УДК 534.1

А.А. Евтушенко, канд. физ.-мат. наук (Львов. ун-т),
А.К. Прикарпатский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН Украины, Львов)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ИНТЕГРО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для исследования сингулярных интегральных уравнений с особым ядром типа Коши предлагается использовать параметрический интегро-интерполяционный метод путем замены регулярной части некоторой квадратурной формулой с последующим обращением сингулярного интеграла. Обосновывается вычислительная схема, а также оценка скорости сходимости полученного с ее помощью приближенного решения к точному.

Для дослідження сингулярних інтегральних рівнянь з особливим ядром типу Коші пропонується використати параметричний інтегро–інтерполяційний метод шляхом заміни регулярної частини деякою квадратурною формулою з подальшим оберненням сингулярного інтеграла. Обґрунтовується обчислювальна схема, а також оцінка швидкості збіжності одержаного з її допомогою наближеного розв'язку до точного.

Ряд важных смежных задач теории упругости [1], аэрогидродинамики [2], дифракции волн [3] приводит к решению сингулярных интегральных уравнений вида

$$K\varphi = f, \tag{1}$$

где сингулярный оператор K действует по правилу

$$(K\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Здесь L – некоторая простая гладкая кривая в плоскости C^1, $t \in L$, функции a, b, f, φ и $K \in H^{(\alpha)}(L)$, где $H^{(\alpha)}(L)$ — пространство комплекснозначных $L \to C^1$ функций, удовлетворяющих условию Гельдера [4] с показателем $\alpha \in [0, 1)$. Тогда по теореме Привалова – Племеля [4] оператор K действует из $H^{(\alpha)}(L)$ в $H^{(\alpha)}(L)$, что дает возможность обычным путем [4–6] регуляризировать задачу, сведя ее к интегральному уравнению Фредгольма и тем самым доказав ее разрешимость. Однако для практических целей такой подход неэффективен как из–за большой сложности конечных выражений, так и вследствие трудностей решения самого интегрального уравнения Фредгольма. Поэтому используются приближенные методы решения уравнений вида (1), основанные на теории дискретных уравнений в свертках [5, 7], свойствах ортогональных полиномов [1, 2] и др. В настоящей работе предлагается способ исследования сингулярных интегральных уравнений вида (1) с помощью параметрического интегро–интерполяционного метода [8–10].

Пусть ядро K в операторе (1) равномерно принадлежит по первой переменной классу $H^{(\alpha)}(L)$, а по второй – классу $C^{(s)}(L)$, $s \geq 1$. Сопоставим оператору K интегрального уравнения (1) оператор K_n вида

$$(K_n\varphi)(t) = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(t,t_j)\varphi(t_j), \tag{2}$$

где $t_j \in L$ и $A_j^{(n)} \in C^1, j = \overline{1,n}$; $n \in Z_+$, — некоторые величины, выбранные так, чтобы функционал

$$Q_n(g) = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} g(t_j) \tag{3}$$

для любого полинома $g \in C^{(r)}(L)$, $(g^{(r+1)}|_L = 0)$ степени $r \geq 0$ совпадал с интегралом $\int_L g(\tau)d\tau$. Очевидно, построенный таким образом оператор K_n также действует из $H^{(\alpha)}(L)$ в $H^{(\alpha)}(L)$. В силу оценок, полученных в [9, 11] при $n \to \to \infty$, справедливо, что $K_n \to K$ в равномерной метрике Гельдера. Таким образом, решая интегральное уравнение $(K_n\varphi_n)(t) = f(t)$, получаем равномерное стремление последовательности φ_n при $n \to \infty$ к функции φ, удовлетворяющей исходному уравнению (1). Но согласно [4–6] интегральное уравнение $K_n\varphi_n = f$ разрешимо явно в виде

$$\varphi_n(t) = -a(t)\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} K(t,t_j)\varphi_n(t_j) + a(t)f(t) -$$

$$-\frac{b(t)}{\pi i}W(t)\int\limits_L \frac{f(\tau)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \frac{b(t)}{\pi i}W(t)\sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \varphi_n(t_j)\int\limits_L \frac{K(\tau,t_j)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + \sum_{k=1}^{\chi} c_k\xi_k(t). \tag{4}$$

Здесь $c_k \in C^1$, $\xi_k(t)$, $k = \overline{1,\chi}$, — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения с $K \equiv 0$,

$$W(t) = \left[t^{\chi}\Pi(t)\right]^{-1/2}\exp\Gamma(t),$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - t}\ln\left[\tau^{-\chi}\Pi(\tau)\frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right],$$

$$\Pi(t) = (t - z_0)^{\chi},\ z_0 \in L,\ \chi = \arg\left[\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\right]_L \Bigg| \geq 0, \tag{5}$$

причем предполагается, что сингулярное уравнение (1) имеет нормальный тип [4–6], т.е. $a(t) \pm b(t) \neq 0 \ \forall\ t \in L$. С учетом формул (4), (5) можно записать решение $\varphi_n(t)$ в явном виде, решая предварительно линейную систему алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_n(t_j)$, $j = \overline{1,n}$. Постоянные c_k, $k = = \overline{1,\chi}$, определяются, исходя из дополнительных условий, налагаемых обычно на решение $\varphi(t)$ уравнения (1).

Оценим поточечно решение (4). Пусть для квадратурной формулы (3) выполнены условия, сформулированные выше. Тогда согласно [9, 11] существует число $q_r > 0$ такое, что

$$\left| Q_n(g) - \int\limits_L g(\tau)\, d\tau \right| \le q_r \cdot \omega_r\left(\frac{l}{n}, g; C(L)\right). \tag{6}$$

Здесь $l = \int_L |d\tau|$, $\omega_r(t, g; C(L))$ — модуль непрерывности порядка r для функции $g \in C(L)$ в равномерной метрике. Пользуясь (6), из (4) получаем оценку

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le D(t)\omega_r\left(\frac{l}{n}, \varphi; C(L)\right), \tag{7}$$

где $\varphi(t)$ — решение уравнения (1),

$$D(t) = q_r |a(t)| \sup_{L\times L} |K(t,\tau)| + \frac{q_r}{\pi} |b(t)W(t)| \sup_{L\times L} |K(t,\tau)| \left| \int\limits_L \frac{d\tau}{W(\tau)(\tau - t)} \right|.$$

Поскольку $\varphi \in H^{(\alpha)}(L)$, то из (7) следует, что $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ при $n \to \infty$ поточечно, причем, если $\varphi \in C^{(m)}(L)$ и $\varphi^{(m)} \in H^{(\beta)}(L)$, то из (7) получаем $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| = O(n^{-(m+\beta)})$, т.е. известный результат работы [11].

Более подробно исследуем случай постоянных коэффициентов a и b в уравнѐнии (1). Пусть задано интегральное уравнение вида (1), где $a, b \in R^1$ — постоянные числа, функции $K(t, \tau)$ и $f(t)$ непрерывны на отрезке $L = [-1, 1] \subset R^1$. Уравнения такого типа часто встречаются при решении плоских задач упругого равновесия тел с трещинами [12], контактных задач [13] и в других случаях. Для решения такого сингулярного интегрального уравнения воспользуемся формулой (4), где в качестве интерполяционной квадратурной формулы (3) возьмем выражение, соответствующее “методу трапеций” [8]

$$Q_n(g) = \frac{2}{n}\left[\frac{g(t_0) + g(t_n)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} g(t_j)\right], \tag{8}$$

где $t_j = -1 + 2j/n,\ j = \overline{1,n}$. Если $g \in C^{(2)}([-1, 1])$, то для (7) справедлива оценка

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} g(t)\,dt - Q_n(g) \right| \le \frac{2}{3n^2} \sup_{t\in[-1,1]} \left| f^{(2)}(t) \right|. \tag{9}$$

Достаточное условие сходимости формулы (8) к интегралу $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ имеет вид [11]

$$\int\limits_{-1}^{1} d\tau \left| Q_n(t-\tau)_+ - \int\limits_{-1}^{1} (t-\tau)_+\, dt \right| \le \frac{2}{3n^2}, \tag{10}$$

где $(t - \tau)_+ = (t - \tau)$, если $t \ge \tau$, и 0, если $t < \tau$. С учетом соотношения (8) находим частное решение интегрального уравнения (1):

$$\varphi_n(t) = -\frac{2a}{n}\sum_{j=1}^{n-1} K(t,t_j)\varphi_n(t_j) - \frac{2a}{n}\left[\frac{K(t,t_0)\varphi_n(t_0)}{2} + \frac{K(t,t_n)\varphi_n(t_n)}{2}\right] +$$

$$+af(t)-\frac{b}{\pi i}W(t)\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+\frac{b}{\pi i}W(t)\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_n(t_j)\int_{-1}^{1}\frac{K(\tau,t_j)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{b(t)}{\pi i}W(t)\left[\frac{\varphi_n(t_0)}{2}\int_{-1}^{1}\frac{K(\tau,t_0)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+\frac{\varphi_n(t_n)}{2}\int_{-1}^{1}\frac{K(\tau,t_n)}{W(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}\right],$$

где

$$W(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},\ \alpha=N-i\omega,\ \beta=M+i\omega,$$

$$-(\alpha+\beta)=-(N+M)=1,\ -1\le \mathrm{Re}(\alpha,\beta)<0,\ W(0)=1,$$

$$\omega=\frac{1}{2\pi}\ln\left[\frac{a-ib}{a+ib}\right],\ N,M\in Z_+.$$

Отсюда, на основании оценок (7) – (10), следует, что поточечно на $[-1, 1]$ справедливо соотношение

$$\left|\varphi_n(t)-\varphi(t)\right|=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Полагая, например, $n = 100$, получаем точность приближения решения, достаточную для практических вычислений.

В заключение отметим, что в случае систем сингулярных интегральных уравнений вида (1) из–за неразрешимости в общем случае характеристического уравнения для исходного матричного оператора K эффективность рассмотренного выше интегро-интерполяционного метода будет невелика. Представляется естественным применение этого метода в сочетании с другим, например, методом ортогональных полиномов [1–3], что должно привести как к повышению эффективности получения конечных результатов, так и к уменьшению количества вычислительных алгоритмов при решении исходной задачи.

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.– М.: Наука, 1977.– 312 с.
2. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях.– М.: Наука, 1985.– 256 с.
3. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах.– Киев: Наук. думка, 1989.– 256 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.–М.: Гостехиздат, 1962.–599 с.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.– М.: Наука, 1977.– 640 с.
6. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.– М.: Наука, 1970.– 379 с.
7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.– М.: Наука, 1978.– 295 с.
8. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.– М.: Наука, 1979.– 254 с.
9. *Грилицкий Д. В., Евтушенко А. А., Прикарпатский А. К.* Об оценке квадратурной формулы на отрезке в классе непрерывных функций и теорема типа Банаха – Штейнгауза // Мат. физика и нелинейн. механика.– 1989.– **45**, вып. 11.– С. 10–11.
10. *Дробышевич В. И., Дымников В. П., Ривин Г. С.* Задачи по вычислительной математике. – М.: Наука, 1980.– 144 с.
11. *Butzer P. L.* The Banach – Steinhays theorem with rates and applikations to various branches of analysis // Int. Ser. Numer. Math.– 1980.– **47**, №2.– P. 299–331.
12. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.– Киев: Наук. думка, 1981.– 324 с.
13. *Джонсон К.* Механика контактного всаимодействия.– М.: Мир, 1989.– 510 с.

Получено 13.09.91