsilon}(x / y),$$

где

$$u_1, u_2, v_1, v_2 \in M_0 = \{k \cdot n\}_{k=0}^{(m/n)-1},\ (u_1, v_1) \neq (u_2, v_2),$$

$1 \le k,\ l \le n$, и $\overline{\delta}_{u+k,v+l}^{\varepsilon}$, $\overline{\gamma}_{u+k,v+l}^{\varepsilon}$ — измененные дискретные плотности вероятности и условной вероятности. Тогда вместо $\overline{p}_i^1$ новые вероятности $\hat{p}_i^1$ определятся равенствами

$$\hat{p}_i^1 = \prod_{t=1}^{T} \prod_{k,l=1}^{m} \overline{\delta}_{k,l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(k,l,t)) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{u,v \in M_0} \prod_{k,l=1}^{n} \overline{\delta}_{u+k,\,v+l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(u+k, v+l, t)).$$

Аналогичные рассуждения справедливы для $\overline{p}_i^2$. Отсюда получаем

$$\overline{m}_i^1 \le \sum_{t=1}^{T} \sum_{u,v \in M_0} \left\lceil \log_2 \left(\prod_{k,l=1}^{n} \overline{\delta}_{u+k,\,v+l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(u+k, v+l, t)) \right)^{-1} \right\rceil$$

(здесь использована оценка сверху длины префиксного кода $m_i \le \lceil \log_2(1 / p_i) \rceil$ для алгоритма Шеннона – Фано, где

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x, & x \in N, \\ [x]+1, & x \notin N. \end{cases}$$

Тогда

$$0 \le \overline{R}_1 \le \frac{1}{m^2 T} \left\{ \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{\varepsilon}^{p_1}(S_1)} \overline{p}_i^1 \left[\sum_{t=1}^{T} \sum_{u,v \in M_0} \left(\left\lceil \log_2 \left(\prod_{k,l=1}^{n} \overline{\delta}_{u+k,\,v+l}^{\varepsilon}(\bar{f}_i(u+k, v+l, t)) \right)^{-1} \right\rceil - \right. \right. \right.$$

$$-\log_2\left(\prod_{k,l=1}^{n}\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(\bar{f}_i(u+k,v+l,t))\right)^{-1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}\le$$

$$\le\frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,l=1}^{n}\log_2\max_{\left\{\substack{u,v\in M_0\\ i=\overline{1,1/2\varepsilon}}\right\}}\frac{\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)}{\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)}\right\},$$

где $2\varepsilon(i-1)<\forall\ x_i<2\varepsilon i$. Нетрудно видеть, что задача

$$\max_{\left\{\substack{i=\overline{1,1/2\varepsilon}\\ u,v\in M_0}\right\}}\frac{\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)}{\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)}\to\min_{\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u+k,v+l}},$$

где

$$\sum_{i=1}^{1/2\varepsilon}\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)=\sum_{i=1}^{1/2\varepsilon}\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)=1,$$

$$\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u_1+k,v_1+l}(x_i)=\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u_2+k,v_2+l}(x_i),\ k,l=\overline{1,n},\ (u_1,v_1)\ne(u_2,v_2),u_1,u_2,v_1,v_2\in M_0,$$

имеет решение

$$\overline{\delta}^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x)=\alpha_{k,l}\max_{u,v\in M_0}\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x),$$

$$0<\alpha_{k,l}=\left(\sum_{i=1}^{1/2\varepsilon}\max_{u,v\in M_0}\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)\right)^{-1}\le 1.$$

Тогда

$$0\le\overline{R}_1\le\frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,l=1}^{n}\log_2\frac{1}{\alpha_{k,l}}\right\}.$$

Несложно доказать точное неравенство

$$\frac{1}{\alpha_{k,l}}\le\min\left\{\frac{1}{2\varepsilon},\left(\frac{m}{n}\right)^2\right\},$$

где знак равенства будет иметь место для части распределений вида $\overline{p}^{1}_{i_0}=1$, $\overline{p}^{1}_{i}=0,\ i\ne i_0$.

Таким образом, точная оценка избыточности имеет вид

$$0\le\overline{R}_1\le\frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,l=1}^{n}\log_2\frac{1}{\alpha_{k,l}}\right\}\le\frac{1}{n^2}+\log_2\min\left\{\frac{1}{2\varepsilon},\left(\frac{m}{n}\right)^2\right\}.$$

Понятно, что на самом деле величина промежуточной оценки зависит от того, насколько разнятся между собой распределения вероятностей для различных блоков $n\times n$. В случае $\overline{R}_2$ аналогично получается оценка

$$0\le\overline{R}_2\le\frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,l=1}^{n}\log_2\frac{1}{\beta_{k,l}}\right\},$$

где

$$\max\left\{2\varepsilon,\left(\frac{n}{m}\right)^2\right\} \le \beta_{k,l} = \min_{j=\overline{1,1/2\varepsilon}}\left(\sum_{i=1}^{1/2\varepsilon}\max_{u,v\in M_0}\gamma^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i/x_j)\right)^{-1} \le 1.$$

Осталось рассмотреть случай нескольких процессоров. Пусть имеется n^2 процессоров $(n,\ m/n \in N)$. Алгоритм состоит в параллельной обработке n^2 блоков $m/n\times m/n$ с сохранением априорного распределения вероятности на каждом блоке. Код функции $\bar{f}_i$ имеет вид последовательности $n^2{\cdot}T$ кодов Хаффмана для сужений $\bar{f}_i$ на блоки $m/n\times m/n$ при каждом t. Тогда $0\le$ $\le \overline{R}_1,\ \overline{R}_2 \le (n/m)^2$. Отметим, что кодируя без учета распределения вероятности (равновероятностный случай), получаем

$$0\le \overline{R}_1,\ \overline{R}_2 \le \frac{1}{m^2T}\mathcal{H}^{\rho_1}_{\varepsilon}(S_1)=\log_2\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Знак равенства в оценке сверху имеет место для распределений вида $\overline{p}_{i_0}=1$, $\overline{p}_i=0,\ i\ne i_0$. Для класса S_2 все оценки остаются без изменений:

$$0\le \overline{\overline{R}}_1 \le \frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,\,l=1}^{n}\log_2\frac{1}{\alpha_{k,l}}\right\},$$

$$0\le \overline{\overline{R}}_2 \le \frac{1}{n^2}\left\{1+\sum_{k,\,l=1}^{n}\log_2\frac{1}{\beta_{k,l}}\right\},$$

где соответственно

$$\alpha_{k,l}=\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}^c_{\varepsilon}(Q)}\max_{u,v\in M_0}\delta^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i)\right)^{-1},$$

$$\beta_{k,l}=\min_{j=1,\mathcal{N}^c_{\varepsilon}(Q)}\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}^c_{\varepsilon}(Q)}\max_{u,v\in M_0}\gamma^{\varepsilon}_{u+k,v+l}(x_i/x_j)\right)^{-1}$$

и x_i принадлежит кубам со стороной 2ε, покрывающим множество Q относительно нормы C.

В заключение отметим, что изложеный во втором пункте теоретический подход к задаче сжатия информации обеспечивает в силу доказанной теоремы о монотонности энтропии построение алгоритмов, имеющих максимально достижимый коэффициент сжатия для априорно заданного класса изображений. Уменьшение коэффициента сжатия информации может быть обусловлено заменой оптимальных алгоритмов вероятностного кодирования на приемлемые практически, но не оптимальные алгоритмы.

1. *Тырыгин И. Я.* Оптимальное цифровое кодирование последовательности сложных телевизионных изображений. – Киев, 1991. – 22 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91. 13).
2. *Хаффман Д. А.* Метод построения кодов с минимальной избыточностью // Кибернет. сб. – 1961. – Вып. 3. – С. 79 – 87.
3. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. – М. : Изд-во иностр. лит., 1963. – 828 с.
4. *Цифровое кодирование графики* // Тр. ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике. – 1980. – **68**, № 7. – 214 с.
5. *Джайн А. К.* Сжатие видеоинформации // Там же. – 1981. – **69**, № 3. – С. 71 – 117.

Получено 03. 04. 91