О степенях оператора, порожденного задачей Коши для гиперболического уравнения второго порядка

Ю. Б. Орочко

В работе [1] М. Рисс подробно излагает принадлежащий ему метод решения задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка. Решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = f(t, x_1, \ldots, x_{m-1}), \tag{1}$$

$$u\,\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \qquad t \geqslant 0,$$

он получает как аналитическое продолжение (а. п.) по параметру α в точку $\alpha = 2$ интеграла

$$(I^\alpha f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right)} \int\limits_{D^{(t, x_1, \ldots, x_{m-1})}} \left[(t-t')^2 - \sum_{j=1}^{m-1} (x_j - x_j')^2\right]^{\frac{\alpha-m}{2}} \times$$

$$\times f(t', x_1', \ldots, x_{m-1}')\, dt'\, dx_1' \ldots dx_{m-1}', \tag{2}$$

$D^{(t, x_1, \ldots, x_{m-1})}$ — область в m-мерном эвклидовом пространстве E^m, ограниченная гиперплоскостью $t' = 0$ и поверхностью $t - t' = \left[\sum_{j=1}^{m-1} (x_j - x_j')^2\right]^{1/2}$, $t' \geqslant 0$. Интеграл (2) аналитичен по α в области $\operatorname{Re}\alpha > m - 2$. Для существования его а.п. в точку $\alpha = 2$ необходима некоторая гладкость функции f.

Если ввести оператор I_0, сопоставляющий $f(t, x_1, \ldots, x_{m-1})$ решение задачи (1), то из сказанного выше следует формула

$$(I_0 f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \underset{\alpha=2}{\text{а.п.}}\, (I^\alpha f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}).$$

Нетрудно найти явный вид правой части этого равенства. Оказывается, что оператор I_0, вообще говоря, имеет интегро-дифференциальный характер, однако его достаточно большая степень уже является интегральным оператором типа Вольтерра. Точнее говоря, справедливо равенство

$$(I_0^k f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) = \underset{\alpha=2k}{\text{а.п.}}\, (I^\alpha f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

k — целое положительное число, из которого следует, что при $k \geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$

$$(I_0^k f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) =$$

$$= \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{2k-1} \Gamma(k) \Gamma\left(\frac{2k+2-m}{2}\right)} \int\limits_{D^{(t, x_1, \ldots, x_{m-1})}} \left[(t-t')^2 - \sum_{j=1}^{m-1} (x_j - x_j')^2\right]^{\frac{2k-m}{2}} \times$$
$$\times f(t', x_1', \ldots, x_{m-1}')\, dt'\, dx_1' \ldots dx_{m-1}'.$$

С задачей Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + a(t, x_1, \ldots, x_{m-1})\, u = f(t, x_1, \ldots, x_{m-1}), \tag{3}$$

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad t \geqslant 0,$$

аналогичным образом связывается оператор I_a:

$$(I_a f)(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) = u(t, x_1, \ldots, x_{m-1}),$$

u — решение задачи (3). Возникает вопрос, сохраняется ли для I_a свойство быть корнем достаточно высокой степени из некоторого интегрального оператора типа Вольтерра в общем случае, т. е. при $a(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) \neq 0$)? Ответом на этот вопрос является следующая теорема.

Теорема. Пусть I_a—*оператор, сопоставляющий каждой* $f(P) \in C^\infty(E_+^m)$ *решение* $u(P)$ *задачи Коши*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + a(P)\, u = f(P), \quad u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

$$a(P) \in C^\infty(E_+^m),$$

I_a^k — *его* k-*я степень.*

Тогда при $k \geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$ I_a^k *является интегральным оператором типа Вольтерра*:

$$(I_a^k f)(P) = \int\limits_{D^P} I_{a,k}(P, Q)\, f(Q)\, dQ. \tag{5}$$

Ядро $I_{a,\left[\frac{m}{2}\right]}(P, Q)$ *непрерывно внутри, а ядра* $I_{a,k}(P, Q)$, $k > \left[\frac{m}{2}\right]$, *непрерывны вплоть до границы области* $G = \{P \in E_+^m, Q \in D^P\} \subset E_+^m \times E_+^m$, *причем* $I_{a,k}(P, Q) = 0$, $k > \left[\frac{m}{2}\right]$, *на границе* G, *т. е. при* $r(P, Q) = 0$.

Значения ядра $I_{a,k}(P, Q)$, $Q \in D^P$, $k \geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, *при фиксированном* P *зависят от значений коэффициента* a, *которые он принимает в* D^P, *и не зависят от его поведения вне этой области.*

Доказательство этой теоремы составляет содержание настоящей работы. В другой статье ее результат будет использован для получения оценок роста на бесконечности собственных функций оператора Шредингера.

Условимся относительно некоторых обозначений. Встречающиеся ниже функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ и т. д. определены в полупространстве E_+^m m-мерного эвклидова пространства $E^m : E_+^m = \{(t, x_1, \ldots, x_{m-1}) : t \geqslant 0, (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in E^{m-1}\}$. Точки, принадлежащие E_+^m, обозначаются буквами P, Q, R, причем координаты точки P обозначаются $(t, x_1, \ldots, x_{m-1})$, а точки Q — $(s, y_1, \ldots, y_{m-1})$. Нам встретятся и функции, определенные на $E_+^m \times E_+^m$, т. е. зависящие от $2m$ переменных $(P, Q) = (t, x_1, \ldots, x_{m-1}, s, y_1, \ldots, y_{m-1})$, $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. Как обычно, $C^\infty(E_+^m)$, $C^\infty(E_+^m \times E_+^m)$ — это классы бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций в областях $E_+^m, E_+^m + E_+^m$.

Символ $\square$ применяется для обозначения оператора $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. Мы пишем $\square_P$, $\square_Q$, если хотим подчеркнуть, по какой переменной действует оператор. Лоренцево расстояние между точками P и Q обозначается $r(P, Q)$: $r^2(P, Q) = (t - s)^2 - \sum\limits_{j=1}^{m-1} (x_j - y_j)^2$. Нам придется иметь дело с такими областями полупространства E_+^m: $D^P = \{Q : r^2(P, Q) \geqslant 0,\ t \geqslant s \geqslant 0\}$, $D_Q = \{P : r^2(P, Q) \geqslant 0,\ t \geqslant s \geqslant 0\}$, $D_Q^P = \{R : R \in D^P, Q \in D^R\}$.

Граница области D_Q^P обозначается S_Q^P, $S^P = \{Q : r^2(P, Q) = 0, t \geqslant s \geqslant 0\}$, $S_Q = \{P : r^2(P, Q) = 0,\ t \geqslant s \geqslant 0\}$.

Символ а. п. $f(\cdot)$ означает а. п. функции комплексного переменного $\varphi(\alpha)$ в точку α_0.

1. В доказательстве теоремы существенно используются некоторые свойства решений задачи Коши с комплексным параметром λ

$$\square u_\lambda + a(P) u_\lambda + \lambda^2 u_\lambda = f(P),\ u_\lambda\big|_{t=0} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0,\ a(P), f(P) \in C^\infty(E_+^m). \quad (6)$$

Указанная гладкость коэффициента и правой части обеспечивает существование и единственность решения $u_\lambda(P)$ задачи (6), причем $u_\lambda(P) \in C^\infty(E_+^m)$ (см., например, [2]).

Введение параметра в задачу Коши представляет интерес в связи с тем, что можно написать формальное равенство

$$(I_a^k f)(P) = 1/2\pi \oint \frac{u_\lambda(P)}{(i\lambda)^{2k-1}}\, d\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots \quad (7)$$

Интегрирование ведется по замкнутому контуру вокруг точки $\lambda = 0$ (см. аналогичную формулу на стр. 213 статьи [1], в которой, однако, интегрирование ведется по незамкнутому контуру, уходящему в бесконечность).

Чтобы доказать равенство (7), достаточно установить аналитичность $u_\lambda(P)$ по λ, а также непрерывность производных $u_\lambda(P)$ по координатам $t, x_1, \ldots, x_{m-1}$ до второго порядка включительно, как функций переменной $(P, \lambda) \in E_+^m \times \Lambda$, Λ — комплексная λ-плоскость. Тогда (7) будет следовать из единственности решения задачи (4). Доказать перечисленные свойства можно, сводя эту задачу к некоторому интегральному уравнению с помощью метода М. Рисса.

Для такой цели введем ядра $V_k(P,Q)$:

$$V_0(P,Q)\equiv 1,\ V_k(P,Q)=-\frac{1}{2}\int_0^1 \eta^{k-1}L'V_{k-1}(P,P+\eta(Q-P))\,d\eta$$

(символ $L'V_{k-1}$ означает результат применения оператора $L=\Box+a(\cdot)$ к ядру V_{k-1} по переменной Q), а затем ядро

$$W_{p_0}(P,Q,\lambda,\alpha)=\frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}}2^{\frac{\alpha+m-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sum_{j=0}^{p_0}V_j(P,Q)\,S_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(P,Q,\lambda),$$

$$S_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(P,Q,\lambda)=\left(\frac{r(P,Q)}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha-m}{2}+j}J_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(\lambda r(P,Q))=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l r^{\alpha-m+2j+2l}(P,Q)\,\lambda^{2l}}{2^{2l+j+\frac{\alpha-m}{2}}\,l!\,\Gamma\left(j+l+\frac{\alpha-m}{2}+1\right)};\qquad(8)$$

здесь $J_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(\cdot)$ — бесселева функция порядка $\frac{\alpha-m}{2}+j$, α и λ — комплексные параметры, $Q\in D^P$, $r^\alpha=e^{\alpha\ln r}$, $\ln r$ — главное значение логарифма. В наших рассуждениях всегда $p_0\geqslant m-1$,

Нетрудно проверить, что интеграл

$$\int_{D^P}W_{p_0}(P,Q,\lambda,\alpha)f(Q)\,dQ,\qquad f\in C^\infty(E_+^m),\qquad(9)$$

сходится, если $\operatorname{Re}\alpha>m-2$, и является аналитической функцией α в этой области. Принадлежность f классу $C^\infty(E_+^m)$ обеспечивает возможность аналитического продолжения по α интеграла (9) в любую точку комплексной плоскости (см. [1], стр. 55 — 59), что позволяет определить оператор $K_{p_0,\lambda}$:

$$(K_{p_0,\lambda}f)(P)=\underset{2}{\text{а. п.}}\int_{D^P}W_{p_0}(P,Q,\lambda)f(Q)\,dQ,\qquad(10)$$

$$f\in C^\infty(E_+^m).$$

Пользуясь рассуждениями из главы VII работы [1], можно показать *, что $u_\lambda(P)$ (решение задачи (6)) одновременно является решением интегрального уравнения, которое при нечетном m имеет вид

$$u_\lambda(P)=(K_{p_0,\lambda}f)(P)+\int_{D^P}B_{p_0}(P,Q,\lambda)\,u_\lambda(Q)\,dQ,\qquad(11)$$

$$B_{p_0}(P,Q,\lambda)=-\frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}}2^{\frac{m}{2}}}S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,Q,\lambda)(L'V_{p_0})(P,Q).\qquad(12)$$

---

* Мы не приводим здесь соответствующих выкладок, так как они лишь в деталях отличаются от доказательства М. Рисса аналогичного факта для оператора Бельтрами ([1], стр. 198—200).

Уравнение (11) можно решать методом последовательных приближений. Для u_λ получается представление

$$u_\lambda (P) = (K_{p_0,\lambda} f)(P) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{D^P} B_{p_0}^{(j)} (P, Q, \lambda) (K_{p_0,\lambda} f)(Q)\, dQ, \tag{13}$$

$$B_{p_0}^{(1)} (P, Q, \lambda) = B_{p_0} (P, Q, \lambda); \quad B_{p_0}^{(j)} (P, Q, \lambda) = \int_{D_Q^P} B_{p_0} (P, R, \lambda)\, B_{p_0}^{(j-1)} (R, Q, \lambda)\, dR.$$

Из результатов М. Рисса следует, что ряд (13) и ряды — его формальные производные по P до второго порядка включительно,— сходятся равномерно по совокупности переменных P, λ (P и λ изменяются в ограниченных областях). Это позволяет сделать вывод о том, что u_λ (P) обладает свойствами, достаточными для справедливости формулы (7).

2. В этом пункте рассмотрим некоторые свойства по α интегралов вида

$$M_{\alpha, j} (P, \lambda) = \int_{D^P} V (P, Q)\, S_{\frac{\alpha - m}{2} + j} (P, Q, \lambda)\, f (Q)\, dQ, \tag{14}$$

$$N_{\alpha, j} (P, \lambda) = \int_{D^P} W (P, Q)\, S_{\frac{2 - m}{2} + p_0} (P, Q, \lambda)\, M_{\alpha, j} (Q, \lambda)\, dQ, \tag{15}$$

предполагая, что $V (P, Q), W (P, Q) \in C^\infty (E_+^m \times E_+^m)$, j — целое число, и что $m \geqslant 3$ и нечетно.

Ряд (8) сходится равномерно по совокупности переменных r, α, λ, если $|\lambda| \leqslant C_1$, $|r| \leqslant C_2$, $\operatorname{Re} \alpha \geqslant m - 2 - 2j + \varepsilon$, $|\alpha| \leqslant C_3$, C_1, C_2, C_3, ε — произвольные положительные постоянные. Поэтому, представив $S_{\frac{\alpha - m}{2} + j} (P, Q, \lambda)$ в виде ряда (8), в интеграле (14) можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Мы приходим к выражению

$$M_{\alpha, j} (P, \lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!}\, M_{\alpha, j}^{(l)} (P), \tag{16}$$

$$M_{\alpha, j}^{(l)} (P) = \frac{1}{2^{\frac{\alpha - m}{2} + j}\, \Gamma\left(j + l + \frac{\alpha - m}{2} + 1\right)} \int_{D^P} V (P, Q)\, r^{\alpha - m + 2j + 2l} (P, Q)\, f(Q) dQ,$$

$$\operatorname{Re} \alpha > m - 2 - 2j.$$

Рассмотрим любой остаток ряда (16):

$$M_{\alpha, j, k} (P, \lambda) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!}\, M_{\alpha, j}^{(l)} (P), \qquad k \geqslant 0. \tag{17}$$

Легко убедиться в том, что каждый интеграл $M_{\alpha, j}^{(l)}$ является аналитической функцией α и непрерывной функцией переменных P и α, если $\operatorname{Re} \alpha > m - 2j - 2l - 2$, а $P \in E_+^m$. Ряд (17) сходится равномерно по λ, P, α, если $|\lambda| \leqslant C_1$, $|\alpha| \leqslant c_2$, $\operatorname{Re} \alpha \geqslant m - 2 - 2j - 2k + \varepsilon$, $P \in D^{P^0}$, $P^0 \in E_+^m$ — произвольно фиксированная точка, $\varepsilon, C_1, C_2 > 0$ — произвольные постоянные (следует из отличной сходимости ряда (8)). Следовательно, $M_{\alpha, j, k} (P, \lambda)$-непрерывная функция совокупности переменных λ, α, P ($|\lambda| < \infty$, $\operatorname{Re} \alpha > m - 2j - 2k - 2$, $P \in E_m^+$), аналитическая по α в полуплоскости $\operatorname{Re} \alpha > m -$

$-2j-2k$ при фиксированных P и λ и аналитическая по λ при фиксированных P и α.

Нас интересует а. п. $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$ в область $\operatorname{Re}\alpha > 1$. Из приведенных рассуждений следует, что $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$ — аналитическая функция α в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > 1$, если $j \geqslant \frac{m-3}{2}$, $m \geqslant 3$. Пусть $m \geqslant 5$ и $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$. Тогда

$$M_{\alpha,j}(P,\lambda) = \sum_{l=0}^{\frac{m-2j-5}{2}} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!} M_{\alpha,j}^{(l)}(P) + M_{\alpha,j,\frac{m-2j-3}{2}}(P,\lambda),$$

причем функция $M_{\alpha,j,\frac{m-2j-3}{2}}(P,\lambda)$ аналитична по α при $\operatorname{Re}\alpha > 1$. Чтобы найти а. п. $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$ в полосу $3 \geqslant \operatorname{Re}\alpha > 1$, достаточно аналитически продолжить в эту область выражения $M_{\alpha,j}^{(l)}$, $0 \leqslant l \leqslant \frac{m-2j-5}{2}$. Тогда

$$\underset{\alpha_0}{\text{а. п.}}\, M_{\alpha,j}(P,\lambda) = \sum_{l=0}^{\frac{m-2j-5}{2}} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!} \underset{\alpha_0}{\text{а. п.}}\, M_{\alpha,j}^{(l)}(P) + M_{\alpha_0,j,\frac{m-2j-3}{2}}(P,\lambda),$$

$$1 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 3.$$

Из результатов М. Рисса, относящихся к а. п. интегралов типа $M_{\alpha,j}^{(l)}(P)$ (см. [1], стр. 55 — 59) следует, что функции а. п. $M_{\cdot,j}^{(l)}(P)$ непрерывны по совокупности переменных P, α, $P \in E_+^m$, $\operatorname{Re}\alpha > 1$. Если ввести функции

$$M_{\alpha,j}^{*}(P,\lambda) = \begin{cases} M_{\alpha,j}(P,\lambda) \text{ при } \operatorname{Re}\alpha > m-2j-2,\, P \in E_+^m,\, |\lambda| < \infty, \\ \underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, M_{\cdot,j}(P,\lambda) \text{ при } m-2j-2 \geqslant \operatorname{Re}\alpha > 1,\, P \in E_+^m,\, |\lambda| < \infty, \end{cases}$$

$$m \geqslant 5, \qquad 0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2},$$

то из приведенных выше рассуждений следует такое утверждение:

Лемма 1. *Функции* $M_{\alpha,j}^{*}(P,\lambda)$ $\left(m \geqslant 5 \text{ *и нечетно*, } 0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}\right)$ *аналитичны по* α *в полуплоскости* $\operatorname{Re}\alpha > 1$, *по* λ *— во всей комплексной* λ*-плоскости и непрерывны в своей области определения по совокупности переменных* P, α, λ. *Имеет место следующее разложение в ряд Маклорена:*

$$M_{\alpha,j}^{*}(P,\lambda) = \sum_{l=0}^{\frac{m-2j-5}{2}} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!} M_{\alpha,j}^{(l),*}(P) +$$

$$+ \sum_{l=\frac{m-2j-5}{2}} \frac{(-1)^l \lambda^{2l} \int_{D^P} V(P,Q)\, r^{\alpha-m+2j+2l}(P,Q)\, f(Q)\, dQ}{2^{2l+j+\frac{\alpha-m}{2}} l!\, \Gamma\left(j+l+\frac{\alpha-m}{2}+1\right)},$$

$\operatorname{Re}\alpha > 1$, $|\lambda| < \infty$, *функции* $M^{(l)*}_{\alpha,j}$ *определены равенствами*

$$M^{(l)*}_{\alpha,j}(P,\lambda) = \begin{cases} M^{(l)}_{\alpha,j}(P), \operatorname{Re}\alpha > m-2j-2l-2, P \in E^m_+, \\ \underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, M^{(l)}_{\cdot,j}(P), m-2j-2l-2 \geqslant \operatorname{Re}\alpha > 1,\ P \in E^m_+. \end{cases}$$

Как было отмечено выше, если $j \geqslant \frac{m-3}{2}$, $m \geqslant 3$, то нет необходимости продолжать функции $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$ в область $\operatorname{Re}\alpha > 1$, так как они уже аналитичны в этой полуплоскости. Рассуждения, приведшие нас в случае $m \geqslant 5$, $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$, к лемме 1, в случае $m \geqslant 3$, $j \geqslant \frac{m-3}{2}$ позволяют сформулировать лемму:

Лемма 2. *Функции* $M_{\alpha,j}(P,\lambda)\left(m \geqslant 3 \text{ и нечетно, } j \geqslant \frac{m-3}{2}\right)$ *обладают всеми свойствами, перечисленными в лемме* 1 *для* $M^*_{\alpha,j}(P,\lambda)$, $m \geqslant 5$, $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$. *Единственное отличие представляет вид разложения Маклорена*:

$$M_{\alpha,j}(P,\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \lambda^{2l} \int\limits_{D^P} V(P,Q)\, r^{\alpha-m+2j+2l}(P,Q)\, f(Q)\, dQ}{2^{2l+j+\frac{\alpha-m}{2}}\, l!\, \Gamma\left(j+l+\frac{\alpha-m}{2}+1\right)},$$

$$\operatorname{Re}\alpha > 1,\ |\lambda| < \infty.$$

Займемся исследованием а. п. интегралов $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$. Нам понадобится одно свойство интегралов, зависящих от комплексного параметра.

Лемма 3. *Предположим, что* $f(Q, z)$ — *функция точки* $Q \in E^m$ *и комплексного параметра* z, *удовлетворяющая условиям*: (а) *для почти всех* Q *из некоторой ограниченной области* $D \in E^m$ $f(Q, z)$ *является аналитической функцией* z *в полуплоскости* G: $\operatorname{Re} z > \text{const} \geqslant -\infty$, (б) *пусть* z *изменяется вдоль произвольного отрезка, лежащего в* G, *т. е.* $z = c_1 t + c_2$, c_1, c_2 — *комплексные постоянные*, t — *вещественный параметр*, $-\infty < t_1 \leqslant t \leqslant t_2 < \infty$; *требуется, чтобы* $f(Q, z)$ *как функция переменных* Q, t *была интегрируема по Лебегу в области* $D \times [t_1, t_2]$; (в) *при всех* $z \in G$ $\int\limits_D f(Q, z)dQ = F(z)$ *существует и является непрерывной функцией*.

Тогда $F(z)$ *аналитична в полуплоскости* G.

Для доказательства нужно воспользоваться следствием из теоремы Морера, согласно которому для аналитичности $F(z)$ достаточно обращение в нуль $\oint F(z)dz$ вдоль любого замкнутого треугольного контура, лежащего в G (см., например, [3], стр. 170). Вследствие свойства (б) $\oint F(z)dz$ можно представить в виде суммы трех повторных интегралов Лебега, в которых законна перестановка порядка интегрирования. Поэтому $\oint F(z)dz = \int\limits_D \left(\oint f(Q, z)\, dz\right) dQ = 0$ — внутренний интеграл обращается в нуль в силу условия (а).

Из аналитичности $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$ по λ и α ($\operatorname{Re}\alpha > m-2j-2$) и непрерывности по совокупности переменных следует, что условия леммы 3 выполнены для функций

$$f(Q,z) = W(P,Q)\, S_{\frac{z-m}{2}+p_0}(P,Q,\lambda)\, M^*_{z,j}(Q,\lambda) \text{ и } f(Q,z) =$$

$$= W(P,Q)\, S_{\frac{\alpha-m}{2}+p_0}(P,Q,z)\, M^*_{\alpha,j}(Q,z).$$

Следовательно, интеграл $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$ является аналитической функцией α в области $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$ и аналитической функцией λ во всей λ-плоскости. Непрерывность $M_{\alpha,j}(P,\lambda)$ по всем переменным влечет непрерывность интеграла $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$ по α, λ, P в области своего определения.

Мы будем интересоваться аналитическим продолжением функций $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$ по α в полосу $1 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 3$.

Вследствие аналитичности $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$ по α в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > m-2j-2$ эти функции аналитичны в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > 1$, если $j \geqslant \frac{m-3}{2}$, $m \geqslant 3$. Займемся аналитическим продолжением $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$ при $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$, $m \geqslant 5$. Из лемм 1, 3 следует, что

$$N^{*}_{\alpha,j}(P,\lambda) = \int\limits_{D^P} W(P,Q)\, S_{\frac{\alpha-m}{2}+p_0}(P,Q,\lambda)\, M^{*}_{\alpha,j}(Q,\lambda)\, dQ,$$

$$0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2},$$

является аналитической функцией α в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > 1$, т. е.

$$N^{*}_{\alpha,j}(P,\lambda) = \underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, N_{\cdot,j}(P,\lambda),\ m-2-2j \geqslant \operatorname{Re}\alpha > 1,\ 0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}.$$

Выведем другое представление для а. п. $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$, $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$, $m \geqslant 5$.

Для этого изменим порядок интегрирования в повторном интеграле $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$, $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$. Мы приходим к такому выражению для $N_{\alpha,j}(P,\lambda)$, $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$:

$$N_{\alpha,j}(P,\lambda) = \int\limits_{D^P} C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)\, f(Q)\, dQ,$$

$$C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda) = \int\limits_{D^P_Q} S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,R,\lambda)\, W(P,R)\, V(R,Q)\, S_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(R,Q,\lambda)\, dR. \tag{18}$$

Функция $C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ непрерывна по α в области $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$: если воспользоваться оценкой (28) и равенством (30), то легко показать, что при $\alpha_n \to \alpha$, $\operatorname{Re}\alpha_n > m-2-2j$, $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$ последовательность подынтегральных функций в интегралах $C_{\alpha_n,j}(P,Q,\lambda)$ имеет интегрируемую мажоранту; поэтому можно воспользоваться известной теоремой Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла (см., например, [4], стр. 46), из которой и следует непрерывность $C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ по α.

Таким образом, свойство (в) леммы 3 выполняется для функции $f(R,z) = S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,R,\lambda)\, W(P,R)\, V(R,Q)\, S_{\frac{z-m}{2}+j}(R,Q,\lambda)$, причем G — полуплоскость $\operatorname{Re} z > m-2-2j$, а $D = D^P_Q$. Условие (б) выполнено вследствие оценки (28), а то, что выполняется условие (а), вытекает непосредственно из определения $f(R,z)$. Мы приходим к выводу: $C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ является аналитической функцией α в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha > m-2-2j$.

Справедливы такие равенства (см. [1], стр. 89):

$$(\Box_P + \lambda^2)\, S_{\frac{\alpha+2-m}{2}}(P,Q,\lambda) = (\Box_Q + \lambda^2)\, S_{\frac{\alpha+2-m}{2}}(P,Q,\lambda) = \alpha S_{\frac{\alpha-m}{2}}(P,Q,\lambda). \tag{19}$$

Поэтому

$$S_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(R,Q,\lambda)=\gamma_j(\alpha)\,(\Box_R+\lambda^2)^{\frac{m-1}{2}+j}S_{\frac{\alpha-1}{2}}(R,Q,\lambda),\quad \gamma_j(\alpha)=\frac{1}{\prod\limits_{l=1}^{\frac{m-1}{2}}(\alpha+m+2l)}. \tag{20}$$

Если в интеграле (18) проинтегрировать $\frac{m-1}{2}-j$ раз по частям, перебрасывая оператор $\Box_R+\lambda^2$ с выражения (20) и пользуясь формулой Грина

$$\int\limits_{D_Q^P}(f\Box g-\Box fg)\,dR=\int\limits_{S_Q^P}\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-\frac{\partial f}{\partial n}\cdot g\right)dR,$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по направлению внешней конормали, то получится представление:

$$C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)=\gamma_j(\alpha)\int\limits_{D_Q^P}(\Box_R+\lambda^2)^{\frac{m-1}{2}+j}[S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,R,\lambda)\,W(P,R)\,V(R,Q)]\times$$
$$\times S_{\frac{\alpha-1}{2}}(R,Q,\lambda)\,dR. \tag{21}$$

Интегралы по границе аннулируются, если $\operatorname{Re}\alpha>m-2j$, так как при нашем выборе $p_0\,(p_0\geqslant m-1)\,S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,R,\lambda)$ обращается в нуль на S^P вместе с производными, которые входят в граничные интегралы, а при $\operatorname{Re}\alpha>m-2j$ функция $S_{\frac{\alpha-1}{2}}(P,Q,\lambda)$ и ее производные, входящие в интегралы по границе, обращаются в нуль на S_Q. Это обеспечивает равенство (21) при $\operatorname{Re}\alpha>m-2j$. Но $C_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ — аналитическая функция α в области $\operatorname{Re}\alpha>m-2-2j$. Правая часть равенства (21) аналитична в более широкой области, по крайней мере, при $\operatorname{Re}\alpha\geqslant 1$. Следовательно, (21) справедливо в полуплоскости $\operatorname{Re}\alpha>m-2-2j$ и, более того,

$$\underset{\alpha}{\text{а. п.}}\,C_{\cdot,j}(P,Q,\lambda)=C^*_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)=$$
$$=\gamma_l(\alpha)\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}-j}\int\limits_{D^P}S_{\frac{2-m-2l}{2}+p_0}(P,R,\lambda)\,U_{jl}(P,R,Q)\,S_{\frac{\alpha-1}{2}}(R,Q,\lambda)\,dR, \tag{22}$$

$\operatorname{Re}\alpha\geqslant 1$, $U_{jl}(P,R,Q)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции совокупности переменных P,R,Q. Мы преобразовали правую часть равенства (21), использовав тот факт, что имеют место формулы

$$\frac{\partial}{\partial y_j}S_{\frac{\alpha+2-m}{2}}(P,Q,\lambda)=(x_j-y_j)\,S_{\frac{\alpha-m}{2}}(P,Q,\lambda),\quad j=1,2,\ldots,m-1,$$
$$\frac{\partial}{\partial s}S_{\frac{\alpha+2-m}{2}}(P,Q,\lambda)=(s-t)\,S_{\frac{\alpha-m}{2}}(P,Q,\lambda),$$

на основании которых и равенства (19) просто получается формула

$$(\Box_R+\lambda^2)^{\frac{m-1}{2}+j}\{S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,R,\lambda)\,W(P,R)\,V(R,Q)\}=$$
$$=\sum_{l=0}^{\frac{m-1}{2}-j}S_{\frac{2-m-2l}{2}}(P,R,\lambda)\,U_{jl}(P,R,Q),$$

гладкость $U_{jl}(P, R, Q)$ является следствием принадлежности $W(P, Q)$ и $V(P, Q)$ классу $C^\infty(E_+^m \times E_+^m)$.

Из формулы (22) следует непрерывность $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$ по совокупности переменных P, Q, λ, α ($P \in E_+^m$, $Q \in D^P$, $|\lambda| < \infty$, $\operatorname{Re}\alpha > 1$) и равенство $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) = 0$ при $r(P, Q) = 0$. Аналитичность выражения $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$ по λ вытекает из леммы 3: выполнение условий (а) — (в) для подынтегральных функций правой части равенства (22) проверяется просто, так как эти функции не имеют особенностей в области интегрирования.

Учитывая, что при $\operatorname{Re}\alpha > m - 2 - 2j$

$$\int_{D^P} \overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ = \int_{D^P} C_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) f(Q) dQ = N_{\alpha,j}(P, \lambda)$$

и из перечисленных только что свойств $\overset{*}{C}_{\alpha,j}$ следует аналитичность интеграла $\int_{D^P} \overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ$ при $\operatorname{Re}\alpha > 1$, получим равенство

$$\underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, N_{\cdot,j}(P, \lambda) = \int_{D^P} W(P, Q)\, S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P, Q, \lambda)\, \underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, M_{\cdot,j}(Q, \lambda)\, dQ =$$

$$= \int_{D^P} \overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) f(Q) dQ, \quad 0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}, \quad 1 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant 2m - 2j - 2. \qquad (23)$$

Если $j \geqslant \dfrac{m-3}{2}$, $m \geqslant 3$, справедливо равенство, отличающееся от (23) тем, что: а) вместо $\underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, N_{\cdot,j}$, $\underset{\alpha}{\text{а. п.}}\, M_{\cdot,j}$, в нем участвуют просто функции $N_{\alpha,j}$, $M_{\alpha,j}$, так как они аналитичны в области $\operatorname{Re}\alpha > 1$; б) $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ заменено ядром $C_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$, имеющим смысл для α, $\operatorname{Re}\alpha > 1$, и обладающим свойствами гладкости и аналитичности такими же, как и $\overset{*}{C}_{\alpha,j}$ в случае $0 \leqslant j \leqslant \dfrac{m-5}{2}$, $m \geqslant 5$. Доказательство вполне аналогично доказательству для $j \leqslant \dfrac{m-5}{2}$, на нем мы не останавливаемся.

Подведем итог рассмотрений, связанных с а. п. интегралов $N_{\alpha,j}$.

Лемма 4. *Интегралы* $N_{\alpha,j}(P, \lambda)$ $\left(0 \leqslant j \leqslant \dfrac{m-5}{2},\ m \geqslant 5 \text{ *и нечетно*}\right)$ *являются аналитическими функциями параметра* α *в области* $\operatorname{Re}\alpha > m - 2 - 2j$ *и допускают а. п. в полуплоскость* $\operatorname{Re}\alpha > 1$. *Для а. п. этих интегралов справедливо равенство* (23), *причем ядро* $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$ *при фиксированном* α *является непрерывной функцией переменных* P, Q, λ, *изменяющихся в области* $\{P \in E_+^m, Q \in D^P, |\lambda| < \infty\}$, *а на границе этой области, т. е. при* $r(P, Q) = 0$, *обращается в нуль. При фиксированных* α, P, Q *ядро* $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P,Q,\lambda)$ *аналитично по* λ *во всей* λ*-плоскости.*

Лемма 5. *Интегралы* $N_{\alpha,j}(P, \lambda)$ $\left(j \geqslant \dfrac{m-3}{2},\ m \geqslant 3 \text{ *и нечетно*}\right)$ *аналитичны по* α *в областях, содержащих в себе полуплоскость* $\operatorname{Re}\alpha > 1$. *Имеют место равенства*

$$N_{\alpha,j}(P, \lambda) = \int_{D^P} C_{\alpha,j}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ, \quad \operatorname{Re}\alpha > 1, \quad j \geqslant \frac{m-3}{2},$$

причем ядра $C_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$ *обладают всеми свойствами, перечисленными в лемме 4 для ядер* $\overset{*}{C}_{\alpha,j}(P, Q, \lambda)$.

3. Возвратимся к равенству (13) для решения задачи Коши с параметром в случае нечетной размерности пространства E^m. На основании определений (10), (12) можно написать

$$\int\limits_{D^P} B_{p_0}^{(1)}(P,Q,\lambda)(K_{p_0,\lambda}f)(Q)dQ = -\frac{1}{\pi^{m-2}2^{\frac{m}{2}}}\sum_{j=0}^{p_0}\int\limits_{D^P} S_{\frac{2-m}{2}+p_0}(P,Q,\lambda)\times$$

$$\times (L' v_{p_0})(P,Q) \text{ a. п.}_2 \frac{1}{2^{\frac{\alpha-2+m}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_{D^Q} V_j(Q,R)\, S_{\frac{\alpha-m}{2}+j}(Q,R)\, f(R)\, dR dQ. \quad (24)$$

Применяя к каждому из слагаемых правой части (24) лемму 4 или лемму 5, после простого преобразования получим:

$$\int\limits_{D^P} B_{p_0}^{(1)}(P,Q,\lambda)(K_{p_0,\lambda}f)(Q)\,dQ = \int\limits_{D^P} C_{p_0}^{(1)}(P,Q,\lambda)\, f(Q)\, dQ, \quad (25)$$

причем ядро $C_{p_0}^{(1)}(P,Q,\lambda)$ непрерывно по совокупности переменных P, Q, λ, $C_{p_0}^{(1)}(P,Q,\lambda) = 0$ при $r(P,Q) = 0$, и при фиксированных P, Q оно является аналитической функцией λ.

Теперь, на основании определения ядер $B_{p_0}^{(j)}$, $j \geqslant 1$, и соотношения (25) просто выводятся равенства

$$\int\limits_{D^P} B_{p_0}^{(j)}(P,Q,\lambda)(K_{p_0,\lambda}f)(Q)\,dQ = \int\limits_{D^P} C_{p_0}^{(j)}(P,Q,\lambda)\, f(Q)\, dQ, \quad (26)$$

$$C_{p_0}^{(j)}(P,Q,\lambda) = \int\limits_{D_Q^P} B_{p_0}(P,R,\lambda)\, C_{p_0}^{(j-1)}(R,Q,\lambda)\, dR, \qquad j \geqslant 2. \quad (27)$$

Из способа построения ядер $C_{p_0}^{(j)}$ видно, что если $C_{p_0}^{(j_0-1)}$ обладает свойствами, перечисленными выше для случая $j_0 - 1 = 1$, то теми же свойствами будет обладать и $C_{p_0}^{(j_0)}$, т. е. все ядра $C_{p_0}^{(j)}(P,Q,\lambda)$ непрерывны по совокупности переменных P, Q, λ, обращаются в нуль на границе области определения (при $r(P,Q) = 0$) и аналитичны по λ (последнее свойство—следствие леммы 3). Выясним характер сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} C_{p_0}^{(j)}(P,Q,\lambda)$. При оценке членов этого ряда воспользуемся такими соотношениями:

$$\left| S_{\frac{\alpha-m}{2}}(P,Q,\lambda)\right| \leqslant \frac{r^{\alpha-m}(P,Q)\, e^{r(P,Q)|\mathrm{Im}\lambda|}}{2^{\alpha-m}\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right)}, \qquad \alpha \geqslant m-1 \quad (28)$$

$\Bigg($следствие оценки для бесселевых функций $|J_\nu(z)| \leqslant \frac{|z|^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} e^{|\mathrm{Im}z|}$, $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, см. [5], стр. 61$\Bigg)$,

$$r(P,R) + r(R,Q) \leqslant r(P,Q), \;\; R \in D^P, Q \in D^R \quad (29)$$

(см. [6], стр. 59),

$$\int\limits_{D_Q^P} r^{\alpha-m}(P,R)\, r^{\beta-m}(R,Q)\, dR = \frac{H_m(\alpha)\, H_m(\beta)}{H_m(\alpha+\beta)}\, r^{\alpha+\beta-m}(P,Q), \quad (30)$$

$$\operatorname{Re}\alpha,\ \operatorname{Re}\beta > m-2,\ \ H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right)$$

(см. [1], стр. 34).

Условимся обозначать встречающиеся ниже несущественные (абсолютные) постоянные буквой A. Предположим, что $P \in D^{P^0}$, $Q \in D^P$, $|\lambda| \leqslant \varrho$, P^0 — фиксированная точка, ϱ — произвольное положительное. Введем обозначения:

$$\max_{P\in D^{P^0}, Q\in D^P} |(L'V_{p_0})(P, Q)| = A(P^0),$$

$$\max_{P\in D^{P^0}, Q\in D^P |\lambda|\leqslant\varrho} |C_{p_0}^{(1)}(P, Q, \lambda)| = A(P^0, \varrho).$$

Из определения (12) и оценки (28) следует:

$$\max_{P\in D^{P^0}, Q\in D^P, |\lambda|\leqslant\varrho} |B_{p_0}(P, Q, \lambda)| \leqslant A\cdot A(P^0)\, r^{2-m+2p_0}(P, Q)\, e^{r(P,Q)|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

На основании этого неравенства и соотношений (27), (29) получаем

$$\max_{P\in D^{P^0}, Q\in D^P, |\lambda|\leqslant\varrho} |C_{p_0}^{(2)}(P, Q, \lambda)| \leqslant A\cdot A(P^0)\cdot A(P^0, \varrho)\int_{D_Q^P} r^{2+2p_0-m}(P,R)e^{r(P,R)|\operatorname{Im}\lambda|}dR \leqslant$$

$$\leqslant A\cdot A(P^0)\cdot A(P^0, \varrho)\int_{D_Q^P} r^{2+2p_0-m}(P, R)\, e^{[r(P,R)+r(R,Q)]|\operatorname{Im}\lambda|}dR \leqslant$$

$$\leqslant A\cdot A(P^0)\cdot A(P^0, \varrho)\, e^{r(P,Q)|\operatorname{Im}\lambda|}\frac{H_m(2+2p_0)\, H_m(m)}{H_m(2+2p_0+m)}\, r^{2+2p_0}(P, Q).$$

Так же получаются оценки и для $C_{p_0}^{(j)}$, $j > 2$. Они имеют следующий вид:

$$\max_{P\in D^{P^0}, Q\in D^P, |\lambda|\leqslant\varrho} |C_{p_0}^{(j)}(P, Q, \lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant A\cdot A(P^0, \varrho)\, e^{r(P,Q)|\operatorname{Im}\lambda|}\frac{[A\cdot A(P^0)\, r(P, Q)]^{(j-1)(2+2p_0)}}{H_m[(2+2p_0)(j-1)+m]}. \tag{31}$$

Неравенства (31) обеспечивают равномерную сходимость по всем переменным в области $\{P \in D^{P^0}, Q \in D^P, |\lambda| \leqslant \varrho\}$ ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{p_0}^{(j)}(P, Q, \lambda) = C_{p_0}(P, Q, \lambda). \tag{32}$$

Из свойств ядер $C_{p_0}^{(j)}$, равенств (13) и (26), равномерной сходимости ряда (32) и произвольности P^0 и ϱ следует справедливость утверждения:

Лемма 6. *Решение $u_\lambda(P)$ задачи Коши с параметром* (4) ($m \geqslant 3$ *и нечетно) допускает следующее представление*

$$u_\lambda(P) = (K_{p_0,\lambda}f)(P) + \int_{D^P} C_{p_0}(P, Q, \lambda)\, f(Q)\, dQ. \tag{33}$$

Выражение $(K_{p_0,\lambda}f)(P)$ *определено равенством* (10), *ядро* $C_{p_0}(P, Q, \lambda)$ *непрерывно по совокупности переменных P, Q, λ и обращается в нуль, если* $r(P, Q) = 0$; *при фиксированных P, Q оно является аналитической функцией λ.*

4. Теперь у нас имеется все необходимое для доказательства теоремы, сформулированной в начале этой статьи.

Рассмотрим случай нечетного $m \geqslant 3$. Как было сказано в п. 1, k-ю степень оператора I_a можно построить по формуле

$$(I_a^k f)(P) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|\lambda|=1} \frac{u_\lambda(P)}{(i\lambda)^{2k-1}}\, d\lambda. \tag{34}$$

Если в правую часть этого равенства подставить $u_\lambda(P)$ в виде (33), то получим следующее выражение:

$$(I_a^k f)(P) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|\lambda|=1} \frac{(K_{p_0,\lambda} f)(P)}{(i\lambda)^{2k-1}}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|\lambda|=1} \frac{1}{(i\lambda)^{2k-1}} \left[\int\limits_{D^P} C_{p_0}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ \right] d\lambda. \tag{35}$$

Согласно определению (10)

$$(K_{p_0,\lambda} f)(P) = \frac{1}{\pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\frac{m}{2}}} \sum_{j=0}^{p_0} \underset{2}{\text{а. п.}} \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, S_{\frac{\alpha-m+2j}{2}}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ. \tag{36}$$

Аналитическое продолжение интегралов типа стоящих в правой части этого равенства мы рассматривали в п. 2 (см. (14)). Как было показано (лемма 1), при $0 \leqslant j \leqslant \frac{m-5}{2}$, $m \geqslant 5$,

$$\underset{2}{\text{а. п.}} \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, S_{\frac{\alpha-m+2j}{2}}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ =$$

$$\sum_{l=0}^{\frac{m-2j-5}{2}} \frac{(-1)^l \lambda^{2l}}{2^{2l} l!} \underset{2}{\text{а. п.}} \frac{1}{2^{\frac{\alpha-m}{2}+j} \Gamma\left(j + l + \frac{\alpha-m}{2} + 1\right)} \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, r^{\alpha-m+2j+2l}(P, Q) \times$$

$$\times f(Q)\, dQ + \sum_{l=\frac{m-2j-3}{2}}^{\infty} \frac{1}{2^{2l+\frac{2-m}{2}+j} l!\, \Gamma\left(j + l + \frac{2-m}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, r^{2-m+2j+2l}(P, Q) f(Q)\, dQ, \tag{37}$$

а при $j \geqslant \frac{m-3}{2}$, $m \geqslant 3$ (лемма 2) —

$$\underset{2}{\text{а. п.}} \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, S_{\frac{\alpha-m+2j}{2}}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ = \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, S_{\frac{2-m+2j}{2}}(P, Q, \lambda) f(Q)\, dQ =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2l+\frac{2-m}{2}+j} l!\, \Gamma\left(j + l + \frac{2-m}{2} + 1\right)} \int\limits_{D^P} V_j(P, Q)\, r^{2-m+2j+2l}(P, Q) f(Q)\, dQ. \tag{38}$$

Последние равенства представляют собой разложения в ряд Маклорена аналитических функций. Поэтому, заменив слагаемые из правой части формулы (36) согласно равенствам (37), (38), можно просто подсчитать интеграл $\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda|=1}\frac{(K_{p_0,\lambda}f)(P)}{(i\lambda)^{2k-1}}\,d\lambda$, пользуясь теоремой о вычетах. Подсчет при $k \geqslant \frac{m-1}{2}$ приводит к выражению

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda|=1}\frac{(K_{p_0,\lambda}f)(P)}{(i\lambda)^{2k-1}}\,d\lambda = \operatorname*{Выч}_{\lambda=0}\frac{(K_{p_0,\lambda}f)(P)}{i^{2k-2}\lambda^{2k-1}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{p_0}\frac{1}{2^{2(k-1)+\frac{2-m}{2}+j}(k-1)!\,\Gamma\left(j+k+\frac{2-m}{2}\right)}\int\limits_{D^P}V_j(P,Q)\times$$

$$\times\, r^{2-m+2j+2(k-1)}(P,Q)\,f(Q)\,dQ. \tag{39}$$

Рассмотрим теперь повторный интеграл — второе слагаемое правой стороны равенства (35). Делая замену переменной $\lambda \to e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, мы превращаем его в обычный повторный интеграл Лебега, причем из леммы 6 следует возможность изменения порядка интегрирования. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda|=1}\frac{1}{(i\lambda)^{2k-1}}\left[\int\limits_{D^P}C_{p_0}(P,Q,\lambda)\,f(Q)\,dQ\right]d\lambda =$$

$$= \int\limits_{D^P}\left[\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda|=1}\frac{C_{p_0}(P,Q,\lambda)}{(i\lambda)^{2k-1}}\,d\lambda\right]f(Q)\,dQ. \tag{40}$$

Определим ядро $\left(k \geqslant \frac{m-1}{2},\ p_0 \geqslant m-1\right)$:

$$I_{a,k}(P,Q) = \sum_{j=0}^{p_0}\frac{V_j(P,Q)\,r^{2-m+2j+2(k-1)}(P,Q)}{2^{2(k-1)+\frac{2-m}{2}+j}(k-1)!\,\Gamma\left(j+k+\frac{2-m}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{|\lambda|=1}\frac{C_{p_0}(P,Q,\lambda)}{(i\lambda)^{2k-1}}\,d\lambda. \tag{41}$$

Это ядро ведет себя при приближении к поверхности $r(P,Q)=0$ как $r^{2-m+2(k-1)}$, т. е. при $k \geqslant \frac{m+1}{2}$ оно непрерывно по совокупности переменных P, Q и обращается в нуль, если $r(P,Q)=0$ (непрерывность контурного интеграла следует из леммы 6).

Теперь на основании (35), (39), (40) получаем:

$$(I_a^k f)(P) = \int\limits_{D^P}I_{a,k}(P,Q)\,f(Q)\,dQ,\ \ k \geqslant \frac{m-1}{2} = \left[\frac{m}{2}\right], \tag{42}$$

и наша формула (4) (а с ней и теорема) доказана для случая нечетного m.

Пусть теперь m четно. Так как $m+1$ — нечетное число, и теорема уже доказана для этого случая, то, применяя метод спуска (см., например, [2], стр. 205 — 206), мы получаем представление (42) с некоторыми ядрами $I_{a,k}(P, Q)$ для $k \geqslant \left[\frac{m+1}{2}\right] = \frac{m}{2} = \left[\frac{m}{2}\right]$. Свойства регулярности ядер $I_{a,k}(P, Q)$ при четном m, упомянутые в формулировке теоремы, следуют при таком методе доказательства из аналогичных свойств этих ядер, установленных выше для случая m нечетного. Все эти факты доказываются с помощью несложных выкладок, которые мы не приводим, учитывая общеизвестность метода спуска.

В формулировке теоремы есть утверждение о характере зависимости ядер $I_{a,k}$ от коэффициента $a(P)$. Это свойство является простым следствием существования области влияния для решений гиперболических уравнений. Решение $u_\lambda(P)$ задачи Коши с параметром (6) в точке $P \in E_+^m$ полностью определяется по значениям коэффициента $a(\cdot)$ и $f(\cdot)$ в области D^P. В силу равенства (7) это будет справедливо и для функций $(I_a^k f)(\cdot)$, $k \geqslant \left[\frac{m}{2}\right]$, а следовательно, и для ядер $I_{a,k}(P, Q)$, $Q \in D^P$. Доказательство теоремы закончено.

В заключение отметим, что требование бесконечной дифференцируемости коэффициента $a(P)$ в формулировке теоремы является излишне сильным. Теорема остается справедливой и в случае, когда $a(P)$ имеет некоторое количество непрерывных производных, достаточное для существования встречающихся в доказательстве аналитических предложений интегралов, зависящих от параметра α. При этом с увеличением размерности пространства E_+^m нужно требовать все большей гладкости коэффициента $a(P)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Riesz, L'integrale de Riemann — Liouville et le probleme de Cauchy, Acta Math., 81, N 1—2, 1949.
2. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во Ленингр. гос. ун-та, Л., 1950.
3. А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитической функции, Физматгиз, М., 1961.
4. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
5. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
6. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, изд-во «Мир», М., 1965.

Поступила 17.VII 1965 г.

Киев