1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Асимптотические неравенства, приложимые к некоторым задачам статистической механики

Т. В. Морозова

Со времени выхода в свет книги Дж. В. Гиббса «Основные принципы статистической механики» в 1902 г. перед математиками встали две основные проблемы. Первая из них — эргодическая проблема, т. е. задача обоснования замены временных средних пространственными. Значения физических величин, характеризующих состояние данной системы, однозначно определяются тем состоянием, которое описывается совокупностью динамических координат. Таким образом, любая физическая величина, рассматриваемая в статистической механике, является функцией точки ее фазового пространства, или фазовой функцией. Фазовые функции не могут быть определены точно, так как они зависят от большого числа степеней свободы. Эксперимент дает возможность определять значения фазовых функций за определенные промежутки времени и находить временные средние этих функций. Но теоретически вычисление временных средних потребовало бы полной интеграции систем уравнений и определения всех постоянных интеграции, что является совершенно невозможным для систем, рассматриваемых в статистической механике. Поэтому Больцманом и была поставлена задача замены временных средних пространственными—задача логического обоснования интерпретации физических величин средними значениями соответствующих им функций, взятыми по всему фазовому пространству или по части его, определенной данными условиями, т. е. фазовыми средними. Эта задача полностью не разрешена и до настоящего времени.

Вторая задача связана с методами расчета фазовых средних, которые не могут быть вычислены точно. Решение этой задачи имеет в виду создание общего метода приближенного вычисления фазовых средних на поверхности постоянной энергии, иначе говоря — получение асимптотических формул в предположении, что число степеней свободы данной системы неограниченно возрастает. Эти фазовые средние вычисляются при помощи функций распределения. Наиболее удобны формулы в случае применения канонического распределения Гиббса.

В данной статье будет выведена асимптотическая формула, которая дает возможность сравнительно просто определить фазовый объем внутри данных границ, пользуясь каноническим распределением Гиббса.

Рассмотрим метрическое пространство Ω с точками $x_1, \ldots$ и предположим, что в Ω задана положительная мера для всех открытых множеств и конечна для компактных множеств. Интеграл функции $F(x)$, определенной в пространстве Ω, обозначим

$$\int\limits_{\Omega} F(x)\,dx.$$

Возьмем второе метрическое пространство G с точками $f_1, \ldots,$ где также введена мера функции $\Phi(f)$, определенной в G, и обозначена

$$\int_G \Phi(f)\, df.$$

Предположим, что в пространстве G существует система множеств (I), которые будем называть клетками со следующими свойствами:

1) G — сумма конечного или счетного числа клеток, попарно не имеющих общих точек.

2) Каждое подмножество I измеримо и его объем положителен

$$\int_I df > 0.$$

Будем называть функцию $\Phi(f)$ G-непрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно привести в соответствие следующее разложение

$$G = \sum_\nu I_\nu$$

пространства G на клетки I_ν, попарно не имеющие общих точек, так что будет справедливым следующее неравенство:

$$|\Phi(f') - \Phi(f'')| \leqq \varepsilon$$

при $f' \in I_\nu$, $f'' \in I_\nu$. Возьмем последовательность точек пространства $G\ \{f_1, \ldots, f_N\}$ и предположим, что она обладает ограниченной плотностью распределения, т. е. существует в пространстве неотрицательная функция $i(f)$ со следующими свойствами: 1°) $\int_G i(f) df = 1$. 2°) Для каждой клетки, выполняется условие $\frac{n_I^N}{N} \to \int_G i(f)\, df$ при $N \to \infty$, здесь n_I^N — число точек последовательности $(f_1^{(N)} \ldots\ f_N^{(N)})$.

Далее в статье рассматриваются вещественные переменные $(\mu_1, \ldots, \mu_L)$ (L — ограниченное число), достаточно близкие к фиксированным $(\mu_1^0, \ldots$ $\ldots, \mu_N^0)$,

$$|\mu_s - \mu_s^0| \leqslant r, \qquad s = 1, \ldots, L.$$

Для сокращения изложения систему $(\mu_1, \ldots, \mu_L)$ будем рассматривать как точку μ L-мерного куба Π^r. Все рассматриваемые нами числа будем считать вещественными. Введем теперь систему функций, определенных в $\Omega \times G$,

$$\varphi_1(x, f), \ldots, \varphi_L(x, f)$$

и систему чисел

$$E_1^0, \ldots, E_L^0,$$

обладающих следующими свойствами:

1) если почти везде в $\Omega \times G$

$$\sum_{s=1}^{L} \alpha_s \varphi_s(x, f) + \alpha_0(f) = 0,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_L$ — постоянные, $\alpha_0(f)$ — непрерывная функция в G, то

$$\alpha_0 = 0, \ldots, \alpha_L = 0;$$

2) уравнения

$$\int_G i(f)\left\{\frac{\int_\Omega \varphi_q(x,f)\, e^{\sum_{q=1}^{L}\mu_q\varphi_q(x,f)}\,dx}{\int_\Omega e^{\sum_{q=1}^{L}\mu_q\varphi_q(x,f)}\,dx}\right\}df = E^0, \quad q=1,\ldots,L,$$

имеют решения $\mu_q=\mu_q^0$ при $q=1,\ldots,L$;

3) можно найти такое число $r>0$, что для значений $\mu_1,\ldots,\mu_q$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\mu_s-\mu_s^0|\leqslant r, \qquad s=1,\ldots,L,$$

выражение

$$\int_\Omega e^{\sum_{q=1}^{L}\mu_q\varphi_q(x,f)}\,dx$$

будет ограничено в G и $G\Pi^r$-непрерывно относительно f. При этих условиях имеет место следующая теорема.

Теорема. *При любых $\alpha>0$, $Q>0$, $N_0>0$ везде в области Π^r будет справедливым неравенство*

$$\int\ldots\int_A dx_1\ldots dx_N \geqslant \frac{\alpha}{N^{\frac{L}{2}}}\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_\Omega e^{\sum_{s=1}^{L}\mu_s\psi_s(x,f)}\,dx\right\},$$

где A — множество точек $(x_1,\ldots,x_N)$ пространства Ω, определенных неравенствами

$$-\frac{Q}{2}\leqslant\sum_{k=1}^{N}\psi_s(x_k,f_k)\leqslant\frac{Q}{2}, \qquad s=1,\ldots,L,$$

где

$$\psi_s(x,f)=\varphi_s(x,f)-E_s(f),$$

$$E_s=\int_\Omega\varphi_s(x,f)\,\varrho(x,f)\,dx,$$

$$\varrho(x,f)=\frac{e^{\sum_{s=1}^{L}\mu_s\varphi_s(x,f)}}{\int_\Omega e^{\sum_{s=1}^{L}\mu_s\varphi_s(x,f)}dx}, \qquad \mu\in\Pi^r.$$

Доказательство. В качестве приема доказательства будем представлять интегралы высокой кратности, взятые в определенной области, с помощью преобразований Фурье. Неравенства, определяющие данную область, поставим под знак дельта-функций, а эти функции выразим интегралом Фурье, чем достигнем перехода к факторизованным весам интегрирования.

Для случая, когда пространство G вырождается в точку, т. е. φ не зависит от f,

$$\varphi(x, f) = \varphi(x),$$

теорема доказана [3]. Теперь докажем теорему при данных условиях.

Рассмотрим интеграл

$$W = \int \ldots \int_A dx_1 \ldots dx_N \tag{1}$$

и, применяя метод, указанный выше (см. [3]), получим

$$W \geqslant \int_{-l}^{l} \ldots \int_{-l}^{l} Z(\nu_1) \ldots Z(\nu_L) \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_\Omega e^{\sum_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} d\nu_1 \ldots d\nu_L =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_\Omega e^{\sum_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} \left\{ \int_{-l}^{l} \ldots \int_{-l}^{l} Z(\nu_1) \ldots Z(\nu_L) \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} \times \right.$$

$$\left. \times\, d\nu_1 \ldots d\nu_L. \right. \tag{2}$$

Это неравенство имеет место при $\mu \in \Pi^{\delta_1}$ и $Q = Q_\eta = Q_{l/6}$, где $Z(\nu) > 0$ для $|\nu| < l$ и $Z(\nu) = 0$ при $|\nu| \geqslant l$.

Для того чтобы установить, каким должно быть число l, проведем следующие рассуждения. Зафиксируем некоторое положительное число $l_1 > 0$ и рассмотрим (параллелепипед) P_1 точек $\nu(\nu_1 \ldots \nu_L)$, определенных неравенствами

$$|\nu_s| \leqq l_1, \qquad s = 1, \ldots, L.$$

Затем возьмем число ξ, $0 < \xi < 1$, и положим что

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \ln \xi, & |z| \leqslant \xi, \\ \Phi(z) &= \ln |z|, & |z| > \xi. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть

$$z = \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx,$$

тогда

$$\Phi \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\} = \Phi \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \varphi_s(x, f)} dx \right\}. \tag{4}$$

На основании леммы 1 из [3], это выражение $P\Pi^{\delta_1}G$-ограничено и $P\Pi^{\delta_1}G$-непрерывно. С другой стороны, известно, что $\int_\Omega \varrho(x, f)\, dx = 1$, $\varrho(x, f) > 0$, поэтому наибольшее значение будет

$$\ln \left| \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \varphi_s(x, f)} dx \right| = 0.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \int_G i(f)\, \Phi \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \varphi_s(x, f)} dx \right\} df \leqslant 0. \tag{5}$$

Таким образом, выражение ε как функция от ν имеет абсолютный максимум в точке $\nu_s = 0$; $s = 1, \ldots, L$.

Покажем, что выражение (5) может достигнуть этого абсолютного максимума и в других точках. Обозначим $\nu^0(\nu^0_1, \ldots, \nu^0_L)$ точки, в которых $\varepsilon = \max = 0$. Тогда, поскольку функция (4) G-непрерывна и неположительна и поскольку, согласно условию 2°, для каждой клетки (I) будет

$$\int_I i(f)\, df > 0,$$

получается, что всюду в G

$$\Phi\left\{\int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i\sum_{s=1}^{L} \nu_s \varphi_s(x,f)}\, dx\right\} = 0,$$

т. е.

$$\left|\int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i\sum_{s=1}^{L} \nu^0_s \varphi_s(x,f)}\, dx\right| = 1.$$

Отсюда следует, что для каждого фиксированного $f \in G$ множитель при $\varrho(x, f)$ в подынтегральном выражении, рассматриваемый как функция x, будет постоянен почти везде в Ω. Поэтому всякому ν^0 можно сопоставить функцию $F(f)$ таким образом, что для каждого f почти везде в Ω имеет место следующее равенство:

$$\sum_{s=1}^{L} \nu^0_s\, \varphi_s(x, f) \equiv F(f) \pmod{2\Pi}. \tag{6}$$

Обратно, если для некоторой точки ν^0 можно найти $F(f)$ такую, чтобы соотношение (6) имело место для каждого f почти везде в Ω, то ε достигает при этом ν^0 экстремального значения, равного 0 ($\varepsilon = 0$). Из приведенных рассуждений видно, что точки ν^0 не зависят от положения точек $\mu \in \Pi^{\delta_1}$.

Покажем, что параллелепипед P_1 содержит только конечное число точек ν^0. В самом деле, для этих точек и только для них выражение

$$\int_G i(f)\left|\int_\Omega e^{i\sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x,f)}\, dx\right|^2 df = \int_G i(f)\left|\int_\Omega e^{i\sum_{s=1}^{L} \nu_s \varphi_s(x,f)}\, dx\right|^2 df \tag{7}$$

достигает экстремального значения, равного единице. Выражение (7) на основании леммы 1 из [3] будет аналитической функцией от ν при $\mu \in P_1\Pi^{\delta_1}$. Ее разложение в ряд по степеням $(\nu - \nu_0)$, взятое, включая второй член, имеет вид

$$\int_G i(f)\left|\int_\Omega \varrho(x, f)\, e^{i\sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x,f)}\, dx\right|^2 df = 1 - \sum_{k=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} (\nu_k - \nu^0_k)(\nu_s - \nu^0_s) \times$$
$$\times \int_G i(f)\left\{\int_\Omega \varrho(x, f)\, \psi_s(x, f)\, \psi_k(x, f)\, dx\right\} df + \ldots \tag{8}$$

С другой стороны, квадратичная форма

$$\sum_{k=1}^{L}\sum_{s=1}^{L} h_k h_s \int_G i(f)\left\{\int_\Omega \varrho(x, f)\, \psi_k(x, f)\, \psi_s(x, f)\, dx\right\} df =$$
$$= \int_G i(f)\left\{\int_\Omega \varrho(x, f) \sum_{s=1}^{L} [h_s \psi_s(x, f)]^2\, dx\right\} df \tag{9}$$

является определенно положительной, так как если она равна нулю, то почти всюду в $\Omega \times G$

$$\sum_{s=1}^{L} h_s \psi_s(x, f) = 0,$$

т. е.

$$\sum_{s=1}^{L} h_s \varphi_s(x, f) + h_0(f) = 0,$$

где

$$h_0(f) = -h_s E_s(f);$$

отсюда следует непрерывность $h_0(f)$ на основании условия 1°. Будет правильным и обратное утверждение, если квадратичная форма будет определенно положительна, то точки ν^0 являются экстремальными. Отсюда, поскольку выражение (7) является аналитической функцией, относительно μ и ν следует, что число n^0 точек ν^0, содержащихся в параллелепипеде P_1, является конечным.

Следовательно, можно выбрать число l в пределах $0 < l < l_1$ так, чтобы параллелепипед P_1 (точек ν, определенных неравенствами $|\nu_s| \leqslant \leqslant l$, $s = 1, \ldots, L$) не содержал точек ν^0, отличных от $\nu = 0$. Это и будет точно тем числом l, которое мы берем в неравенстве (2).

Для того чтобы дать асимптотическую оценку выражению

$$\prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\},$$

рассмотрим сферу S^{Δ} точек $\sum_{k=1}^{L} \nu_k^2 = \Delta^2$, описанную вокруг точек $\nu = 0$ радиусом Δ настолько малым, что $S^{\Delta} \subset P$.

Пусть B — ансамбль точек P, которые не принадлежат сфере S^{Δ},

$$B = P - S^{\Delta}.$$

Известно, что выражение

$$\int_{G} i(f) \Phi \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\} df$$

является непрерывным относительно ν, μ в области $P\Pi^{\delta_1}$. С другой стороны, мы знаем, что оно достигает максимального значения, равного нулю только для $\nu = \nu^0$. Отсюда очевидно, что можно выбрать такое число $\alpha > 0$, что соотношение

$$\int_{G} i(f) \Phi \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\} df \leqslant -\alpha \tag{10}$$

имеет место везде в $P\Pi^{\delta_1}$, т. е. для $\nu \in B$, $\mu \in \Pi^{\delta_1}$. Так как выражение

$$\Phi \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\}$$

будет $GP_1\Pi^{\delta_1}$-ограниченным и f—$GP\Pi^{\delta_1}$-непрерывным, приложим к настоящему случаю лемму II из [4]. Из этой леммы следует, что равномерно в $P\Pi^{\delta_1}$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Phi\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}\to\int_{G}i(f)\,\Phi\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f)}\,dx\right\}df.$$

Следовательно, можно зафиксировать такое целое число $N^*>0$, что для $N\geqslant N^*$ всюду в $P\Pi^{\delta_1}$ будет выполняться следующее неравенство

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Phi\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}-\right.$$

$$\left.-\int_{G}i(f)\,\Phi\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f)}\,dx\right\}df\right|\leqslant\frac{\alpha}{2}.$$

Далее, принимая во внимание (10), получим

$$\sum_{k=1}^{N}\Phi\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}\leqslant-\frac{\alpha}{2}N,$$

для $N\geqslant N^*$, $\nu\in B$, $\mu\in\Pi^{\delta_1}$.

Из изложенного на основании (3) следует:

$$\sum_{k=1}^{N}\ln\left|\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right|\leqslant-\frac{\alpha}{2}N$$

и

$$\left|\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}\right|\leqslant e^{-\frac{\alpha}{2}N},$$

то же—при $N\geqslant N^*$, $\nu\in B$, $\mu\in\Pi^{\delta_1}$.

Следовательно,

$$\left|\int\underset{P}{\cdots}\int Z(\nu_1)\ldots Z(\nu_L)\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}d\nu_1\ldots d\nu_L\right|-$$

$$-\left|\int\underset{S^{\Delta}}{\cdots}\int Z(\nu_1)\ldots Z(\nu_L)\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\,d\nu_1\ldots d\nu_L\right|\leqslant e^{-\frac{\alpha}{2}N}\left\{\int_{-l}^{l}Z(\nu)\,d\nu\right\}^{L}. \tag{11}$$

Заметив это, произведем асимптотическую оценку интеграла

$$I_0=\int\underset{S^{\Delta}}{\cdots}\int Z(\nu_1,\ldots,\nu_L)\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega}\varrho(x,f_k)\,e^{i\sum_{s=1}^{L}\nu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\}d\nu_1\ldots d\nu_L, \tag{12}$$

где для сокращения положено

$$Z(\nu_1, \ldots, \nu_L) = Z(\nu_1) \ldots Z(\nu_L). \tag{13}$$

С этой целью рассмотрим выражение

$$\ln \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right\}$$

и оценим его разложение в ряд Тейлора по степеням ν_s. Примем Δ таким малым, что всюду в $S^\Delta \Pi^{\delta_1} G$ будет

$$\left| \int_\Omega \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx \right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда, поскольку

$$\int_\Omega \varrho(x, f)\, dx = 1, \qquad \int_\Omega \varrho(x, f)\, \psi_s(x, f)\, dx = 0,$$

очевидно, имеем

$$\ln \int_\Omega \varrho(x, f) e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f)} dx = -\sum_{s,q} \nu_s \nu_q A_{sq}(f) + i \sum_{r,s,q} \nu_r \nu_s \nu_q A_{rsq}(f) + \varepsilon_1, \tag{14}$$

где

$$A_{sq}(f) = \frac{1}{2} \int_\Omega \psi_s(x, f)\, \psi_q(x, f)\, \varrho(x, f)\, dx, \tag{15}$$

$$A_{rsq}(f) = \frac{1}{6} \int_\Omega \psi_r(x, f)\, \psi_s(x, f)\, \psi_q(x, f)\, \varrho(x, f)\, dx,$$

и $|\varepsilon_1| \leqslant k_1 |\nu|^4$, $\nu \in S^\Delta$. Здесь $|\nu|^2 = \sum_{s=1}^{L} |\nu_s|^2$ и k_1 — константа, не зависящая от ν, μ, f. Как следует из леммы 1 [3], выражения (15) $\Pi^{\delta_1} G$-ограничены и $\Pi^{\delta_1} G$-непрерывны. Из выражения (14) имеем теперь:

$$\prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f_k)\, e^{i \sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -N \sum_{s,q} \nu_s \nu_q \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k) \right] + iN \sum_{r,s,q} \nu_r \nu_s \nu_q \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k) \right] + N\varepsilon_2 \right\}, \tag{16}$$

где

$$|\varepsilon_2| \leqslant k_1 |\nu|^4. \tag{17}$$

Приняв это во внимание, рассмотрим квадратичную форму

$$\sum_{s,q} \nu_s \nu_q \left\{ \int_G i(f)\, A_{sq}(f)\, df \right\} = \frac{1}{2} \int_G i(f) \left\{ \int_\Omega \varrho(x, f) \left[\sum_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f) \right]^2 dx \right\} df$$

и заметим, как мы уже установили, что она является определенно положительной, а так как A_{sq} $\Pi^{\delta_1}G$-ограниченная и $\Pi^{\delta_1}G$-непрерывная, мы получим на основании леммы II [4], что равномерно в Π^{δ_1}

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k) \to \int_G i(f)\, A_{sq}(f)\, df.$$

Следовательно, можно найти числа, не зависящие от ν, $N^{**} > N^*$, $\gamma > 0$, $\gamma_1 > 0$, такие, что

$$\gamma_1 \sum_s \nu_s^2 \geqq \sum_{s,q} \nu_s \nu_q \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k)\right] \geqq \gamma \sum_s \nu_s^2 \quad \text{для } N \geqslant N^{**},$$

и это неравенство будет справедливым всюду в Π^{δ_1}.

Полагаем теперь

$$k_2 = \sup |A_{qrs}(f)|, \quad f \in G, \quad \mu \in \Pi^{\delta_1}, \quad q,\ r,\ s = 1, \ldots, L,$$

и берем значения Δ так, чтобы $k_1\Delta^4 + k_2 L^{3/2}\Delta^3 = \frac{\gamma}{2}\Delta^2$. Известно, что $\sum\limits_s \nu_s^2 = \Delta^2$, поэтому

$$|\varepsilon_2| + \sup |A_{qrs}(f)|\, L^{3/2}\left(\sum_s \nu_s^2\right)^{3/2} \leqslant \frac{\gamma}{2}\sum_s \nu_s^2,$$

отсюда

$$\left|\sum_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right]\right| + \varepsilon_2 \leqslant \frac{\gamma}{2}\sum_s \nu_s^2.$$

Таким образом,

$$\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_\Omega \varrho(x, f_k)\, e^{i\sum\limits_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f_k)}\, dx\right\} =$$

$$= \exp\left\{-N\sum_{s,q}\nu_s\nu_q\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k)\right] + iN\sum_{q,r,s}\nu_q\nu_r\nu_s\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] +\right.$$

$$\left.+ N\varepsilon_2\right\} = e^{-N\sum\limits_{q,s}\nu_q\nu_s\left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qs}(f_k)\right]} + iN\sum_{q,r,s}\nu_q\nu_r\nu_s\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] \times$$

$$\times e^{-N\sum\limits_{q,s}\nu_q\nu_s\left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qs}(f_k)\right]} + \varepsilon_3 =$$

$$= e^{-N\sum\limits_{s,q}\nu_s\nu_q\left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k)\right]}\left(1 + iN\sum_{q,r,s}\nu_q\nu_r\nu_s\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] + N\varepsilon_2\right) + \varepsilon_3,$$

где

$$\varepsilon_3 = e^{-N\sum\limits_{q,r} \nu_q \nu_r \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{rq}(f_k)\right]} \left(e^{N\sum\limits_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{rsq}(f_k)\right] + N\varepsilon_2} - \right.$$

$$\left. - 1 - iN \sum_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] - N\varepsilon_2 \right).$$

Принимая за x выражение

$$x = iN \sum_{s,q,r} \nu_s \nu_q \nu_r \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{sqr}(f_k)\right] + N\varepsilon_2$$

и оценивая

$$\sum_{s,q} \nu_s \nu_q \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{sq}(f_k)\right] \geqslant \gamma\,|\nu|^2,$$

применим к ε_3 очевидное неравенство

$$|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{|x|^2}{2} e^{|x|}$$

и получим

$$|\varepsilon_3| \leqq e^{-N\sum\limits_{q,s} \nu_q \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qs}(f_k)\right]} \frac{\left| iN \sum\limits_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k) + N\varepsilon_2\right.\right|^2}{2} \times$$

$$\times e^{\left| iN \sum\limits_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] + N\varepsilon_2 \right|} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-N\gamma|\nu|^2} \cdot \frac{1}{2}\{Nk_1|\nu|^4 + Nk_2 N^{3/2}|\nu|^3\}^2 e^{N\frac{\gamma}{2}|\nu|^2} =$$

$$= \frac{1}{2} N^2 |\nu|^6 e^{-N\frac{\gamma}{2}|\nu|^2} \{k_1|\nu|^2 + k_2 L^{3/2}\}^2 \leqslant k_3 N^2 |\nu|^6 e^{-N\frac{\gamma}{2}|\nu|^2 N},$$

где

$$k_3 = \frac{1}{2}\{k_1|\nu|^2 + k_2 L^{3/2}\}^2 .$$

Таким образом, имеем следующее выражение:

$$\prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f_k)\, e^{i\sum\limits_{s=1}^{L} \nu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} =$$

$$= \left\{ 1 + iN \sum_{q,r,s} \nu_q \nu_r \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k)\right] + N\varepsilon_2 \right\} e^{-N\sum\limits_{q,s} \nu_q \nu_s \left[\frac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} A_{qs}(f_k)\right]} + \varepsilon_3, \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_3 < k_3 N^2 |\mathbf{v}|^6 e^{-\frac{\gamma}{2}N|\mathbf{v}|^2}.$$

Во второй лемме [3] показано, что

$$Z(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_L) = Z^L(0) + \sum_{s=1}^{L} \mathbf{v}_s Z'_{\mathbf{v}_s}(0) + k_4 |\mathbf{v}|^2, \qquad k_4 - \text{const}.$$

На основании этого с учетом равенства (18) имеем

$$Z(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_L) \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega} \varrho(x, f_k) e^{i \sum_{s=1}^{L} \mathbf{v}_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\} =$$

$$= \left\{ Z^L(0) + iNZ^L(0) \sum_{q,r,s} \mathbf{v}_q \mathbf{v}_r \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{qrs}(f_k) \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{s} \mathbf{v}_s Z'_{\mathbf{v}_s}(0) \right\} e^{-N \sum_{q,s} \mathbf{v}_q \mathbf{v}_s \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} A_{qs}(f_k) \right]} + \varepsilon_4, \tag{19}$$

где

$$|\varepsilon_4| < \left\{ k_4 |\mathbf{v}|^2 (1 + k_2 L^{3/2} N |\mathbf{v}|) + k_2 L^{3/2} |\mathbf{v}|^4 \sqrt{\sum_{s} |Z'_{\mathbf{v}_s}(0)|^2} + \right.$$

$$\left. + k_3 N |\mathbf{v}|^6 Z^L_{(0)} \right\} e^{-N \frac{\gamma}{2} |\mathbf{v}|^2}.$$

Далее, применяя все преобразования, которыми мы пользовались во второй лемме [3], получим то неравенство, которое и следовало доказать:

$$W \geqslant \frac{\alpha}{N^{\frac{L}{2}}} \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega} e^{\sum_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\}, \qquad N \geqslant N^0, \; Q \geqslant Q^*,$$

где $\alpha = \frac{1}{2} Z^L(0) \left(\frac{\pi}{\gamma} \right)^{\frac{L}{2}}$.

Из третьей леммы работы [3], примененной для функции $\varphi(x, f)$, где $x \in \Omega$, $f \in G$, вытекает следующее неравенство:

$$\int_A \ldots \int dx_1 \ldots dx_N \leqq \frac{\alpha^*}{N^{\frac{L}{2}}} \prod_{k=1}^{N} \left\{ \int_{\Omega} e^{\sum_{s=1}^{L} \mu_s \psi_s(x, f_k)} dx \right\}, \qquad N \geqslant N^*.$$

Таким образом, мы получили асимптотическую формулу

$$\frac{\alpha}{N^{\frac{L}{2}}}\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega} e^{\sum_{s=1}^{L}\mu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\} \leqslant \int\ldots\int_{A} dx_1\ldots dx_N \leqq$$

$$\leqq \frac{\alpha^*}{N^{\frac{L}{2}}}\prod_{k=1}^{N}\left\{\int_{\Omega} e^{\sum_{s=1}^{L}\mu_s\psi_s(x,f_k)}\,dx\right\},$$

дающую возможность замены микроканонического распределения каноническим распределением Гиббса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. В. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, М.—Л., 1946.

А. Я. Хинчин, Математические основания статистической механики, Гостехиздат, М.—Л., 1943.

3. Т. В. Морозова, Метод наименьшего спуска в теории статистического равновесия, Изд-во КГУ, К., 1957.
4. Т. В. Морозова, Асимптотические неравенства, приложимые к задачам статистической механики, УМЖ, т. XI, № 3, 1959.

Поступила 7.XII 1965 г.

Киев