УДК 515.12

М. М. Зарічний, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун–т)

ДЕЯКІ ГОМОТОПІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКТОРІВ ЗІ СКІНЧЕННИМИ НОСІЯМИ

Доведено, що нормальні в розумінні Є.В.Щепіна функтори зі скінченними носіями в категорії компактів є неперервними в топології гомотопічно n-регулярної збіжності К.Куратовського в просторі LC^n-підмножин метричного компакту. Такі функтори зберігають також властивість відображень поліедрів індукувати ізоморфізм гомотопічних груп виміру не більшого за n.

Доказано, что нормальные в смысле Е.В.Щепина функторы с конечными носителями в категории компактов являются непрерывными в топологии гомотопически n-регулярной сходимости К.Куратовского в пространстве LC^n-подмножеств метрического компакта. Такие функторы сохраняют также свойство отображений полиэдров индуцировать изоморфизм гомотопических групп размерности не больше n.

Поняття функтора зі скінченними носіями, що діє в підкатегоріях категорії топологічних просторів, охоплює багато конструкцій загальної та алгебраїчної топології, топологічної алгебри [1]. На даний час одержано багато результатів про збереження такими функторами класів абсолютних околових ретрактів (екстензорів) та близьких до них класів просторів [2, 3]. Ряд результатів стосується гомотопічних властивостей функторів: О.М.Дранішников [4] та В.М. Басманов [5] довели теореми про збереження функторами класів LC^n– та C^n–компактів, В.М. Басманов [5] показав, що у деяких випадках функтори можуть підвищувати зв'язність компакта на одиницю.

В доведеннях результатів даної праці, що дають нові гомотопічні властивості функторів, істотно використовуються методи недавно створеної теорії менгерівських многовидів [6, 7].

1. Наведемо деякі необхідні означення; детальніше див. [8]. Всі вихідні простори та відображення, якщо не припускається протилежне, беруться з категорії компактів Comp. Коваріантний функтор $F: \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ називається нормальним [8], якщо він неперервний, мономорфний, епіморфний, зберігає вагу, перетини, прообрази, точку та порожню множину. Для нормального функтора F та точки $a \in FX$ множина $\mathrm{supp}\,(a) = \bigcap\{A \in \exp X \mid a \in FA \subset FX\}$ називається носієм точки a. Якщо всі такі носії скінченні, то функтор F називається функтором зі скінченними носіями. Клас нормальних функторів зі скінченними носіями позначається $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_\infty$.

Для відображення $f: X \to Y$ нехай $F_0X = \{a \in FX \mid \mathrm{supp}(a) \subset f^{-1}(y)$ для деякого $y \in Y\}$. Легко бачити, що F_0 є ендофунктором у категорії Comp/Y компактів над Y.

Відображення $f: X \to Y$ називається м'яким відносно пари (A, B) [9], якщо для кожних відображень $\varphi: B \to X$, $\psi: A \to Y$ таких, що $f \circ \varphi = \psi \mid B$, існує відображення $\Phi: A \to X$ таке, що $f \circ \Phi = \varphi$ і $\Phi \mid B = \varphi$. Відображення f називається n-м'яким, якщо воно м'яке відносно кожної пари (A, B), де A — паракомпакт виміру, не більшого за n, а множина B замкнена в A, і називається n-оборотним, якщо воно м'яке відносно кожної пари $(A, \varnothing)$, де A — паракомпакт виміру, не більшого за n.

Через μ_n позначається n-вимірний універсальний компакт Менгера [6], через Q — гільбертів куб.

2. У множині $LC^n(X)$ компактних LC^n-підмножин метричного простору X вводиться топологія гомотопічно n-регулярної збіжності [10]. За означенням послідовність $(A_i)_{i\in\omega}$ в $LC^n(X)$ збігається до $A_\omega \in LC^n(X)$, якщо вона збігається до A_ω в метриці Гаусдорфа і є equi-LC^n, тобто для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\eta > 0$ таке, що для будь-якого відображення $f: S^k \to A_i$, $k \le n$, з $\operatorname{diam}(f(S^k)) < \eta$ існує продовження $\bar{f}: B^{k+1} \to A_i$ з $\operatorname{diam}(\bar{f}(B^{k+1})) < \varepsilon$.

Теорема 1. *Нехай $F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_\infty$ і F зберігає клас метризовних ANR-компактів. Тоді відображення $F: LC^n(Q) \to LC^n(FQ)$ неперервне.*

Доведення. Нехай $(A_i)_{i\in\omega}$ — послідовність в $LC^n(Q)$, що збігається до $A_\omega \in LC^n(Q)$, і $X = \{(a, i) \in Q \times (\omega+1) \mid a \in A_i\}$, $f = pr_2 \mid X: X \to \omega + 1$. Тоді відображення f є локально $(n+1)$-м'яким [9]. Нехай $g: Z \to X$ — $(n+1)$-оборотне відображення, де Z — метричний компакт і $\dim Z \le n + 1$ [9]. Існує вкладення $j: Z \to \mu_{n+1} \times (\omega+1)$ таке, що $pr_2 \circ j = f \circ g$.

Оскільки відображення f локально $(n+1)$-м'яке, то існує компактний окіл $U \supset j(Z)$ в $\mu_{n+1} \times (\omega+1)$ та відображення $r: U \to X$ таке, що $r \circ j = g$ і $f \circ r = pr_2 | U$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що існує компактний μ_{n+1}-многовид $M \subset \mu_{n+1}$, для якого $j(Z) \subset (\operatorname{int} M) \times (\omega+1) \subset M \times (\omega+1) \subset U$. Зауважимо, що відображення $r' = r \mid (M \times (\omega+1))$ є $(n+1)$-оборотним.

Застосувавши до відображень f, r' та $pr_2: M \times (\omega+1) \to \omega + 1$ функтор F_0 (в категорії $\mathrm{Comp}/(\omega+1)$) та врахувавши факт збереження функтором F властивості $(n+1)$-оборотності [4], одержуємо, що відображення $F_0 r' = Fr \mid (Fr')^{-1}(F_0 X)$ є $(n+1)$-оборотним. Звідси випливає, що відображення $F_0 f$ є локально $(n+1)$-м'яким, а отже, послідовність $(FA_i)_{i\in\omega}$ збігається до FA_ω в просторі $LC^n(FQ)$. Теорема доведена.

3. Для кожного компактного поліедра X існує μ_{n+1} — многовид X' та $(n+1)$-оборотне поліедрально $(n+1)$-м'яке відображення $\alpha: X' \to X$ (μ_{n+1}-резольвента [7]).

Теорема 2. *Нехай $F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_\infty$ і F зберігає клас метризовних ANR-компактів. Тоді для кожної μ_{n+1}-резольвенти $\alpha: X' \to X$ компактного поліедра X відображення $F\alpha: FX' \to FX$ індукує ізоморфізм гомотопічних груп виміру, не більшого за n.*

Доведення теореми 2 грунтується на методі, запропонованому О.М. Дранішниковим в [4] для доведення збереження функторами класу LC^n-просторів.

Теорема 3. *Нехай $F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_\infty$ і F зберігає клас метризовних ANR-компактів. Тоді F зберігає властивість відображень компактних поліедрів індукувати ізоморфізм гомотопічних груп виміру, не більшого за n.*

Доведення. Нехай відображення $f: X \to Y$ компактних поліедрів індукує ізоморфізм гомотопічних груп виміру, не більшого за n, і $\alpha: X' \to X$, $\beta: Y' \to Y$ — μ_{n+1}-резольвенти. Оскільки відображення β є $(n+1)$-оборотним, то існує відображення $f': X' \to Y'$ таке, що $f \circ \alpha = \beta \circ f'$. Тоді, очевидно, відображення f' μ_{n+1}-многовидів індукує ізоморфізм гомотопічних груп виміру, не більшого за n. З теореми Бествіни [6] випливає, що у цьому випадку існує відображення $g: Y' \to X'$, для якого композиції $g \circ f$ та $f \circ g$ n-гомотопні відповідним тотожнім відображенням (два відображення $h_0, h_1: A \to B$ називаються n-гомотопними, якщо гомотопні композиції $h_0 \circ k$ та $h_1 \circ k$ для кожного відображення $k: C \to A$, де $\dim C \le n$ [11]).

Лема. *Кожен нормальний функтор зі скінченними носіями зберігає відношення n-гомотопності відображень.*

Доведення легко випливає з властивості збереження такими функторами властивості n-оборотності [4].

Застосувавши до відображень f, f', α, β та g функтор F та скориставшись лемою і теоремою 2, одержуємо, що відображення Ff індукує ізоморфізм гомотопічних груп виміру, не більшого за n.

Наслідок. Нехай $F \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_\infty$, і F зберігає клас метризовних ANR-компактів. Якщо (X, A) — компактна поліедральна пара, для якої $\pi_i(X, A) = 0$ при $i \le n$, то $\pi_i(FX, FA) = 0$ при $i \le n$.

4. Результати п. 3 можуть бути поширені на функтори вигляду $\varinjlim\{F^{(i)}\}: \mathrm{Comp}^\infty \to \mathrm{Comp}^\infty$, де $F^{(i)}$ — нормальний функтор степеня i [1], зокрема на функтори $\exp^\infty$, P^∞ та ін.

1. *Zarichnyi M. M.* On covariant topological functors. I // Quest. and Answers in Gen. Topol. – 1990. – **8**, № 2. – P. 317 – 369.
2. *Федорчук В. В.* О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов // Успехи мат. наук. – 1984. – **39**, вып.5. – С. 169 – 208.
3. *Федорчук В. В.* Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы // Там же. – 1986. – **41**, вып.6. – С. 121 – 159.
4. *Дранишников А. Н.* Ковариантные функторы и экстензоры в размерности n // Там же. – 1985. – **40**, вып.6. – С. 133 – 134.
5. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы конечных степеней и связность // Докл. АН СССР.–1984.–**279**, №6.– С.1289–1293.
6. *Bestvina M.* Characterizing k–dimensional universal Menger compacta. Mem. AMS. – 1988. – № 380. – 110 p.
7. *Дранишников А. Н.* Универсальные менгеровские компакты и универсальные отображения // Мат. сб. – 1986. – **129**, № 1. – С. 17 – 30.
8. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, вып.3. – С. 3 – 62.
9. *Дранишников А. Н.* Абсолютные экстензоры в размерности n и n-мягкие отображения, повышающие размерность // Там же. – 1984. – **39**, вып.5. – С. 55 – 95.
10. *Kuratowski K.* Quelques propriétés de l'espace des ensembles LC^n // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. – 1957. – **5**, № 10. – P. 967 – 974.
11. *Чигогидзе А.Ч.* n-шейпы и n-когомотопические группы компактов // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 3. – С. 322 – 335.

Одержано 29.01.91