УДК 517.938.5

В. И. Урманчев, асп. (Киев. ун-т)

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И “СМЕРТНЫХ” ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Вводятся понятия динамических систем с импульсным воздействием и “смертных” динамических систем. Рассматривается их связь с идеализациями обычных динамических систем. Разрабатываются общие методы исследования таких систем.

Впроваджуються поняття динамічних систем з імпульсною дією і “смертних” динамічних систем. Розглядається їх зв'язок з ідеалізаціями звичайних динамічних систем. Розробляються загальні методи дослідження таких систем.

Наиболее общим типом динамических систем являются топологические динамические системы, которые были введены и изучены В. В. Немыцким [1], Е. А. Барбашиным [2], а также В. Х. Готшалком и Г. А. Хелдлундом [3]. Среди топологических динамических систем важную роль играют так называемые частично-упорядоченные топологические динамические системы, введенные Барбашиным [4] и подробно изученные А. М. Стахи [5].

В настоящей статье предлагаются два обобщения понятия частично-упорядоченной топологической динамической системы, названные автором динамическими системами с импульсным воздействием и “смертными” динамическими системами.

Разрабатываются общие методы исследования таких систем и в заключение рассматриваются их простейшие типы.

Пусть (S, G, H) — частично-упорядоченная топологическая динамическая система, где S — топологическое пространство, G — топологическая группа, являющаяся одновременно частично-упорядоченным множеством, H — действие группы G на S.

Для введения обобщений понятий частично-упорядоченной топологической динамической системы рассмотрим подробнее определение действия H.

Заметим, что отображение H является, во-первых, непрерывным отображением $S \times G \to S$, а во-вторых, определено на всем множестве $S \times G$. Эти замечания позволяют предложить следующие обобщения частично-упорядоченной топологической динамической системы:

1) системы, у которых H не является непрерывным, однако сохраняет свойства действия в области непрерывности;

2) системы, у которых H определено только лишь на некотором подмножестве $Q \subset S \times G$ (точки из $S \times G \setminus Q$ переходят при этом отображении в пустое множество).

Для рассмотрения обобщения 1 введем в начале ряд понятий, связанных с отображениями топологических пространств, которые не являются непрерывными.

Пусть $f: X \to Y$ — некоторое отображение топологического пространства X с топологией Φ_x в топологическое пространство Y с топологией Φ_y. В случае нарушения непрерывности f множество

$$Rf = \{\alpha \in X: (\exists\ U(f(\alpha)) \in \Phi_y: (\forall\ V(\alpha) \in \Phi_x: f(V(\alpha)) \notin U(f(\alpha))))\} \neq \varnothing.$$

Это множество будем называть множеством точек разрыва отображения f относительно топологий Φ_x и Φ_y. Отображение $A_f = f|_{R_f}$ будем называть оператором скачка, а его действие — скачком или импульсным воздействием.

Полагая $X = S \times G$, $Y = S$, $f = \hat{H}$ и используя приведенные выше обозначения, динамику изображающей точки в случае обобщения 1 можно описать следующим образом:

а) если $(x_0, g_0) \in S \times G \setminus R_{\hat{H}}$, то x_0 движется в S под действием $H = \hat{H}|_{S \setminus R_{\hat{H}}}$ (в соответствии с порядком в G) до ее первого попадания на множество $R_{\hat{H}}$, а в момент g_1 попадания на множество $R_{\hat{H}}$ она подвергается действию оператора $A_{\hat{H}}$, переходя в некоторую точку пространства S;

б) если $x_0 \in R_{\hat{H}}$, то она сразу подвергается действию оператора $A_{\hat{H}}$.

Неудобным моментом при исследовании таких систем является то, что оператор $A_{\hat{H}}$ может быть определен на таком подмножестве $S \times G$, которое не имеет структуры декартового произведения некоторого множества $S_0 \subset S$ на G. При рассмотрении таких систем удобно перейти к рассмотрению новой системы $(\tilde{S}, G, \tilde{H})$, где $\tilde{S} = S \times G$ и $\tilde{H} : \tilde{S} \times G \to \tilde{S}$ определяется соотношением $\tilde{H}(s, g_1, g_2) = (\hat{H}_{g_1} s, g_2)$.

Таким образом заключаем, что без ограничения общности можно считать, что оператор скачка определен на некотором подмножестве S.

Резюмируя все рассуждения, касающиеся обобщения 1, заключаем, что рассмотрение тройки $(S, G, \hat{H})$ эквивалентно рассмотрению пятерки $(S, R_{\hat{H}}, A_{\hat{H}}, G, \hat{H}|_{S \times G \setminus R_{\hat{H}}})$.

Заметим, что множество $R_{\hat{H}}$ и отображения $A_{\hat{H}}$, $\hat{H}|_{S \times G \setminus R_{\hat{H}}}$ можно рассматривать независимым образом. Отсюда следует, что удобно ввести обозначения $M = R_{\hat{H}}$, $A = A_{\hat{H}}$, $H = \hat{H}|_{S \times G \setminus R_{\hat{H}}}$.

Определение 1. *Тройку $(S, G, \hat{H})$ или эквивалентную ей пятерку (S, M, A, G, H) будем называть частично-упорядоченной динамической системой с импульсным воздействием, где S — топологическое пространство, M — подмножество S с индуцированной топологией, A — отображение, определенное на M со значениями в S, G — топологическая группа, являющаяся одновременно частично-упорядоченным множеством, H — действие G на $S \setminus M$, $\hat{H}$ — разрывное отображение $S \times G$ в S.*

В дальнейшем, для краткости, частично-упорядоченную топологическую систему с импульсным воздействием будем называть динамической системой с импульсным воздействием; S будем называть фазовым пространством динамической системы с импульсным воздействием, а его элементы — изображающими точками; M — начальным множеством скачков; A — оператором скачка или импульсным воздействием; AM — конечным множеством скачков; $K = AN \cap N$ — поглощающим множеством (поскольку изображающая точка при попадании в него остается в нем, подвергаясь все время импульсному воздействию), где $N = M \cap AM$.

В случае, если $K \neq \varnothing$, может оказаться, что $\hat{H}$ является многозначным отображением $S \times G$ в S (фиксированному значению $g \in G$ соответствует несколько элементов S).

Дальнейшие определения, касающиеся понятия динамической системы с импульсным воздействием, приведем ниже.

Перейдем к рассмотрению обобщения 2.

Определение 2. *Четверку $(S, Q, G, \hat{H})$ назовем "смертной" динамичес-*

кой системой, где S — топологическое пространство; Q — подмножество S с индуцированной топологией; G — топологическая группа, являющаяся одновременно упорядоченным множеством; $\tilde{H}$ — отображение $S \times G$ в S, определяемое формулой

$$\tilde{H}x = \begin{cases} Hx, & x \in Q, \\ \varnothing, & x \in S \setminus Q, \end{cases}$$

где H — действие G на Q.

Если $\tilde{H}$ — разрывное отображение, будем говорить о "смертной" динамической системе с импульсным воздействием.

Множество $S \setminus Q$ будем называть множеством гибели изображающих точек.

Динамику "смертной" системы можно описать следующим образом: изображающая точка движется в S в соответствии с динамикой обычной динамической системы или динамической системы с импульсным воздействием до (возможного) попадания в область $S \setminus Q$, после чего эволюция заканчивается.

В статье ограничимся рассмотрением только лишь некоторых конкретных одномерных дискретных "смертных" систем.

Рассмотрим вопрос взаимосвязи введенных классов обобщенных динамических систем с обычными динамическими системами.

Пусть (S, G, H) — топологическая динамическая система; T_{x_0} $(T^+_{x_0})$ — траектория (положительная полутраектория) этой динамической системы, проходящая через (выходящая из) x_0.

Важным является случай, когда $S = R^n$, $G = R^1$, а действие определяется автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений в R^n вида $\dot{x} = f(x)$, где f удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий. В этом случае $H_t(x_0) = \Psi(t, x_0)$, где $\Psi(t, x_0)$ — решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = x_0$. При исследовании таких систем особую роль играет разбиение множества S на два подмножества: $B = \{x \in S: \| f(x) \| \geq V_{\max}\}$ — множество быстрых движений, и $S \setminus B$ — множество медленных движений. Относительно B предполагается, что оно является замкнутым и плотным в S, а $V_{\max} \in R^1_+ \cup \infty$. Дополнительно также требуется, чтобы изображающая точка не скользила по границе ∂B.

При практическом исследовании, а также построении самих математических моделей эволюционных процессов рассмотренного выше типа часто возникает необходимость введения некоторых идеализаций.

Для описания этих идеализаций понадобится классификация областей ∂B по типам положительных полутраекторий, выходящих из этих областей, а также классификация областей S по типам траекторий, проходящих через неэквивалентные области ∂B.

Введем вспомогательное обозначение. Пусть X — упорядоченное множество, $Y \subset X$, через $\min(Y)$ будем обозначать минимальный элемент множества Y.

Классификация областей ∂B:

1) $\tilde{M} = \bigcup_{x_0 \in S \setminus B} \min(T^+_{x_0} \setminus \{x_0\} \bigcap \partial B)$ — начальное множество быстрых движений (конечное множество медленных движений);

2) $\tilde{K}^* = \bigcup_{x_0 \in B} \min(T^+_{x_0} \setminus \{x_0\} \bigcap \partial B)$ — конечное множество быстрых движений (начальное множество медленных движений);

3) $M^* = \bigcup_{x_0 \in \tilde{K}} \min(T^+_{x_0} \setminus \{x_0\} \bigcap \tilde{M})$ — конечное множество медленных движений, начинающихся на $\tilde{K}$;

4) $K^* = \bigcup_{x_0 \in \tilde{M}} \min(T^+_{x_0} \setminus \{x_0\} \bigcap \tilde{K})$ — конечное множество быстрых движений, начинающихся на $\tilde{M}$;

5) $U^* = \bigcup_{x_0 \in \tilde{K}} T_{x_0} \bigcap \partial B$ — начальное множество движений, которые, начиная с некоторого момента времени, остаются только лишь в области медленных движений;

6) $V^* = \bigcup_{x_0 \in \tilde{M} \setminus M^*} T_{x_0} \bigcap \partial B$ — начальное множество движений, которые, начиная с некоторого момента времени, остаются только лишь в области быстрых движений.

Классификация областей S:

1) $\tilde{W}_1 = \bigcup_{x_0 \in B} T_{x_0}$ — множество изображающих точек, которые в ходе эволюции проходят через область быстрых движений;

2) $\tilde{W}_2 = S \setminus \tilde{W}_1$ — множество изображающих точек, которые в ходе эволюции остаются лишь в области медленных движений;

3) $\tilde{W}_3 = \bigcup_{x_0 \in \{S \setminus B\} \setminus \tilde{W}_2} T_{x_0}$ — множество изображающих точек, которые в ходе эволюции попадают в область медленных движений, проходя при этом конечное число раз в области быстрых движений;

4) $\tilde{W}_4 = \bigcup_{x_0 \in V^*} T_{x_0}$ — множество изображающих точек, которые в ходе эволюции попадают в область быстрых движений и остаются в ней, проходя конечное число раз в ходе предварительной эволюции через область медленных движений;

5) $\tilde{W}_5 = \tilde{W}_1 \setminus \tilde{W}_3$ — множество изображающих точек, которые в ходе эволюции счетное число раз проходят через область быстрых движений и медленных движений.

Теперь можем перейти к описанию идеализаций и предварительной классификации траекторий идеализированных систем.

Первый шаг идеализаций состоит в рассмотрении в качестве фазового пространства области медленных движений $S \setminus B$, а быстрые движения заменяются действием оператора $\tilde{A}: \tilde{M} \to K^*$, действующего по правилу

$$\tilde{A} y = \begin{cases} \min\{T^+_y \bigcap K^*\}, & y \in M^*, \\ \varnothing, & y \in \tilde{M} \setminus M^*. \end{cases}$$

При такой идеализации множество $\tilde{M}$ называют начальным множеством скачков, а $\tilde{M} \setminus M^*$ — множеством гибели траекторий. При попадании изображающей точки на $\tilde{M} \setminus M^*$ говорят, что она гибнет по Вожелю. Для систем, у которых $\tilde{M} \setminus M^* \neq \varnothing$, ставятся задачи о времени жизни изображающей точки и вероятности ее гибели в ходе эволюции.

Оператор $\tilde{A}$ называют оператором скачка, а его действие — "мгновенным скачком" или импульсным воздействием.

Множество K^* называют конечным множеством скачков, а $\tilde{K} \setminus K^*$ — начальным множеством движений, впервые подвергающихся импульсному воздействию;

U^* — начальным множеством движений, которые в ходе эволюции конечное число раз подвергаются импульсному воздействию, а затем уходят от импульсного воздействия;

V^* — начальным множеством движений, которые в ходе эволюции конечное число раз подвергаются импульсному воздействию, а затем гибнут;

$\tilde{W}_1 \setminus B$ — множеством изображающих точек, которые в ходе эволюции подвергаются импульсному воздействию;

$\tilde{W}_2 \setminus B$ — множеством изображающих точек, которые в ходе эволюции не подвергаются импульсному воздействию;

$\tilde{W}_3 \setminus B$ — множеством изображающих точек, которые в ходе эволюции конечное число раз подвергаются импульсному воздействию, а затем уходят от импульсного воздействия;

$\tilde{W}_4 \setminus B$ — множеством изображающих точек, которые в ходе эволюции конечное число раз подвергаются импульсному воздействию, а затем гибнут;

$\tilde{W}_5 \setminus B$ — множеством изображающих точек, которые в ходе эволюции счетное число раз подвергаются импульсному воздействию.

Второй шаг идеализации состоит в рассмотрении непрерывного отображения $\Phi: \{S \setminus B\} \to \tilde{S}$, где $\tilde{S}$ — некоторое топологическое пространство с индуцированной топологией, которое и считается в дальнейшем фазовым пространством. На $\tilde{S}$ можно определить множества

$$W_i = \Phi(\tilde{W}_i \setminus B), M = \Phi(\tilde{M}), K = \Phi(\tilde{K}), M_1 = \Phi(M^*),$$

$$K_1 = \Phi(K^*), U = \Phi(U^*), V = \Phi(V^*),$$

а на M — оператор $A: M \to K_1$ по формуле $A = \Phi(\tilde{A})$, сохраняя за ними названия, принятые при первом шаге идеализации. Предполагается также, что действие H группы G индуцирует некоторое действие группы G на $\tilde{S}$.

Рассмотрение второго шага идеализации позволяет сделать вывод, что множество, где происходит импульсное воздействие, может являться произвольным подмножеством фазового пространства, не обязательно являющимся границей последнего, как при первом шаге идеализации.

Описанный класс идеализированных систем соответствует классу дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, теория которых бурно развивается в настоящее время [6, 7].

Очевидно, абстрактной математической моделью описанного класса идеализированных систем являются динамические системы с импульсным воздействием и "смертные" динамические системы.

Пусть (S, M, A, G, H) — топологическая динамическая система с импульсным воздействием. При попытке сведения задачи исследования этой системы к исследованию общей топологической динамической системы естественно перейти к рассмотрению некоторой тройки, объединив рассмотрение S, M, A. Для этого в начале введем в качестве фазового пространства S / A и определим на нем однопараметрическую полугруппу преобразований $H_g^*: S / A \to S / A$, индуцируемую группой преобразований H_g. Пусть $W: S \to S / A$ — естественное факторное отображение. Положим $H_g^* = W(H_g(W^{-1}))$.

Определение 3. *Тройку $\{S / A, G, H^*\}$ будем называть приведенной динамической системой с импульсным воздействием.*

Важным понятием в теории обычных динамических систем является понятие траектории, а также положительной и отрицательной полутраекторий. В теории динамических систем с импульсным воздействием эти понятия можно ввести по аналогии, используя отображения H^* и $\hat{H}$, где $(S, G, \hat{H})$ — эквивалентное представление динамической системы с импульсным воздействием.

Определение 4. *Множество $\hat{T}_{x_0} = \{\hat{H}_g x_0, g \in G\}$ будем называть траек-*

торией топологической динамической системы с импульсным воздействием, проходящей через точку $x_0 \in S$*; множество* $\hat{T}^+_{x_0} = \{\hat{H}_g x_0, g \geq l\}$ *будем называть положительной полутраекторией, выходящей из точки* $x_0 \in S$*; множество* $\hat{T}^-_{x_0} = \{\hat{H}_g x_0, g \leq l\}$ *будем называть отрицательной полутраекторией, входящей в точку* $x_0 \in S$.

Определение 5. *Множество* $T^*_{x_0} = \{H^*_g x_0, g \in G\}$ *будем называть приведенной траекторией топологической динамической системы с импульсным воздействием, проходящей через точку* $x_0 \in S/A$*; множество* $T^{*+}_{x_0} = \{H^*_g x_0, g \geq l\}$ *будем называть положительной полутраекторией, выходящей из точки* $x_0 \in S/A$*; множество* $T^{*-}_{x_0} = \{H^*_g x_0, g \leq l\}$ *будем называть приведенной отрицательной полутраекторией, входящей в точку* $x_0 \in S/A$.

Поскольку $S/A = \bigcup_{x_0 \in S/A} T^*_{x_0}$, то тем самым, исходя из аналогии с теорией дифференциальных уравнений, имеем следующее определение.

Определение 6. *Множество* S/A *будем называть интегральным множеством топологической динамической системы с импульсным воздействием.*

Приведенная динамическая система с импульсным воздействием, вообще говоря, не является обычной динамической системой, поэтому представляет интерес выделение некоторой ее максимальной подсистемы, которая является обычной динамической системой, причем естественно интересоваться только лишь теми движениями, которые в ходе своей эволюции подвергаются импульсному воздействию.

Для определения такой подсистемы понадобятся вспомогательные определения, связанные со свойствами множеств $M_A = M \cup AM$ и $M^*_A = M_A/A$, являющихся своеобразными сепаратрисами на множествах S и S/A соответственно.

Определение 7. *Множество* M_A *будем называть* (A, M) *сепаратрисой, а* M^*_A — (A, M) *фактор-сепаратрисой.*

Особую роль играет устойчивость M^*_A и M_A относительно H^* и H соответственно, это мотивирует следующее определение.

Положим $M^{*+}_A = \bigcup_{x_0 \in S/A} T^+_{x_0} \cap M^*_A$.

Определение 8. *Множество* $P = \bigcup_{x_0 \in M^{*+}_A} T^{*+}_{x_0}$ *будем называть устойчивым интегральным подмножеством динамической системы с импульсным воздействием, а его дополнение к* S/A — *неустойчивым интегральным подмножеством.*

Положим $G^* = Pr_G(H^{*-1}|_P(M^{*+}_A))$.

Тройка $(P, G^*, H^*|_{P \times G^*})$, вообще говоря, не является частично упорядоченной топологической динамической системой, поскольку для нее определение траектории некорректно.

Для обеспечения корректности рассмотрим специальное разбиение G^*.

Положим $G_x = Pr_G(H^{*-1}(T^*_x \cap P))$. Очевидно, $G^* = \bigcup_{\alpha \in M^*_A} G^*_\alpha$. Среди $\alpha \in M^{*+}_A$ введем отношение эквивалентности Y, считая $\alpha_1 Y \alpha_2$, если $G_{\alpha_1} \cong G_{\alpha_2}$, и положим $M^*_A / Y = \{M_\gamma, \gamma \in I\}$

Определение 9. *Множества* $P_\gamma = \bigcup_{x_0 \in M_\gamma} I_{x_0}^{*+}$ *будем называть элементарными устойчивыми интегральными подмножествами.*

Определение 10. *Множества* $P_\gamma \cap M_A^{*+}$ *будем называть фактор-сепаратрисами элементарных устойчивых интегральных подмножеств.*

Определим композицию $\times$ элементов G_γ^* с помощью формулы

$$H_{g_1 \times g_2}^* = H_{g_1}^* \circ H_{g_2}^* = w(H_{g_1}(w^{-1}wH_{g_2}(w^{-1}))).$$

Предположим, что G_γ^* с композицией $\times$ и топологией, индуцируемой G^*, является топологической группой, порядок в G_γ^* индуцируется порядком в G, а $H^*|_{P_\alpha \times G_\alpha^*}$ непрерывно относительно топологий $P_\alpha \times G_\alpha^*$ и P_α.

При рассмотренных предположениях тройки $(P_\alpha, G_\alpha^*, H^*|_{P_\alpha \times G_\alpha^*})$ являются топологическими динамическими системами.

Определение 11. *Семейство троек* $(P_\alpha, G_\alpha^*, H^*|_{P_\alpha \times G_\alpha^*})$ *будем называть семейством топологических динамических систем, ассоциированных с исходной динамической системой с импульсным воздействием.*

Основная сложность при переходе к рассмотрению семейства динамических систем состоит в том, что, вообще говоря, $w^{-1}w \not\equiv E$, и следовательно, нельзя воспользоваться соотношением $H_{g_1} \circ H_{g_2} = H_{g_1 \times g_2}$, чтобы рассматривать (локально) H^* как действие.

Проблема также состоит в том, что $w^{-1}w$ является отображением, вообще говоря, многозначным и необходимо исследовать вопрос выбора соответствующей ветви (или их семейства) отображения $w^{-1}w$ для обеспечения того, чтобы $H^*|_{P_\alpha \times G_\alpha^*}$ было действием G_α^* на P_α.

Исследовав семейство топологических динамических систем, ассоциированных с исходной динамической системой с импульсным воздействием и рассмотрев множества $P_\alpha \setminus M_\alpha$, $\alpha \in I$, можно получить глобальное описание динамики импульсного воздействия в области, соответствующей устойчивому интегральному подмножеству.

Метод изучения свойств динамической системы с импульсным воздействием, основанный на изучении топологических свойств его элементарных интегральных подмножеств, топологической структуры фактор-сепаратрис этих подмножеств и особенностей их вложения, а также основанный на исследовании семейства топологических динамических систем, ассоциированных с исходной системой, будем называть методом фактор-множеств.

Первые примеры приложения данного метода можно найти в классической монографии [8], где он применялся к исследованию конкретной системы. Однако указанная методика не получила дальнейшего развития.

Метод фактор-множеств может быть использован в основном для ответа на вопрос о возможном качественном поведении изображающих точек динамических систем с импульсным воздействием.

Важнейшим понятием в теории обычных динамических систем является понятие топологической эквивалентности. Введем аналог этого понятия для динамических систем с импульсным воздействием.

Определение 12. *Топологические динамические системы с импульсным воздействием* (S, M_1, A_1, G, H_1) *и* (S, M_2, A_2, G, H_2) *назовем:*

1) *ω-эквивалентными, если: а) семейства топологических динамических систем* $(P_1^{\alpha}, G_1^{*\alpha}, H_1^{*\alpha})$ *и* $(P_2^{\alpha}, G_2^{*\alpha}, H_2^{*\alpha})$, *ассоциированные с соответствующими (по нижним индексам) топологическими динамическими системами с импульсным воздействием, топологически эквивалентны; б) фактор-сепаратрисы* M_{α} *этих систем топологически эквивалентны, одинаково вложены в* P_{α}, $\alpha \in I$, *и имеют одинаковые особенности пересечения с траекториями динамической системы, соответствующей* P_{α};

2) *α-эквивалентными, если топологические динамические системы с импульсным воздействием* (S, M_1, A_1, G, H_1) *и* (S, M_2, A_2, G, H_2) *ω-эквивалентны, где* $H_{ig} = H_{ig^{-1}}$;

3) *топологически эквивалентными, если они одновременно являются ω- и α-эквивалентными.*

Одним из важнейших методов исследования обычных динамических систем является метод точечных изображений. Для динамических систем с импульсным воздействием точечное изображение можно определить следующим образом: сопоставим системе (S, M, A, G, H) систему (S, M, E, G, H), где E — тождественное отображение, и пусть $\hat{T}_{x_0}$ — траектория второй системы, проходящая через точку x_0; введем в рассмотрение отображение $L: AM \to M$ по формуле $L(y) = \hat{T}_y \cap M$ и положим $F = A \circ L$.

Отображение F будем называть отображением последования для динамической системы с импульсным воздействием.

Суть метода точечных отображений в применении к исследованию динамических систем с импульсным воздействием состоит в исследовании дискретной динамической системы, определяемой разностным уравнением $a_{n+1} = F(a_n)$, где $a_0 \in L(AM)$.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных классов динамических систем с импульсным воздействием. Как показано в работе [6], наиболее простым классом динамических систем с импульсным воздействием на сфере является класс, который характеризуется тем, что M является гладким одномерным многообразием, A — гомеоморфизмом, а действие H, определяемое автономной системой дифференциальных уравнений на сфере, удовлетворяет условию трансверсальности траекторий к M_A.

Рассмотрим вопрос существования таких систем.

Теорема 1. *Пусть M — несвязное объединение окружностей, гладко вложенных в S^2; A — гомеоморфизм, определенный на M со значениями в S^2, удовлетворяющий условиям:*

1) $\operatorname{card}(M \cap AM) < +\infty$;

2) $\dim (M \cap AM) = 0$.

Тогда существует такое действие H группы R^1 на S^2, что траектории динамической системы (S^2, R^1, H) будут трансверсальны к M_A при условии заданной устойчивости компонент связности M, рассматриваемом как множество положений равновесия.

Применяя к указанному классу динамических систем метод фактор-множеств, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть для динамической системы с импульсным воздействием на сфере (S^2, M, A, G, H) выполняются следующие условия:*

1) *M — гомеоморфно конечному несвязному объединению окружностей;*

2) *A — гомеоморфизм такой, что* card $(M \cap AM) < +\infty$, dim $(M \cap AM) = 0$;

3) *действие* H *задается автономной системой дифференциальных уравнений на* S^2, *для которой* M *является множеством положений равновесия и траектории трансверсальны к* M_A.

Тогда существует двумерное компактное многообразие D *и система непересекающихся путей* $L = L(A)$ *в* D, *а также одномерное клеточное пространство* K *такие, что устойчивое подмножество* $P = D / L$, *а фактор-сепаратриса* $P' = K / L$.

Теорема 3. *Пусть* (S^2, M, A, R^1, H) *— динамическая система с импульсным воздействием на сфере, удовлетворяющая условиям теоремы* 2, *а также условию конечности числа особых точек и сепаратис для автономной системы дифференциальных уравнений, определяющей действие. Тогда возможны следующие типы строения и поведения траекторий в области, соответствующей устойчивому интегральному многообразию.*

1) *Траектории, счетное число раз подвергающиеся импульсному воздействию и гомеоморфные счетному объединению непересекающихся отрезков. Эти траектории либо имеют в качестве* ω*-предельных множеств объединение конечного числа разрывных сепаратрис, либо всюду плотно заполняют некоторую область, являясь устойчивыми по Пуассону. Число таких областей конечно.*

2) *Траектории, конечное число раз подвергающиеся импульсному воздействию и представляющие собой либо разрывные одномерные циклы, являющиеся либо предельными, либо целиком заполняющими некоторую область, либо нульмерные предельные циклы.*

3) *Траектории, уходящие от импульсного воздействия.*

Приведенная теорема является аналогом теоремы Пуанкаре — Бендиксона.

В заключение статьи рассмотрим один пример одномерности дискретной "смертной" динамической системы, который, несмотря на простоту исходной системы, демонстрирует сложную динамику "жизни" и "гибели" изображающих точек, а также рассмотрим вероятностные характеристики этой системы.

Пусть $S = R^1$, $Q = (-\infty, 1)$, $G = Z$, а действие H определяется разностным уравнением $a_{n+1} = 3 \mid x - 1/2 \mid - 1/2$.

Приведем без доказательства только лишь конечные результаты.

Множество "бесконечной" жизни изображающих точек представляет собой канторовское трихотомическое множество K на отрезке $[0, 1]$. Оно содержит счетное всюду плотное в K множество циклов произвольных периодов и континуум непериодических, ограниченных и устойчивых по Пуассону движений.

Поскольку мера K равна нулю, то геометрическая вероятность гибели изображающих точек равна единице.

1. *Немыцкий В. В.* Общие динамические системы // Докл. АН СССР. – 1946. – **53**, № 6. – С.495 – 498.
2. *Барбашин Е. А.* О гомеоморфизмах динамических систем // Там же. – 1948. – **61**, № 3. – С.429 – 432.
3. *Готшалк В. Х., Хелдлунд Г. А.* Topological dynamics Providence // Amer. Math. Soc. – 1955. – **36**. – P. 1 – 151.
4. *Барбашин Е. А.* О поведении точек при гомеоморфных преобразованиях пространства // Докл. АН СССР. – 1946. – **5**, № 1. – С. 3 – 5.
5. *Стахи А. М.* Топологические свойства частично-упорядоченных динамических систем // Там же. – 1967. – **172**, № 5. – С. 1032 – 1035.
6. *Урманчев В. И.* Динамические системы с импульсным воздействием на сфере. – Киев, 1990. – 33 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.15).
7. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
8. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Получено 27. 02. 91