1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Асимптотический анализ распределений случайных величин, связанных в цепь Маркова

*А. Н. Литвинов*

1. Пусть

$$\xi_0^{(n)},\ \xi_1^{(n)},\ \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)} \tag{1.1}$$

— последовательность серий случайных величин таких, что последовательные суммы этих величин

$$\eta_0^{(n)} = \xi_0^{(n)},\ \eta_1^{(n)} = \xi_0^{(n)} + \xi_1^{(n)}, \ldots, \eta_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{(n)} \tag{1.2}$$

образуют однородную цепь Маркова, при этом

$$\Pi_n(s, x) = P\{\xi_{k+1}^{(n)} < x/\eta_k^{(n)} = s\}. \tag{1.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_q(s, n) = \int x^q d_x \Pi_n(s, x), \quad q = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

$$\Pi_n(s, k, x) = P\{\eta_{m+k}^{(n)} - \eta_m^{(n)} < x/\eta_m^{(n)} = s\} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{1.5}$$

$$f_n(s, \lambda) = \int e^{i\lambda x} d_x \Pi_n(s, x); \quad f_n(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda x} d_x \Pi_n(s, k, x). \tag{1.6}$$

Результаты работы формулируются в трех теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть моменты $\alpha_q(s, n)$ случайных величин $\xi_k^{(n)}$ существуют до третьего порядка включительно и допускают разложения*

$$\alpha_1(s, n) = \frac{a(s)}{n} + \frac{\alpha_{13}(s)}{n^{3/2}} + \frac{\psi_{13}(s, n)}{n^{3/2}},$$

$$\alpha_2(s, n) = \frac{b(s)}{n} + \frac{\alpha_{23}(s)}{n^{3/2}} + \frac{\psi_{23}(s, n)}{n^{3/2}}, \tag{1.7}$$

$$\alpha_3(s, n) = \frac{\alpha_{33}(s)}{n^{3/2}} + \frac{\psi_{33}(s, n)}{n^{3/2}},$$

*где $\psi_{q3}(s, n) \to 0$ $(q = 1, 2, 3)$ при $n \to \infty$, коэффициенты $a(s)$, $b(s)$ имеют 7, а коэффициенты $\alpha_{q3}(s)$ $(q = 1, 2, 3) - q + 3$ ограниченных гельдеровых производных, при этом $b(s)$ отграничен от нуля (условие невырожденности). Пусть, кроме того, выполнено условие (С) Крамера*

$$\overline{\lim_{|\lambda| \to \infty}} |f_n(s, \lambda)| < 1 \tag{1.8}$$

*и существует $B > 0$ такое, что равномерно по $s$ и $\lambda$*

$$\left| \frac{\partial^{l+q}}{\partial s^l \partial \lambda^q} f_n(s, \lambda) \right| < \frac{B}{n^{q/2}}, \qquad q = 1, 2, 3;\ l = 1, \dots, 5. \tag{1.9}$$

*Тогда, равномерно по $s$ и $x$*

$$\Pi_n(s, n, x) = \int_{-\infty}^{x} \left[ z_0(s, 1, s+y) + \frac{1}{\sqrt{n}} z_1(s, 1, s+y) \right] dy + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{1.10}$$

где $z_0(s, t, x)$ — *фундаментальное решение однородного параболического уравнения*

$$\frac{\partial}{\partial t} v(s, t) = \frac{b(s)}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(s, t) + a(s) \frac{\partial}{\partial s} v(s, t); \tag{1.11}$$

$$z_1(s, t, x) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} z_0(s, t-\tau, \xi) L_\xi^1 (z_0(\xi, \tau, x))\, d\xi. \tag{1.12}$$

*Здесь $L_s^1$ означает следующий дифференциальный оператор*

$$L_s^1 = \alpha_{13}(s) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\alpha_{23}(s)}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\alpha_{33}(s)}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s^3}. \tag{1.13}$$

Обозначим

$$p_n(s, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Pi_n(s, x); \qquad p_n(s, k, x) = \frac{\partial}{\partial x} \Pi_n(s, k, x)$$

(если указанные производные существуют).

Если распределение $\Pi_n(s, x)$ решетчато с максимальным шагом решетки $h_n$, то обозначим

$$\pi_n(s, x_i) = P\{\xi_k^{(n)} = x_i \mid \eta_{k-1}^{(n)} = s\},$$

$$\pi_n(s, k, x_i) = P\{\eta_{m+k}^{(n)} - \eta_m^{(n)} = x_i \mid \eta_m^{(n)} = s\}$$

$$(x_i = ih_n,\ i = \dots, -1, 0, 1, \dots), \tag{1.14}$$

(в дальнейшем изложении индекс $i$ будет опускаться).

Теорема 1. 2. *Пусть существует вместе со своей второй производной по $x$ плотность $p_n(s, x)$ и константа $A > 0$ такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} p_n(s, x) \right| |x|^l dx < A n^{\frac{\nu - l}{2}} \qquad (\nu = 1, 2;\quad l = 0, 1, 2, 3); \tag{1.15}$$

*моменты $\alpha_q(s, n)$ распределения $\Pi_n(s, x)$ существуют до третьего включительно и допускают разложения (1.7) и, кроме того, пусть выполнено условие (1.9).*

*Тогда, равномерно по $s$ и $x$*

$$p_n(s, n, x) = z_0(s, 1, s+x) + \frac{1}{\sqrt{n}} z_1(s, 1, s+x) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{1.16}$$

*где $z_0(s, t, x)$ и $z_1(s, t, x)$ определены так же как и в теореме 1.1.*

Теорема 1.3. *Пусть случайные величины $\xi_k^{(n)}$ решетчато распределены с максимальным шагом решетки $h_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$, моменты $\alpha_q(s, n)$ существуют до третьего включительно, допускают разложения (1.7) и, кроме того, пусть выполнено условие (1.9).*

*Тогда, равномерно по $s$ и $x$ в точках решетки с шагом $h_n$*

$$\pi_n(s, n, x) = h_n \left[ z_0(s, 1, s+x) + \frac{1}{\sqrt{n}} z_1(s, 1, s+x) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.17)$$

Заметим, что условия нормировки (1.7) в простейшем случае означают

$$\Pi_n(s, x) = \widehat{\Pi}(s, x\sqrt{n}),$$

где $\widehat{\Pi}(s, x)$ от $n$ не зависит. В общем же случае можно полагать

$$\Pi_n(s, x) = \widehat{\Pi}_n(s, x\sqrt{n}), \quad (1.18)$$

где распределение $\widehat{\Pi}_n(s, x)$ таково, что его абсолютные моменты отграничены от нуля при любом $n$.

**2.** По предположению, $\Pi_n(s, x)$ имеет три момента, следовательно,

$$f_n(s, \lambda) = 1 + i\lambda\alpha_1(s, n) - \frac{\lambda^2}{2}\alpha_2(s, n) - \frac{i}{2}\int_0^\lambda \frac{\partial^3}{\partial z^3} f_n(s, z)(\lambda - z)^2 dz. \quad (2.1)$$

Пусть

$$T(n) = \inf_s \left\{ \frac{1}{5}\sqrt{n} \cdot b^{1/2}(s) \cdot \beta_3^{-2/3}(s, n) \right\}, \quad (2.2)$$

где, в соответствии с (1.18),

$$\beta_3(s, n) = \int |x|^3 d_x \widehat{\Pi}_n(s, x).$$

Тогда, как нетрудно показать, начиная с некоторого достаточно большого $n$, при $|\lambda| \leqslant T(n)$ $f_n(s, \lambda)$ будет отлична от нуля, и

$$|\bar{f}_n(s, k, \lambda)| = |f_n^k(s, \lambda)| \leqslant e^{-\frac{b(s)k\lambda^2}{4n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \quad (2.3)$$

Отсюда, используя условие (1.9) и элементарное неравенство

$$e^{-\mu q} q^n \leqslant K_n e^{-\mu_n q}, \qquad 0 \leqslant q < \infty, \ 0 < \mu_n < \mu, \ n > 0, \quad (2.4)$$

получаем:

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial s^\nu} \bar{f}_n(s, k, \lambda) \right| < C' e^{-c'k\frac{\lambda^2}{n}} \sqrt{\frac{k}{n}} |\lambda| < C e^{-ck\frac{\lambda^2}{n}},$$

$$1 \leqslant \nu \leqslant 5, \quad 0 < C' < C, \quad 0 < c < c', \ |\lambda| \leqslant T(n). \quad (2.5)$$

Заметим, что $T(n)\, n^{-\frac{1}{2}} \geqslant T > 0$, поскольку отграничен от нуля коэффициент $b(s)$ и ограничен абсолютный момент $\beta_3(s, n)$.

Лемма 2.1. *Пусть существует и имеет порядок $O(n^{-\frac{k}{2}})$ $k$-й ($k = 0, 1, 2, \ldots$) абсолютный момент распределения $\Pi_n(s, x)$, $\varphi(u)$ — непрерывная ограниченная функция, и для дифференцируемой по $u$ функции $\varphi(u, t, z)$ существует неотрицательная функция $\bar{\varphi}(t, z)$ такая, что*

$$|\varphi(u, t, z)| \leqslant \bar{\varphi}(t, z); \qquad \left| \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u, t, z) \right| \leqslant \bar{\varphi}(t, z).$$

*Тогда*

a) $$\int |u|^k |\varphi(h+u) - \varphi(h)|\, d_u\Pi_n(s, u) = o(n^{-\frac{k}{2}}),$$

б) $\int |u|^k \varphi(h+u, t, z) - \varphi(h, t, z) | d_u\Pi_n(s, u) = \overline{\varphi}(t, z) o(n^{-\frac{k}{2}})$

в) $\int |u|^k | \sin^q \lambda u | d_u\Pi_n(s, u) = o(n^{-\frac{k}{2}}), \quad q = 1, 2;$

$$\text{при } |\lambda| \leqslant n^{\frac{1}{2}-\alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right).$$

Используя выражение (1.18), запишем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(h+u) - \varphi(h)| \cdot |u|^k d_u\Pi_n(s, u) = n^{-\frac{k}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi\left(h + \frac{x}{\sqrt{n}}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi(h)\right| |x|^k d_x\widehat{\Pi}_n(s, x) \leqslant n^{-\frac{k}{2}} \left\{ \int_{|x| \leqslant n^{\frac{\alpha}{2}}} + \int_{|x| \geqslant n^{\frac{\alpha}{2}}} \right\}.$$

Первый интеграл в скобках стремится к нулю в силу непрерывности $\varphi(u)$, а второй — в силу существования $k$-го абсолютного момента распределения $\widehat{\Pi}_n(s, x)$. Утверждения б) и в) доказываются аналогично.

Теорема 2.2. *Пусть ограниченная функция $Q(s, \lambda)$ имеет $l+3$ ($l = -1, 0, 1, 2$) производных по $s$, непрерывных и ограниченных равномерно по $\lambda$, $T(n)$ определено согласно* (2.3) *и пусть $\sigma_n > 0$ таково, что*

$$\sigma_n \to \infty \qquad \textit{при } n \to \infty \qquad \text{и } \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = 0.$$

*Тогда в условиях теоремы* 1.1.

а) $$\int_{-T(n)}^{T(n)} \left| \int e^{i\lambda x} Q(s+x, \lambda)\, d_x\Pi_n(s, \alpha n, x) \right| |\lambda|^l d\lambda < \infty \qquad (l = 0, 1, 2),$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma_n \leqslant |\lambda| \leqslant T(n)} \left| \int e^{i\lambda x} Q(s+x, \lambda)\, d_x\Pi_n(s, \alpha n, x) \right| |\lambda|^l d\lambda = 0,$$

$$\alpha > 0, \quad \alpha n = [\alpha n], \quad l = -1, 0, 1, 2.$$

Пусть $l = 2$ (при меньших $l$ доказательство лишь упрощается); из марковского тождества

$$\Pi_n(s, k, x) = \int \Pi_n(s+z, k-1, x-z)\, d_z\Pi_n(s, z),$$

если обозначить

$$V_n(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda x} Q(s+x, \lambda)\, d_x\Pi_n(s, k, x), \tag{2.6}$$

следует

$$V_n(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda z} V_n(s+z, k-1, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, z). \tag{2.7}$$

Положим

$$V_n(s, k, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{5} V_n^{(\nu)}(s, k, \lambda) + R_n(s, k, \lambda), \tag{2.8}$$

где $V_n^{(\nu)}(s, k, \lambda)$ при $k > 0$ определяются из соотношений

$$V_n^{(\nu)}(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda z} V_n^{(\nu)}(s, k-1, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, z) + H_n^{(\nu)}(s, k, \lambda)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, 3), \tag{2.9}$$

а

$$H_n^{(0)}(s, k, \lambda) \equiv 0; \qquad H_n^{(\nu)}(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda z} \left\{ \sum_{q=1}^{\nu} \frac{z^q}{q!} \frac{\partial^q}{\partial s^q} V_n^{(\nu-q)}(s, k-1, \lambda) \right\} \times$$

$$\times\, d_z\Pi_n(s, z) \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{2.10}$$

$$V_n^{(0)}(s, 0, \lambda) = Q(s, \lambda); \quad V_n^{(\nu)}(s, 0, \lambda) \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.8) нетрудно установить, что при $k > 0$

$$R_n(s, k, \lambda) = \int e^{i\lambda z} R_n(s + z, k-1, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, z) +$$

$$+ \int e^{i\lambda z} \frac{z^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s^3} [\operatorname{Re} V_n^{(0)}(s + \theta_1 z, k-1, \lambda) - \operatorname{Re} V_n^{(0)}(s, k-1, \lambda)]\, d_z\Pi_n(s, z) +$$

$$+ i \int e^{i\lambda z} \frac{z^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial s^3} [\operatorname{Im} V_n^{(0)}(s + \theta_2 z, k-1, \lambda) - \operatorname{Im} V_n^{(0)}(s, k-1, \lambda)]\, d_z\Pi_n(s, z) +$$

$$+ \int e^{i\lambda z} \int_0^z \frac{\partial^3}{\partial s^3} V_n^{(1)}(s + u, k-1, \lambda) \frac{(z-u)^2}{2}\, du\, d_z\Pi_n(s, z) + \tag{2.12}$$

$$+ \int e^{i\lambda z} \int_0^z \frac{\partial^2}{\partial s^2} (V_n^{(2)}(s + u, k-1, \lambda) + V_n^{(3)}(s+u, k-1, \lambda))(z-u)\, du\, d_z\Pi_n(s, z) +$$

$$+ \int e^{i\lambda z} z \frac{\partial}{\partial s} V_n^{(3)}(s, k-1, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, z); \qquad (0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1),$$

$$R_n(s, 0, \lambda) \equiv 0. \tag{2.13}$$

Из уравнений (2.9) при $k > 0$ получим:

$$V_n^{(0)}(s, k, \lambda) = \bar{f}_n(s, k, \lambda)\, Q(s, \lambda),$$

$$V_n^{(\nu)}(s, k, \lambda) = \sum_{q=1}^{\nu} \frac{(-i)^q}{q!} \sum_{m=1}^{k} \bar{f}_n(s, k-m, \lambda) \frac{\partial^q}{\partial s^q} V_n^{(\nu-q)}(s, m-1, \lambda) \frac{\partial^q}{\partial \lambda^q} f_n(s, \lambda)$$

$$(\nu = 1, 2, 3). \tag{2.14}$$

В силу ограниченности $Q(s, \lambda)$ и ее производных по $s$, из (1.9), (2.4), (2.14) и оценок (2.3), (2,5) находим:

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial s^r} V_n^{(\nu)}(s, k, \lambda) \right| < M \left( \frac{k}{n} \right)^{\nu/2} e^{-\mu \frac{k\lambda^2}{n}} \qquad (r \leqslant 5 - \nu), \quad \nu = 0, 1, 2, 3;$$

$$M > 0, \quad \mu > 0, \quad |\lambda| \leqslant T(n). \tag{2.15}$$

Из (2.12), (1.9), (2.15) и леммы 2.1 следует

$$|R_n(s,k,\lambda)| < \int |R_n(s+z,k-1,\lambda)|\, d_z\Pi_n(s,z) + \frac{Mk}{n^2} e^{-\mu_1\frac{k\lambda^2}{n}} +$$

$$+ r(n)e^{-\mu_1\frac{k\lambda^2}{n}}, \quad r(n) = o(n^{-3/2}), \quad k > 0, \quad \mu_1 > 0, \quad |\lambda| \leqslant T(n), \quad M > 0; \tag{2.16}$$

отсюда при $|\lambda| \leqslant T(n)$:

$$|R_n(s,k,\lambda)| < r(n)\sum_{\nu=1}^{k} e^{-\mu_1\frac{\nu\lambda^2}{n}} + \frac{M}{n^2}\sum_{\nu=1}^{k} \nu e^{-\mu_1\frac{\nu\lambda^2}{n}}. \tag{2.17}$$

Пусть $0 \leqslant \sigma < T(n)$; очевидно,

$$\int_{\sigma}^{T(n)} \frac{e^{-\mu_1\frac{\nu\lambda^2}{n}}}{n^{3/2}} \lambda^2 d\lambda \leqslant \int_{\sigma\sqrt{\frac{\nu}{n}}}^{\infty} \frac{e^{-\mu_1\lambda^2}}{\nu^{3/2}} \lambda^2 d\lambda, \tag{2.18}$$

и, следовательно,

$$\int_{-T(n)}^{T(n)} |R_n(s,k,\lambda)|\, \lambda^2 d\lambda < \infty, \qquad \int_{\sigma_n \leqslant |\lambda| \leqslant T(n)} |R_n(s,k,\lambda)|\, \lambda^2 d\lambda = o(1). \tag{2.19}$$

И, поскольку при $\alpha n = [\alpha n]$ $\alpha > 0$, из (2.15) вытекает:

$$\int_{-T(n)}^{T(n)} \left|\sum_{\nu=0}^{3} V_n^{(\nu)}(s,\alpha n,\lambda)\right| \lambda^2 d\lambda < \infty; \qquad \int_{\sigma_n \leqslant |\lambda| \leqslant T(n)} \left|\sum_{\nu=0}^{3} V_n^{(\nu)}(s,\alpha n,\lambda)\right| \lambda^2 d\lambda = o(1). \tag{2.20}$$

Теорема 2.2 доказана для $l = 2$.

Из того, что $b(s)$ отграничен от нуля, в условиях теорем 1.1 и 1.2 имеем

$$|f_n(s,\lambda)| \leqslant e^{-\alpha}, \ \alpha > 0, \ |\lambda| \geqslant T(n), \tag{2.21}$$

и в условиях теоремы 1.3—

$$|f_n(s,\lambda)| \leqslant e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad T(n) \leqslant |\lambda| \leqslant \frac{\pi}{h_n} \tag{2.22}$$

$\left(\text{если } T(n) < \frac{\pi}{h_n}\right)$.

Путем рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2.2, нетрудно установить в нерешетчатом случае:

$$\int_{n \geqslant |\lambda| \geqslant T(n)} |f_n(s,n,\lambda)| \frac{d\lambda}{|\lambda|} \leqslant \int_{n \geqslant |\lambda| \geqslant T(n)} |f_n(s,n,\lambda)|\, d\lambda = o(n^{-\frac{1}{2}}) \tag{2.23}$$

и в случае решетки с максимальным шагом $h_n = O(n^{-1/2})$

$$h_n \int_{T(n) \leqslant |\lambda| \leqslant \frac{\pi}{h_n}} |f_n(s,n,\lambda)|\, d\lambda = o(n^{-1}). \tag{2.24}$$

Если существуют плотности, из (1.15) следует

$$\int\limits_{|\lambda|\geqslant n} |f_n(s, n, \lambda)|\, d\lambda \leqslant \int \int\limits_{|\lambda|\geqslant n} |f_n(s+x, \lambda)|\, d\lambda d_x \Pi_n(s, n-1, x) = O(n^{-1}). \quad (2.25)$$

3. Приведем некоторые сведения [3, 5] о фундаментальном решении $z_0(s, t, x)$ однородного параболического уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} v(s, t) = \frac{b(s)}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} v(s, t) + a(s) \frac{\partial}{\partial s} v(s, t). \quad (3.1)$$

Если $v(s, 0) = f(s)$, где $f(s)$ — ограниченная и непрерывная функция

$$v(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z_0(s, t, x) f(x)\, dx, \quad (3.2)$$

$$z_0(s, t, x) > 0; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} z_0(s, t, x)\, dx = 1 \quad (3.3)$$

и $0 < \tau < t$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} z_0(s, \tau, \xi)\, z_0(\xi, t-\tau, x) d\xi = z_0(s, t, x). \quad (3.4)$$

Если $a(s)$ и $b(s)$ имеют $k$ ограниченных гельдеровых производных, то при $t > 0$ приведенные ниже производные существуют и справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^{l+r+q}}{\partial t^l \partial s^r \partial x^q} z_0(s, t, x) \right| < M_{2l+r+q} t^{-\frac{2l+r+q+1}{2}} e^{-\mu_{2l+r+q} \frac{(x-s)^2}{t}}$$

$$\mu_r > 0, \ M_r > 0, \ 2l + r + q \leqslant k, \ t > 0 \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует существование всех

$$c_q(s, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z_0(s, t, s+x)\, x^q dx, \qquad q = 1, 2, \ldots, \quad (3.6)$$

при этом

$$c_1(s, t) = a(s) t + O(t^2); \qquad c_2(s, t) = b(s) t + O(t^2). \quad (3.7)$$

Методами работ [3, 5] могут быть доказаны (подробно см. [4]) следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$ уравнения (3.1) ограничены и имеют $k$ ($k \geqslant 4$) ограниченных гельдеровых производных, $b(s)$ отграничен от нуля, коэффициенты $\alpha_{13}(s)$, $\alpha_{23}(s)$, $\alpha_{33}(s)$ в (1.7) ограничены и имеют, соответственно, $k-3$, $k-2$, $k-1$ ограниченных гельдеровых производных.*

*Тогда существуют не зависящие от $s$ и $x$ $0 < M_{r,q} < \infty$, $\mu_{r,q} > 0$ такие, что при $t > 0$*

$$\left| \left[ \frac{\partial^{r+l+q}}{\partial u^r \partial s^l \partial x^q} z_0(s+u, t, x+u) \right]_{u=0} \right| < \frac{M_{r,l+q}}{t^{\frac{l+q+1}{2}}} e^{-\mu_{r,l+q} \frac{(x-s)^2}{t}}, \ r + l + q \leqslant k;$$

$$\left| \frac{\partial^r}{\partial s^r} z_1(s, t, s+x) \right| < \frac{M_{r,1}}{t} e^{-\mu_{r,1} \frac{x^2}{t}}, \quad r = 0, 1, \ldots, k-2,$$

*где*

$$z_1(s,t,x)=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} z_0(s,t-\tau,\xi)\,L_\xi^1(z_0(\xi,\tau,x))\,d\xi. \tag{3.8}$$

Теорема 3.2. *В условиях теоремы* 3.1

$$\int_{-\infty}^{\infty} z_1(s,t,x)(x-s)^l dx=\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} z_0(s,t-\tau,\xi)\,L_\xi^1\left(\int_{-\infty}^{\infty} z_0(\xi,\tau,x)(x-s)^l dx\right)d\xi,$$

$$0\leqslant l<\infty,\qquad l=[l].$$

*Отсюда находим:*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} z_1(s,t,x)(x-s)^l dx=0\qquad (l=1,\,2,\,3), \tag{3.9}$$

*и в условиях теоремы* 1.1

$$\varphi_n\left(s,\frac{1}{n},\lambda\right)=\int \mathfrak{z}_n\left(s,\frac{1}{n},x\right)e^{i\lambda(x-s)}dx=\varphi_0\left(s,\frac{1}{n},\lambda\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi_1\left(s,\frac{1}{n},\lambda\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} z_0\left(s,\frac{1}{n},x\right)e^{i\lambda(x-s)}dx+\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} z_1\left(s,\frac{1}{n},x\right)e^{i\lambda(x-s)}dx=$$

$$=1+i\lambda\left(\frac{a(s)}{n}+\frac{\alpha_{13}(s)}{n^{3/2}}+q_{13}(s,n)\right)-\frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{b(s)}{n}+\frac{\alpha_{23}(s)}{n^{3/2}}+q_{23}(s,n)\right)-$$

$$-\frac{i\lambda^3}{3!}\left(\frac{\alpha_{33}(s)}{n^{3/2}}+q_{33}(s,n)\right)+\frac{\lambda^4}{4!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{z}_n\left(s,\frac{1}{n},x\right)(x-s)^4\,[\cos\theta_1\lambda(x-s)+$$

$$+i\sin\theta_2\lambda(x-s)]\,dx,\qquad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1, \tag{3.10}$$

*где* $q_{j3}(s,n)$ $(j=1,\,2,\,3)$ *вместе со своими, по крайней мере,* $j+1$ *непрерывными ограниченными производными по* $s$ *имеют порядок* $O(n^{-2})$. Отсюда уже нетрудно установить при $m\geqslant 1$

$$\int e^{i\lambda z}\varphi_n\left(s+z,\frac{m}{n},\lambda\right)d_z\Pi_n(s,z)-\varphi_n\left(s,\frac{m+1}{n},\lambda\right)=$$

$$=Q_n(s,m,\lambda)=\overline{Q}_n^{(0)}(s,m,\lambda)+\sum_{\nu=0}^{3}\frac{(i\lambda)^\nu}{\nu!}Q_n^{(\nu)}(s,m,\lambda), \tag{3.11}$$

где функции $\overline{Q}_n^{(0)}$ и $Q_n^{(j)}$ такие, что

$$|\overline{Q}_n^{(0)}(s,m,\lambda)|=o(n^{-3/2})|\lambda|\qquad \text{при } |\lambda|\leqslant 1,$$

$$|\overline{Q}_n^{(0)}(s,m,\lambda)|=\frac{o(n^{-1})}{|\lambda|\sqrt{m}}+\frac{O(n^{-1})}{|\lambda|m}\qquad \text{при } |\lambda|\geqslant 1,$$

$$|Q_n^{(0)}(s,m,\lambda)|=o(n^{-3/2})|\lambda|\qquad \text{при } |\lambda|\leqslant 1,$$

$Q_n^{(j)}(s,m,\lambda)$ $(j=0,\,1,\,2,\,3)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2, при этом $Q_n^{(j)}(s,m,\lambda)$ $(j=0,\,1,\,2)$ вместе с соответствующим числом производных по $s$ имеют порядок $o(n^{-3/2})$, а $i\lambda Q_n^{(3)}(s,m,\lambda)$ вместе с пятью ее производными по $s$ — порядок $\dfrac{o(n^{-1})}{\sqrt{m}}$.

**4.** Если распределение $\Pi(x)$ имеет дважды непрерывно дифференцируемую плотность $p(x)$, то, очевидно,

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \tag{4.1}$$

где $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} p(z)\, dz$. Если $\Pi(x)$ решетчато с шагом $h$, то «локальная» вероятность

$$\pi(x_j) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} f(\lambda) e^{-i\lambda x_j} d\lambda, \quad x_j = jh,\ j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

где $f(\lambda) = \sum_j \pi(x_j) e^{i\lambda x_j}$. В общем случае применима следующая теорема Эссеена (см., например, [2]).

Теорема 4.1. *Пусть $A$, $T$ и $\varepsilon > 0$ — постоянные, $F(x)$ — неубывающая функция, $G(x)$ — функция ограниченной вариации. Если*

$$F(-\infty) = G(-\infty), \qquad F(+\infty) = G(+\infty), \tag{4.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - G(x)|\, dx < \infty, \tag{4.4}$$

*$G'(x)$ существует при всех $x$, $|G'(x)| \leqslant A$,*

$$\int_{-T}^{T} \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt = \varepsilon, \tag{4.5}$$

*где*

$$f(t) = \int e^{itx} dF(x); \qquad g(t) = \int e^{itx} dG(x),$$

*то каждому числу $k > 1$ соответствует конечное положительное число $c(k)$, зависящее только от $k$, такое, что*

$$|F(x) - G(x)| \leqslant k \frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T}. \tag{4.6}$$

Обозначим

$$G_n(s, t, x) = \int_{-\infty}^{s+x} \mathfrak{z}_n(s, t, y) dy. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $N = \left[\frac{n}{2}\right]$, запишем очевидное равенство:

$$\Pi_n(s, n, x) - G_n(s, 1, x) =$$

$$= \int \left\{ \Pi_n(s+z, n-N, x-z) - G_n\left(s+z, \frac{n-N}{n}, x-z\right) \right\} d_z \Pi_n(s, N, z) +$$

$$+ \left\{ \int G_n\left(s+z, \frac{n-N}{n}, x-z\right) d_z \Pi_n(s, N, z) - G_n(s, 1, x) \right\}. \tag{4.8}$$

Последнее слагаемое легко оценивается методами работы [1]. В самом деле, идея этих методов состоит в том, что разность

$$\int f(x)\, d_x \Pi_n(s, n, x) - \int f(x)\, d_x G_n(s, 1, x)$$

представляется в виде суммы

$$\sum_{m=0}^{n-1} \int \Big\{ \int\int f(x)\, d_x G_n\left(s + z + u, \frac{m}{n}, x - z - u\right) d_u \Pi_n(s + z, u) -$$

$$- \int f(x)\, d_x G_n\left(s + z, \frac{m+1}{n}, x - z\right)\Big\} d_z \Pi_n(s, n - m - 1, z),$$

где оценивается каждое слагаемое. При этом гладкость функции $f(x)$ требуется лишь при малых $m$; при $m$ порядка $n$ слагаемые легко оцениваются в предположении всего лишь ограниченности $f(x)$. Поэтому

$$\int G_n\left(s + z, \frac{n-N}{n}, x - z\right) d_z \Pi_n(s, N, z) - G_n(s, 1, x) = o(n^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.9)$$

равномерно по $s$ и $x$.

Положим далее в теореме 4.1

$$F(x) = \Pi_n(s, n, x); \quad G(x) = \int G_n\left(s + z, \frac{n-N}{n}, x - z\right) d_z \Pi_n(s, N, z). \quad (4.10)$$

Поскольку для $F(x)$ и $G(x)$ выполнены условия (4.3) и (4.4) (последнее — в силу существования вторых моментов для $F(x)$ и $G(x)$), то, положив в теореме 4.1

$$T = n, A = \max_{s,x,n} \int \mathfrak{z}_n\left(s + z, \frac{n-N}{n}, x\right) d_z \Pi_n(s, N, z),$$

рассмотрим

$$\int_{-T}^{T} \left| \frac{f_n(s, n, \lambda) - \int e^{i\lambda x} dG(x)}{\lambda} \right| d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-T(n)}^{T(n)} \left| e^{i\lambda x}\Big[ f_n(s + x, n - N, \lambda) - \varphi_n\left(s + x, \frac{n-N}{n}, \lambda\right) \right| \frac{d\lambda}{|\lambda|} d_x \Pi_n(s, N, x) +$$

$$+ \int_{T \geqslant |\lambda| \geqslant T(n)} \frac{|f_n(s, n, \lambda)|}{|\lambda|} d\lambda + \int_{T \geqslant |\lambda| \geqslant T(n)} \frac{\left|\int e^{i\lambda x} dG(x)\right|}{|\lambda|} d\lambda. \quad (4.11)$$

В силу (2.23) и достаточной гладкости $\mathfrak{z}_n\left(s, \frac{n-N}{n}, x\right)$, два последних слагаемых имеют порядок $o(n^{-\frac{1}{2}})$, и для доказательства теоремы 1.1 необходимо установить, что тот же порядок имеет и первое слагаемое. Точно так же, исходя из (4.1), (4.2), можно показать, что для доказательства теорем 1.2 и 1.3 необходима оценка

$$\int_{-T(n)}^{T(n)} e^{-i\lambda x}(f_n(s, n, \lambda) - \int e^{i\lambda y} dG(y))\, d\lambda = o(n^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.12)$$

С учетом (3.11) имеем

$$f_n(s, n, \lambda) - \int e^{i\lambda x} dG(x) = \int e^{i\lambda z}\left[f_n(s+z, \lambda) - \varphi_n\left(s+z, \frac{1}{n}, \lambda\right)\right] \times$$

$$\times\, d_z\Pi_n(s, n-1, z) + \sum_{m=1}^{n-N-1} \int e^{i\lambda z}\left\{\int e^{i\lambda u}\varphi_n\left(s+z+u, \frac{m}{n}, \lambda\right) d_u\,\Pi_n(s+z, u) -\right.$$

$$\left. -\,\varphi_n\left(s+z, \frac{m+1}{n}, \lambda\right)\right\} d_z\Pi_n(s, n-m-1, z) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n-N-1} \int e^{i\lambda z} \sum_{\nu=0}^{3} \frac{(i\lambda)^\nu}{\nu!} Q_n^{(\nu)}(s+z, m, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, n-m-1, z) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-N-1} \int e^{i\lambda z} \overline{Q}_n^{(0)}(s+z, m, \lambda)\, d_z\Pi_n(s, n-m-1, z). \qquad (4.13)$$

Из леммы 2.1 следует, что существует $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ такое, что при $|\lambda| \leqslant n^{\frac{1}{2} - \alpha}$

$$\left|\int\left[\int_0^z \frac{(z-u)^2}{2} e^{i\lambda u} du\right] d_z\Pi_n(s, z)\right| \leqslant \varepsilon(s, n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Положив в теореме 2.2

$$\sigma_n = \left[\min_s \frac{1}{n^{\alpha - \frac{1}{2}} + \varepsilon(s, n) + \sum_{\nu=1}^{3} |\psi_{\nu 3}(s, n)|}\right]^{\frac{1}{6}},$$

устанавливаем, что (4.12) и первое слагаемое в правой части (4.11) имеют порядок $o(n^{-\frac{1}{2}})$.

Автор выражает искреннюю признательность В. С. Королюку и А. В. Скороходу за постоянное внимание к работе и многочисленные полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных величин. Тр. Ин-та матем. и мех. АН УзССР, вып. 10, ч. I, 1953.
2. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М., 1949.
3. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН, т. 17, вып. 3, 1962.
4. А. Н. Литвинов, Уточнение предельных теорем для случайных величин, связанных в цепь Маркова, Автореф. канд. дисс., Ин-т матем. АН УССР, К., 1965.
5. Є. Д. Эйдельман, О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сб., т. 53, № 1, 1961.

Поступила 27.XI 1965 г.
Киев