УДК 511.3

Я. М. Холявка, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

ПРО НУЛІ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЯКОБІ

Одержано оцінку кількості нулів функції $F(r) = P(r, \operatorname{sn} r)$, де $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\operatorname{sn} z$ — еліптична функція Якобі.

Получена оценка количества нулей функции $F(r) = P(r, \operatorname{sn} r)$, где $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\operatorname{sn} z$ — эллиптическая функция Якоби.

Нехай $\operatorname{sn} z$ — еліптична функція Якобі, 4ω і $2\omega'$ — довільна фіксована пара її основних періодів.

Теорема 1. *Функції z та $\operatorname{sn} z$ алгебраїчно незалежні.*

Доведення. Нехай $P(\operatorname{sn} z, z) \equiv 0$, $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$, $P \not\equiv 0$, P — незвідний; a відмінне від полюсів $\operatorname{sn} z$. Оскільки для періоду 4ω $\operatorname{sn} a = \operatorname{sn}(a + 4n\omega)$, то всі числа $a + 4n\omega$ є коренями $P(\operatorname{sn} a, z)$. Тому знайдуться різні $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ такі, що $a + 4n_1\omega = a + 4n_2\omega$. Але тоді $\omega = 0$. Це протиріччя доводить теорему.

Теорема 2. *Нехай $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, $\deg_x P \le L$, $\deg_y P \le M$, $M \ge 1$. Тоді порядок нуля функції $F(z) = P(z, \operatorname{sn} z)$ не більше $8ML + 4M + 1$.*

Доведення. Візьмемо $a \in \mathbb{C}$ — довільне число, відмінне від полюсів $\operatorname{sn} z$. Якщо $L = 0$, то $\operatorname{ord}_a F(z) \le 2M$. Нехай $L \ge 1$. Припустимо, що $\Omega = \operatorname{ord}_a F \ge 8ML + 4M + 2$. Тоді

$$\operatorname{ord}_a \left(P'_X(z, \operatorname{sn} z))^2 - (\operatorname{sn}' z P'_Y(z, \operatorname{sn} z))^2 \right) \ge \Omega - 1. \tag{1}$$

Враховуючи ди[illegible]ьне рівняння для $\operatorname{sn} z$, одержуємо

$$Q \ [\text{illegible}]\ P'_X(X, Y))^2 - (1 - Y^2)(1 - \kappa^2 Y^2)(P'_Y(X, Y))^2. \tag{2}$$

Нехай $R(Y)$ [illegible]зультант многочленів P і Q. Тоді

$$\deg R \le 2M(2L + 1) < (\Omega - 1)/2. \tag{3}$$

Але з (1), (2) маємо, що a є коренем R кратності не менше $\Omega - 1$, що з урахуванням порядку $\operatorname{sn} z$ суперечить (3). Тому $R \equiv 0$.

Нехай P — незвідний многочлен, $A(z)$ — старший коефіцієнт $P(X, \operatorname{sn} z)$. Виберемо в $\mathbb{C}$ відкриту однозв'язну множину U таку, що в U: 1) $A(z) \neq 0$; 2) $P(X, \operatorname{sn} z)$ може мати лише прості корені. Визначимо $g(z)$ з умови $P(g(z), \operatorname{sn} z) \equiv 0$. Тоді

$$(g'(z) P'_X(g(z), \operatorname{sn} z))^2 - (\operatorname{sn}' z P'_Y(g(z), \operatorname{sn} z))^2 = 0. \tag{4}$$

Оскільки $R(y) \equiv 0$ і P — незвідний, то $Q(g(z), \operatorname{sn} z) = 0$. Звідси, враховуючи (2) і (4), одержуємо алгебраїчну залежність z і $g(z)$. Оскільки $g(z)$ і $\operatorname{sn} z$ алгебраїчно залежні за побудовою, то z і $\operatorname{sn} z$ алгебраїчно залежні. Це протиріччя доводить теорему у випадку, коли P — незвідний многочлен. Якщо $P = P_1 \ldots P_n$, де P_k — незвідні многочлени, то застосовуючи раніше доведене для кожного P_k, одержуємо справедливість твердження теореми.

Зауважимо, що подібним шляхом аналогічні результати можна одержати для функцій $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$. Для функції $\wp(z)$ подібний результат є в [1].

1. *Reyssat E.* Approximation algebrique de nombres lies aux founctions elliptique et exponentielle // Bul. Soc. math. France. – **108**, № 1. – P. 47 – 49.

Одержано 06. 03. 92