1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Гомотопический критерий точечного отображения

*В. П. Компаниец*

1. Введение. Под многообразием понимаем связное локально эвклидовое или локально полуэвклидовое топологическое пространство (т. е. без границы или с границей), снабженное кусочно-линейной структурой. Пусть $M^m$ — $m$-мерное многообразие, $S^n$ — $n$-мерная сфера, $E^n$ — $n$-мерное эвклидово пространство. Через $\operatorname{Int} M^m$ обозначим внутренность многообразия $M^m$, через $\operatorname{Bd} M^m$ — его границу, через $\partial F$ — теоретико-множественную границу множества $F$.

Напомним следующие понятия.

Множество $K \subset M^m$ называется клеточным, если $K = \bigcap_i Q_i^m$, где $Q_i^m$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — топологические $m$-клетки и $Q_i^m \subset \operatorname{Int} Q_{i-1}^m$.

Отображение $f: M^m \to M_1$ называется точечным, если каждый прообраз $f^{-1}(x)$, $x \in M_1$, есть клеточное множество.

Отображение $f: M^m \to M^m$ многообразия $M^m$ на себя называется псевдоизотопным тождественному, если существует гомотопия $f_t: M^m \to M^m$ такая, что $f_0$ — тождественное отображение, $f_t$ — гомеоморфизм при $t < 1$, $f_1 = f$.

Существует гипотеза [1], что точечные отображения $S^n$ на себя псевдоизотопны тождественному. При $n=2$ это известный результат Юнга [12].

Дадим теперь следующее определение.

Система множеств $\{N_i\}$ ($N_i \subset S^n$, $i \in J$, где $J$ — некоторое множество индексов) называется нейтрализующей систему $\{\bar{N}_j\}$ ($\bar{N}_j \subset S^n$, $j \in \bar{J}$), если совокупность множеств $\{N_i\}$, $\{\bar{N}_j\}$ и точек из $S^n \diagdown \left(\bigcup_{i,j} N_i \cup \bigcup \bar{N}_j\right)$ образуют непрерывное разбиение $S^n$, фактор-пространство которого гомеоморфно $S^n$.

Ясно, что если $\{N_i\}$ нейтрализует $\{\bar{N}_j\}$, то и наоборот, $\{\bar{N}_j\}$ нейтрализует $\{N_i\}$. Нас будет интересовать случай, когда $N_i (i \in J)$ — континуумы, а $\{\bar{N}_j\} = F$, где $F$ — неклеточный континуум в $S^n$ (нейтрализовать имеет смысл лишь неклеточное в $S^n$ множество). По поводу нейтрализующих $F$ систем возникают следующие вопросы.

1) Какова размерность множества $f\left(\bigcup_i N_i\right)$, всегда ли $\dim f\left(\bigcup_i N_i\right) > 0$? (Заметим, что счетным и тем более конечным числом континуумов нельзя нейтрализовать неклеточное в $S^n$ множество [6, 3]).

2) Как зависят гомологические (когомологические) и гомотопические свойства элементов нейтрализующей системы от аналогичных свойств нейтрализуемого множества?

При изучении этих вопросов, а также при попытках обобщить результат Юнга, приходим к необходимости обобщения теорем М. Брауна [3] и более детального (с гомотопической точки зрения) изучения точечных отображений.

Главный результат статьи — теорема 1, дающая характеристику точечных отображений в гомотопических терминах. Все остальные результаты прямо или косвенно с ним связаны. Отметим некоторые из них. В [6] поднимался вопрос об эквивалентности следующих двух классов отображений: отображение $f: M^m \to M_1$ называется точечным (клеточным), если прообраз $f^{-1}(x)$ любой точки $x \in M_1$ (прообраз $f^{-1}(K)$ любого клеточного множества $K \subset M_1$) клеточен. В [7] он решен положительно для $n$-мерной ($n \neq 4$) сферы. Легко доказать (следствие 4), что и в случае произвольных $n$-многообразий ($n \geqslant 5$) оба эти класса совпадают. Из теоремы 1 также вытекает, что в $S^n (n \neq 4)$ неклеточное множество не может быть нейтрализовано клеточными множествами или абсолютными ретрактами. Эти два следствия отрицательного характера являются пока единственными утверждениями о зависимости гомотопических и гомологических свойств нейтрализующих и нейтрализуемого множеств. Далее приводятся еще такие следствия основного результата: доказывается теорема Арментраута [2] для размерностей $\geqslant 5$, формулируются несколько простых следствий, дающих дополнительную информацию о многообразиях $M$, $M_1$ в случае существования точечного отображения $f: M \to M_1$. Устанавливается также, что конечномерное фактор-пространство точечного разбиения многообразия всегда есть гомотопическое многообразие в смысле Гриффитса (в случае, когда невырожденные элементы разбиения $n$-мерной сферы есть абсолютные ретракты, это доказано К. В. Кваном [8]). Другие следствия теоремы 1, в частности, о $g$-отображениях — «generic mapping» в терминологии Уайберна, будут опубликованы позже. Заметим, что многие результаты без труда могут быть перенесены на пространства более общие, чем многообразия.

Все рассматриваемые в дальнейшем отображения являются отображениями «на». Предполагается также, что в случае многообразий с границей, невырожденные прообразы отображения, заданного на данном многообразии, принадлежат внутренности многообразия.

Будем в дальнейшем обозначать совокупность невырожденных прообразов через $G$.

2. Гомотопический критерий точечных отображений.

Теорема 1. *Пусть $M^m$, $M_1$ — многообразия, $f: M \to M_1$ — компактное отображение. Для того чтобы оно было точечным, необходимо, а при $m \geqslant 5$ и достаточно, чтобы для каждой точки $* \in M_1$ и произвольной окрестности $U(*)$ такой, что $\pi_i(U(*)) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, m-3$ выполнялось равенство*

$$\pi_i(f^{-1}(U(*))) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, m-3$$[1].

Доказательство. Необходимость. Мы докажем даже более сильное утверждение, именно: если $U$ — произвольное открытое множество из $M_1$, то

$$\pi_i(f^{-1}(U)) = \pi_i(U), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Как известно, отображение $f$ индуцирует гомоморфизм

$$f_{\#}: \pi_i(f^{-1}(U)) \to \pi_i(U), \qquad i = 0, 1, \ldots$$

Покажем, что этот гомоморфизм является на самом деле изоморфизмом. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма (ср. с теоремой 6 из [10]). *Пусть даны $M^m$, $M_1$, $f: M \to M_1$ такие, как в теореме, $K$ — $n$-мерный конечный комплекс, $g: K \to U$ — про-*

[1] Для $m > 5$ достаточно $\pi_i(f^{-1}(U(*))) = 0$, $i = 0, 1, \ldots [m/2]$.

*извольное отображение, где $U$ — область из $M_1$, $L$ — подкомплекс из $K$, $\dim L \leqslant n$, и пусть для некоторого отображения $\varphi : L \to M$ имеем $f\varphi = g/L$. Тогда существует продолжение $\Phi : K \to M$ отображения $\varphi$ такое, что $f\Phi$ гомотопно $g$.*

Доказательство леммы. Если $X$ — компактное метрическое, $Y$ — метрическое пространства, $f, g : X \to Y$ — произвольные отображения, то через $d(f, g)$ обозначаем $\max\limits_x \{\widetilde{d}(f(x), g(x)), x \in X\}$, где $\widetilde{d}$ — заданная метрика в $Y$. Пусть $V$ — такая окрестность множества $g(K)$, что $\overline{V} \subset U$ и $\varepsilon' = \varrho(g(K), \overline{U \setminus V})$, где $\varrho$ — расстояние между множествами в данной метрике. В силу теоремы 3 из [9] существует такое $\varepsilon'' > 0$, что если $f\Phi(K) \subset \overline{V}$ и $d(f\Phi, g) < \varepsilon''$, то $f\Phi$ гомотопно $g$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что существует такое отображение $\Phi : K \to f^{-1}(V)$, что $d(f\Phi, g) < \varepsilon''$.

Покроем компакт $g(K)$ конечным числом открытых шаров $\{Q_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$) диаметра $< \varepsilon$, где $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$. Пусть $\delta$ — лебегово число покрытия $\{Q_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$). Так как отображение $f$ точечно и равномерно непрерывно на $f^{-1}(\overline{V})$, то каждое множество $f^{-1}(x)$, $x \in g(K)$, можно покрыть открытым шаром $\widetilde{Q}_x$, причем так, что $\operatorname{diam} f(\widetilde{Q}_x) < \delta$ и $\widetilde{Q}_x \subset f^{-1}(V)$. Тогда $f(\widetilde{Q}_x)$ будет принадлежать по крайней мере одному из элементов покрытия $\{Q_j\}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$). Выберем конечное покрытие $\{\widetilde{Q}_\varkappa\}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, p$) множества $f^{-1}(g(K))$. Пусть $\widetilde{\delta}$ — лебегово число покрытия $\{\widetilde{Q}_\varkappa\}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, p$).

Будем строить отображение $\Phi : K \to M$, удовлетворяющее неравенству $d(f\Phi, g) < \varepsilon$, на остовах комплекса $K$.

База индукции тривиально справедлива: в качестве $\Phi(v_\iota)$ ($\iota = 1, 2, \ldots, \iota_0$), где $v_\iota$ — вершины комплекса $K$, выберем произвольно по точке в каждом из множеств $f^{-1}(g(v_\iota))$. Далее, по предположению индукции существует отображение $\Phi_{k-1} : L \cup K^{k-1} \to \bigcup\limits_\varkappa \widetilde{Q}_\varkappa$ такое, что

$$d(f\Phi_{k-1}, g/L \cup K^{k-1}) < \varepsilon.$$

Докажем, что тогда существует отображение $\Phi_k : L \cup K^k \to \bigcup\limits_\varkappa \widetilde{Q}_\varkappa$ и такое, что

$$\Phi_k/L \cup K^{k-1} = \Phi_{k-1} \text{ и } d(f\Phi_k, g/L \cup K^k) < \varepsilon.$$

Покажем сначала, что всегда можно предполагать, что $(k-1)$ — остов $K^{k-1}$ таков, что

$$\max_{s^k \in K^k \setminus L} \operatorname{diam} \Phi_{k-1}(\partial s^k) < \widetilde{\delta}. \qquad (*)$$

Покроем $g(K)$ конечным числом открытых шаров $Q'_q$ ($q = 1, \ldots, q_0$) таких, что $f^{-1}(Q'_q) \subset \widetilde{Q}_{i(q)}$, где $\widetilde{Q}_{i(q)} \in \{\widetilde{Q}_\varkappa\}$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots, p$). Обозначим через $\delta'$ лебегово число покрытия $\{Q'_q\}$ ($q = 1, 2, \ldots, q_0$) и выберем настолько мелкое $n$-подразбиение $K^k_{(n)}$ $k$-остова $K^k$, чтобы $\max\limits_{s^k_{(n)}} \operatorname{diam} g(s^k_{(n)}) < \dfrac{\delta'}{3}$, где $s^k_{(n)}$ — $k$-симплекс из $K^k_{(n)}$. Пусть $\Phi^{(n)}_k$ означает отображение $K^k_{(n)} \to \bigcup\limits_\varkappa \widetilde{Q}_\varkappa$. Будем строить отображение $\Phi : K \to \bigcup\limits_\varkappa \widetilde{Q}_\varkappa$ на остовах $K^0_{(n)}, K^1_{(n)}, \ldots$, причем сохраняя отображения на $K^0$, $K^1, \ldots$ На остове $K^0_{(n)}$ всегда можно построить отображение $\Phi^{(n)}_0 : K^0_{(n)} \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$ и притом так, что $\Phi^{(n)}_0 / K^0 = \Phi_0$.

В силу предположения индукции существует отображение $\Phi^{(n)}_{k-1} : K^{k-1}_{(n)} \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$ и такое, что $\Phi^{(n)}_{k-1} / K^{k-1} = \Phi_{k-1}$ и $d\,(f\Phi^{(n)}_{k-1},\ g/K^{k-1}_{(n)}) < \frac{\delta'}{3}$. Тогда $\operatorname{diam} f\Phi^{(n)}_{k-1}(\partial s^k_{(n)}) < \delta$, $s^k_{(n)} \in K^k_{(n)}$, и, следовательно,

$$\max_{s^k_{(n)} \in K^k_{(n)} \setminus L} \operatorname{diam} \Phi^{(n)}_{k-1}(\partial s^k_{(n)}) < \widetilde{\delta}.$$

Таким образом, мы всегда можем предполагать справедливым неравенство (*). Но тогда $\Phi_{k-1}(\partial s^k) \subset \widetilde{Q}$, а $g\,(s^k) \subset Q$, где $\widetilde{Q} \in \{\widetilde{Q}_\varkappa\}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$, $Q \in \{Q_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ и $f\,(\widetilde{Q}) \subset Q$. Так как $\pi_{k-1}(\widetilde{Q}) = 0$, то существует продолжение $\Phi_k / s^k : s^k \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$ отображения $\Phi_{k-1} / \partial s^k : \partial s^k \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$, причем $\Phi_k(s^k) \subset \widetilde{Q}$ и $f\Phi_k(s^k) \subset Q$. Следовательно,

$$d\,(f\Phi_k / s^k,\ g/L \cup K^k) < \varepsilon.$$

Проводя это же рассуждение для остальных $k$-мерных симплексов, получим требуемое отображение $\Phi_k : L \cup K^k \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$ такое, что

$$d\,(f\Phi_k,\ g/L \cup K^k) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Доказательство необходимости условия теоремы теперь завершается как обычно. В силу леммы $f_{\#}$ является эпиморфизмом. Покажем, что $f_{\#}$ является и мономорфизмом. Пусть $[\bar{\alpha}]$ — произвольный элемент из $\pi_n(f^{-1}(U))$ и $[\alpha] = f_{\#}[\bar{\alpha}]$ — тривиальный элемент из $\pi_n(U)$, $n > 0$, т. е. $\alpha = f\bar{\alpha}$ гомотопно в $U$ отображению $\alpha_1 : S^n \to x_0$, где $x_0$ — некоторая точка из $U$. Согласно лемме существует такая гомотопия $H\,(x, t) : S^n \times I \to f^{-1}(U)$ при $K = S^n \times I$ и $L = (S^n \times 0) \cup (S^n \times 1)$, что

$$H\,(S^n, 0) = \bar{\alpha}, \qquad fH\,(S^n, 1) = x_0.$$

Следовательно, $H\,(S^n, 0)$ гомотопно отображению в точку, что и означает мономорфность $f_{\#}$. Необходимость доказана.

**Достаточность** $(m \geqslant 5)$. Пусть $*$ — произвольная точка из $M_1$ и $W$ — произвольная окрестность $f^{-1}(*)$. Покажем, что существует топологическая $n$-клетка $Q^n$ такая, что

$$\operatorname{Int} Q^n \supset f^{-1}(*), \qquad Q^n \subset W.$$

В силу непрерывности разбиения многообразия $M$, индуцированного отображением $f$, существует такая шаровая окрестность $V$ точки $*$, что $f^{-1}(V) \subset W$. По предположению $\pi_i(f^{-1}(V\,(x))) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m - 3$, для произвольной точки $x \in M_1$. Методом, аналогичным изложенному при доказательстве необходимости, можно показать, что

$$\pi_i(f^{-1}(V \setminus *)) = 0, \qquad i = 0, 1.$$

Тогда из точности гомотопической последовательности пары $(f^{-1}(V(\cdot)), f^{-1}(V\setminus\cdot))$ и указанных равенств следует, что

$$\pi_i(f^{-1}(V(\cdot)), \quad f^{-1}(V\setminus\cdot))=0, \qquad i=0,1,2.$$

Согласно теореме 3.1 из [11] существует компакт $E\subset f^{-1}(V(\cdot))$ и гомеоморфизм $h:f^{-1}(V(\cdot))\to f^{-1}(V(\cdot))$ такой, что двумерный остов $T^2$ триангуляции $f^{-1}(V(\cdot))$ содержится в $h(f^{-1}(V\setminus\cdot))$ и $h/f^{-1}(V(\cdot)\setminus E)=1/f^{-1}(V(\cdot)\setminus E)$.

Следуя Столлингсу [11], образуем комплекс $\mathfrak{M}$ прибавлением к $T^2$ всех симплексов из $f^{-1}(V(\cdot))$, которые не пересекают $f^{-1}(\cdot)$. В первом барицентрическом подразбиении комплекса $f^{-1}(V(\cdot))$ возьмем комплекс $\mathfrak{N}$, дополнительный к $\mathfrak{M}$. Применяя к $f^{-1}(V(\cdot))$ и $\mathfrak{N}$ теорему 3.1 из [11], получим клетку $Q'$, содержащую внутри себя $\mathfrak{N}$. Существует гомеоморфизм $h':f^{-1}(V(\cdot))\to f^{-1}(V(\cdot))$ такой, что

$$h(f^{-1}(V\setminus\cdot))\cup h'(\operatorname{Int} Q')=f^{-1}(V(\cdot)).$$

В качестве клетки $Q$ возьмем $h^{-1}h'(Q')$. Теорема доказана.

В случае $m=3$ достаточность условий $(\pi_i(f^{-1}(V(\cdot)))=0,\ \ i=0,1,2,3)$ теоремы 1 также можно доказать, но лишь для неприводимых 3-многообразий, т. е. таких, где каждая гомотопная нулю полиэдральная 2-сфера ограничивает клетку.

Теорема 1′. *Отображение* $f:M^m\to M_1$ ($m\geqslant 5$, $M$, $M_1$ — многообразия) *тогда и только тогда точечно, когда для всякого открытого множества* $U\subset M_1$ *справедливы равенства*

$$\pi_i(f^{-1}(U))=\pi_i(U), \qquad i=0,1,2,\ldots,m-3.$$

На самом деле, при доказательстве необходимости условий теоремы 1 доказано больше. Именно:

Теорема 1″. *Если отображение* $f:M\to M_1$ *(*$M$, $M_1$ *— произвольные многообразия) точечно, то*

$$\pi_i(f^{-1}(U))=\pi_i(U), \qquad i=0,1,2,\ldots,$$

*для произвольного открытого множества* $U\subset M_1$.

Следствие 1. *Пусть* $M$, $M_1$ *— произвольные многообразия. Если существует точечное отображение* $f:M\to M_1$, *то эти многообразия гомотопически эквивалентны* (так как $f_{\#}:\pi_i(M)\to\pi_i(M_1)$ — изоморфизм при всех $i\geqslant 0$).

Следствие 2. *Пусть* $f:M^m\to M_1(m\geqslant 5)$ *— отображение многообразий,* $f^{-1}(y)\,(y\in M_1)$ *—* $(m-3)$*-связно и* $LC^{m-3}$. *Тогда* $f$ *точечно.*

Доказательство. По теореме Смейла [10] для произвольного открытого множества $U\subset M_1$ справедливы равенства

$$\pi_i(f^{-1}(U))=\pi_i(U), \qquad i=0,1,2,\ldots,m-3.$$

По теореме 1′ такие отображения точечны.

3. Некоторые применения теоремы 1.

Теорема 2 (ср. с теоремой 1 [8]). *Конечномерные фактор-пространства непрерывных точечных разбиений* $m$*-мерных* ($m>0$) *компактных многообразий являются гомотопическими* $m$*-многообразиями.*

Доказательство. Пусть $M^m$ — компактное $m$-многообразие, $D$ — непрерывное точечное разбиение $M$ и $f:M\to D^*$ — точечное отображение, индуцированное данным разбиением. В предположении, что $D^*$ — $LC^\infty$ — пространство (что будет доказано позже), покажем, что для произвольной точки $y\in D^*$ существует пара окрестностей $V(y)$ и $W(y)$ таких, что $V\subset W$.

и отображение вложения $i:(V\setminus y)\to(W\setminus y)$ индуцирует гомоморфизм $i_{\#}:\pi_i(V\setminus y)\to\pi_i(W\setminus y)$, $i=0,1,2,\ldots$, такой, что

$$i_{\#}(\pi_i(V\setminus y))=\pi_i(S^{m-1}),\quad i=0,1,2,\ldots$$

Пусть $W$ — произвольная окрестность точки $y\in D^*$, $f^{-1}(y)=F$ и $U$ — такая клеточная окрестность $F$, что $f(U)\subset W$. Выберем окрестность $V(y)$ такую, что $V(y)\subset W(y)$ и $f^{-1}(V)\subset U$. Пусть $\varphi:S^k\to(V\setminus y)$ — любое непрерывное отображение $k$-сферы ($k=0,1,2,\ldots$). Точно так же, как в доказательстве теоремы 1, можно построить такое отображение $\widetilde{\varphi}:S^k\to\to f^{-1}(V\setminus y)$, что $f\widetilde{\varphi}\sim\varphi$ в $V\setminus y$. Так как существует гомотопия $H_1$: $S^k\times I\to\to(U\setminus F)$ $(k\neq m-1)$ такая, что $H_1(S^k\times 0)=\widetilde{\varphi}$, $H_1(S^k\times 1)=\cdot\in U\setminus F$, то существует и гомотопия $H:S^k\times I\to(W\setminus y)$ $(k\neq m-1)$ такая, что

$$H(S^k\times 0)=\varphi,\qquad H(S^k\times 1)=y_1\in W\setminus y.$$

В случае $k=m-1$ группа $\pi_{m-1}(U\setminus F)=Z$ и, следовательно, из соображений, аналогичных изложенным в конце доказательства необходимости в теореме 1, имеем, что

$$i_{\#}(\pi_i(V\setminus y))=\pi_i(S^{m-1}),\qquad i=0,1,2,\ldots$$

Докажем теперь (см. также [10]), что $D^*$ — $LC^\infty$-пространство. Заметим, что $D^*$ метризуемо. Пусть обозначения $V$, $W$, $U$ имеют тот же смысл, что и выше. Нужно доказать, что любое отображение $\varphi:S^k\to V(k=0,1,2,\ldots)$ гомотопно нулю в $W$.

Пусть $\{Q_i^{(n)}\}$ $(i=1,2,\ldots,i_n;\ \ n=1,2,\ldots)$ — последовательность конечных покрытий компакта $\varphi(S^k)$, причем такая, что

$$\operatorname{diam} Q_i^{(n)}<\frac{1}{n},\qquad i=1,2,\ldots,i_n.$$

Для каждого $n=1,2,\ldots$ можно построить отображение $\widetilde{\varphi}_n:S^k\to U(k>0)$ такое, что

$$d(\varphi,f\widetilde{\varphi}_n)<\frac{1}{n},\ f\widetilde{\varphi}_n(S^k)\subset\bigcup_{i=1}^{i_n}Q_i^{(n)}.$$

Пусть $\widetilde{H}_p:S^k\times I\to U$ такая гомотопия, что $\widetilde{H}_p(S^k\times 0)=\widetilde{\varphi}_p$, $\widetilde{H}_p(S^k\times 1)=\widetilde{\varphi}_{p+1}$, где $p$ — целое. Тогда отображения $f\widetilde{\varphi}_p$ и $f\widetilde{\varphi}_{p+1}$ будут гомотопны в $W$, т. е. существует отображение $H_p$:$S^k\times I\to W$ такое, что

$$H_p(S^k\times 0)=f\widetilde{\varphi}_p,\qquad H_p(S^k\times 1)=f\widetilde{\varphi}_{p+1}.$$

Требуемая гомотопия $H:S^k\times I\to W$ такая, что

$$H(S^k\times 0)=f\widetilde{\varphi},\qquad H(S^k\times 1)=\varphi,$$

теперь строится следующим образом:

$$H(x,t)=\begin{cases}H_1(x,2t), & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2ex] H_n(x,(n^2+n)t-n^2+1), & \dfrac{n-1}{n}\leqslant t\leqslant\dfrac{n}{n+1},\ n=2,3,\ldots,\\[2ex] \varphi(x),\ t=1.\end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть* $f: M \to E^n(S^n)$, $n \geqslant 5$, — *точечное отображение. Тогда* $M \approx E^n(S^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\pi_i(M) = \pi_i(E^n), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

и если $C$ — произвольный компакт из $M$, то в качестве компакта $D$, требуемого в определении односвязности в бесконечности, можно взять $f^{-1}(D_0)$, где $D_0$ — такой компакт, что

$$D_0 \supset f(C), \qquad \pi_1(E^n \setminus D_0) = 0.$$

Согласно критерию Столлингса [11] (обобщенной гипотезы Пуанкаре) $M$ гомеоморфно $E^n(S^n)$.

Следствие 4. *Всякое точечное компактное отображение $m$-многообразия ($m \geqslant 5$) на многообразие клеточно.*

Следствие 5. *Неклеточное множество в $S^n (n \neq 4)$ не может быть нейтрализовано клеточными.*

Следствие 6. *Абсолютные ретракты не могут нейтрализовать неклеточное множество в $S^n (n \neq 4)$.*

Теорема 4. (ср. с теоремой 5 [2]). *Пусть $f: E^n(S^n) \to M$ $(n \geqslant 5)$ — монотонное отображение на многообразие со счетным числом невырожденных прообразов. Тогда* $M \approx E^n(S^n)$.

Доказательство. Очевидно, что $\dim M = n$. Тогда методами, изложенными в [6], можно показать, что такое отображение точечно. В силу критерия точечного отображения

$$\pi_i(E^n) = \pi_i(M), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Кроме того, $M$ односвязно в бесконечности, ибо для произвольного компакта $C \subset M$ существует шар $Q^n \subset E^n$, причем такой, что

$$Q^n \supset f^{-1}(C), \quad \partial Q^n \cap G = 0, \quad \pi_1(M^n \setminus f(Q^n)) = \pi_1(E^n \setminus Q^n) = 0.$$

Следовательно, по Столлингсу [11] $M \approx E^n$ (по обобщенной гипотезе Пуанкаре $M \approx S^n$)*.

Теорема 4'. *Пусть $f: S^n \to M$ ($M$ — многообразие) — точечное отображение. Тогда* $M \approx S^n$.

Теорема 5. *Пусть $f: M^m \to M_1 (m \geqslant 5)$ — такое отображение многообразий $M$ и $M_1$, что все невырожденные прообразы односвязны и $LC'$, а $\dim f(G) = 0$. Тогда $f$ — точечное отображение.*

Доказательство. По теореме Скляренко — Бялыницкого-Бирули ([5,4]) для всякой точки $* \in M_1$ и произвольной окрестности $U$ такой, что $H_i(U) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, имеем: $H_i(f^{-1}(U)) = 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Если $U$ еще и такова, что $\pi_1(U) = 0$, то по теореме Смейла [10] и $\pi_1(f^{-1}(U)) = 0$. Применяя теорему Гуревича, получаем

$$\pi_i(f^{-1}(U)) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots;$$

отсюда в силу теоремы 1 вытекает точечность отображения $f$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра. Топология, 1962, сер. «Итоги науки», Изд-во АН СССР, М., 1963.
2. S. Armentrout, Upper semicontinuous decompositions of $E^3$ with most countably many non degenerate element, Ann. Math., v. 78, 1963, 605—618.

* Легко доказать и такую теорему: *если $f$: $E^n \to M$ точечное отображение, то* $E^n \approx M$

3. М. Браун, Доказательство обобщенной теоремы Шенфлиса, Математика 5 : 5, 1962, 14.
4. A. Bialynicky-Birula, On Vietoris mapping theorem and its inverse, Fund. Math., v. 53, 1964, 135—145.
5. Е. Г. Скляренко, О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии, УМН, т. 19, № 6, 1964, 47—70.
6. В. П. Компаниец, О монотонных отображениях $n$-мерной сферы на себя, УМЖ, № 6, 1965, 10—104.
7. В. П. Компаниец, А. В. Чернавский, Эквивалентность двух классов отображений $n$-сферы (в печати).
8. K. W. Kwun, A fundamental theorem on decomposion of the sphere into points and tame arcs, Proc. Amer. Math. Soc., v. 12, 1961, 47—50.
9. M. H. A. Newman, Local connection in locally compact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., v. 1, 1950, 44—53.
10. St. Smale, A Vietoris mapping theorem for homotopy, Proc. Amer. Math. Soc., v. 8, 1957, 604—610.
11. J. R. Stallings, The piecwise linear structure of euclidean space, Proc. Cambr. Phil. Soc., v. 58, 1962, 481—488.
12. J. W. T. Youngs, The topological theory of Fréchet surfaces, Ann. Math., v. 45, 1944, 753—785.

Поступила 10.I 1966 г.
Киев