УДК 517. 928

Н. А. Сотниченко, канд. физ.-мат. наук (Киев. инж.-строит. ин-т)

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С "МЕДЛЕННЫМ" ВРЕМЕНЕМ

Изучается вопрос существования ограниченных решений на всей числовой оси нелинейной системы первого порядка с "медленным" временем.

Досліджується питання існування обмежених розв'язків на всій числовій осі нелінійної системи першого порядку з "повільним" часом.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x + \varphi(\tau,x,\varepsilon), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $A(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,x,\varepsilon)$ непрерывны по τ, x, ε, $\tau = \varepsilon^{\alpha}t$, $\alpha \in R_+$, $t \in R$.

Изучается вопрос существования ограниченных решений системы (1) на всей числовой оси, при этом существенно учитываются результаты работ [1 – 5].

Относительно системы (1) предполагаем, что

$$\|\varphi(\tau,0,\varepsilon)\| \le h, \tag{2}$$

$$\|\varphi(\tau,x_1,\varepsilon) - \varphi(\tau,x_2,\varepsilon)\| \le L\|x_1 - x_2\|, \tag{3}$$

h, L постоянные, $A(\tau,\varepsilon)$ ограниченная $\forall t, \varepsilon$ на всей числовой оси квазидиагональная матрица:

$$\|A(\tau,\varepsilon)\| \le H, \; A(\tau,\varepsilon) = [A_1(\tau,\varepsilon), A_2(\tau,\varepsilon)],$$

где $A_1(\tau,\varepsilon)$ — n_1-мерная, $A_2(\tau,\varepsilon)$ – $n_2 = n - n_1$-мерная матрицы, $H = \text{const}$.

Рассмотрим системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = A_1(\tau,\varepsilon)u, \quad \frac{dv}{dt} = A_2(\tau,\varepsilon)v.$$

Пусть нормальные фундаментальные матрицы этих систем $\Phi_1(t,s,\varepsilon)$, $\Phi_2(t,s,\varepsilon)$ [1 – 5] удовлетворяют оценкам

$$\|\Phi_1(t,s,\varepsilon)\| \le c\exp(-\omega(t-s)) \;\; \forall t \ge s, \tag{4}$$

$$\|\Phi_2(t,s,\varepsilon)\| \le c\exp(\omega(t-s)) \;\; \forall t \le s, \tag{5}$$

c, ω — положительные постоянные.

Положим

$$x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \; y \in R^{n_1}, \; z \in R^{n_2},$$

тогда в силу структуры матрицы $A(\tau,\varepsilon)$ систему (1) перепишем таким образом:

$$\frac{dy}{dt} = A_1(\tau,\varepsilon)y + Y(\tau,x,\varepsilon); \quad \frac{dz}{dt} = A_2(\tau,\varepsilon)z + Z(\tau,x,\varepsilon). \tag{6}$$

Теперь наряду с системой (6) рассмотрим [4] систему интегральных уравнений

$$y = \int_{-\infty}^{t} \Phi_1(t, s, \varepsilon)\, Y(\sigma, x, \varepsilon)\, ds, \quad z = -\int_{t}^{\infty} \Phi_2(t, s, \varepsilon)\, Z(\sigma, x, \varepsilon)\, ds, \quad \sigma = \varepsilon^{\alpha} s. \quad (7)$$

Решим ее методом последовательных приближений

$$x_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0, \quad x_m = \begin{pmatrix} y_m \\ z_m \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$y_m = \int_{-\infty}^{t} \Phi_1(t, s, \varepsilon)\, Y(\sigma, x_{m-1}, \varepsilon)\, ds, \quad (9)$$

$$z_m = -\int_{t}^{\infty} \Phi_2(t, s, \varepsilon)\, Z(\sigma, x_{m-1}, \varepsilon)\, ds. \quad (10)$$

Оценим полученные приближения:

$$\| y_1 \| \le \int_{-\infty}^{t} \| \Phi_1(t, s, \varepsilon) \| \| Y(\sigma, 0, \varepsilon) \|\, ds.$$

Используя оценки (4) и (2), получаем

$$\| y_1 \| \le \int_{-\infty}^{t} c e^{-\omega(t-s)} h\, ds = hc e^{-\omega t} \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{t} e^{\omega s}\, ds = hc e^{-\omega t} \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{\omega} \left[e^{\omega s} \right]_a^t =$$

$$= \frac{hc}{\omega} e^{-\omega t} \lim_{a \to -\infty} \left[e^{\omega t} - e^{\omega a} \right] = \frac{hc}{\omega} e^{-\omega t} \left(e^{\omega t} - 0 \right) = hc / \omega$$

или

$$\| y_1 \| \le hc / \omega.$$

Аналогично с учетом (5), (2) $\| z_1 \| \le hc / \omega$. Из этих неравенств следует

$$\| x_1 \| \le 2hc / \omega.$$

Покажем теперь, что при всех t и $m = 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\| x_m - x_{m-1} \| \le \left(\frac{2cL}{\omega} \right)^m \frac{h}{L}. \quad (11)$$

Предположим по индукции, что (11) выполнено. Оценим разность $x_{m+1} - x_m$. Из (9), (10) имеем

$$\left\| y_{m+1} - y_m \right\| \le \int_{-\infty}^{t} \| \Phi_1(t, s, \varepsilon) \| \left\| Y(\sigma, x_m, \varepsilon) - Y(\sigma, x_{m-1}, \varepsilon) \right\| ds,$$

отсюда, используя (3), (4), (11), получаем

$$\left\| y_{m+1} - y_m \right\| \le \int_{-\infty}^{t} c e^{-\omega(t-s)} L \left(\frac{2cL}{\omega} \right)^m \frac{h}{L}\, ds = cL \left(\frac{2cL}{\omega} \right)^m \frac{h}{\omega L} = \frac{cL}{\omega} \left(\frac{2cL}{\omega} \right)^m \frac{h}{L},$$

т. е.

$$\| y_{m+1} - y_m \| \le \frac{cL}{\omega} \left(\frac{2cL}{\omega} \right)^m \frac{h}{L}.$$

Аналогично

$$\| z_{m+1} - z_m \| \le \frac{cL}{\omega}\left(\frac{2cL}{\omega}\right)^m \frac{h}{L}.$$

Из этих неравенств следует

$$\| x_{m+1} - x_m \| \le \left(\frac{2cL}{\omega}\right)^{m+1} \frac{h}{L}. \tag{12}$$

Неравенство (12) есть неравенство (11) с заменой m на $m+1$. Неравенство (11) доказано. Из (11) вытекает, что если $L < \omega / 2c$, то последовательность $x_m(t, \varepsilon)$ равномерно сходится. Положим

$$\lim_{m \to \infty} x_m(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon).$$

Из (11) следует

$$\| f(t, \varepsilon) \| \le \frac{2ch}{\omega - 2cL}.$$

Переходя в (9), (10) к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся, что $f(t, \varepsilon)$ является решением системы интегральных уравнений (7). Дифференцируя (7) по t, устанавливаем, что $f(t, \varepsilon)$ есть решение системы (6).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть система нелинейных дифференциальных уравнений* (1) *такова, что справедливы сформулированные выше предположения. Тогда она имеет ограниченное решение.*

Замечания. 1. Если в системе (1) $A(\tau, \varepsilon)$ и $\varphi(\tau, x, \varepsilon)$ периодичны по τ, то она имеет периодическое решение.

Достаточно полно это показано в работе [3].

2. Если в системе (1) матрица $A(\tau, \varepsilon)$ не квазидиагонального, а более общего вида, то при определенных условиях существует линейное преобразование с ограниченной (периодической) матрицей [3, 4], сводящее ее к рассмотренному виду (1).

Следует отметить глубокие исследования нелинейных систем с медленно меняющимися переменными в монографии [6].

1. *Флатто Л., Левинсон Н.* Периодические решения сингулярно возмущенных систем // Математика. – 1958. – Вып. 2:2. – С. 61 – 68.
2. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
3. *Самойленко А. М.* Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 181 – 191.
4. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
5. *Плисс В. А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1977. – С. 168 – 173.
6. *Митропольский Ю. А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – 280 с.

Получено 11. 04. 91