Инвариантная мера на компактной кольцевой группе

В. Г. Палюткин

1. В данной заметке компактной кольцевой группой называется объект, структура которого определяется на сепарабельной C^*-алгебре (с единицей), имеющей лишь конечномерные неприводимые представления, тем же набором аксиом, какой был использован при определении структуры конечной кольцевой группы в [2]. Основное содержание заметки составляет доказательство существования инвариантной меры (определение 2) на компактных кольцевых группах.

Прежде всего введем обозначения, используемые в следующем ниже определении компактной кольцевой группы. Обозначим через $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$ алгебру, возникающую при пополнении алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$—алгебраического тензорного произведения C^*-алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — по норме Турумару (см [3—5]). В силу определения этой нормы: $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} (\mathfrak{B} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}) \overset{*}{\otimes} \mathfrak{C}$ для любых C^*-алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Если $\psi_1 : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$; $\psi_2 : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ — $*$-гомоморфизмы C^*-алгебр, то через $\psi_1 \otimes \psi_2$ обозначим $*$-гомоморфизм C^*-алгебры $\mathfrak{A}_1 \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{B}_2$ такой, что (см. [5])

$$\psi_1 \otimes \psi_2 (x \otimes y) = \psi_1 (x) \otimes \psi_2 (y) \qquad (x_1 \in \mathfrak{A}_1,\ x_2 \in \mathfrak{A}_2),$$

буквой $\mathbf{C}$ обозначим поле комплексных чисел. Очевидно, C^*-алгебры $\mathbf{C} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{C}$ можно отождествить с C^*-алгеброй $\mathfrak{A}$ в силу $*$-изоморфизмов $\mathbf{C} \otimes \otimes \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathbf{C} \leftrightarrow \mathfrak{A}$ таких, что $\lambda \otimes a \to \lambda a$, $a \otimes \lambda \to \lambda a$ ($a \in \mathfrak{A}$, $\lambda \in \mathbf{C}$) соответственно.

2. Определение 1. Мы скажем, что на сепарабельной C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей, имеющей лишь конечномерные неприводимые представления, задана структура компактной кольцевой группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$, если существуют $*$-гомоморфизм φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$, антилинейный $*$-изоморфизм $+$: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $*$-гомоморфизм ε: $\mathfrak{A} \to \mathbf{C}$ такие, что следующие диаграммы коммутативны; (аксиома ассоциативности)

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} \arrow[dr, "I \otimes \varphi"] & \\ \mathfrak{A} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}, \\ & \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} \arrow[ur, "\varphi \otimes I"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

(аксиома левой единицы)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} \arrow[rr, "\varepsilon \otimes I"] & & \mathbf{C} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}, \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, "I"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

(аксиома левого обратного)

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A} \arrow[rr, "\pi\otimes\pi(+\,{}^{*}\otimes I)"] & & \pi(\mathfrak{A}) \otimes \pi(\mathfrak{A}) \arrow[d, "d_\pi"] \\
\mathfrak{A} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "\pi\eta"'] & \pi(\mathfrak{A})
\end{tikzcd} , \tag{3}
$$

где I — тождественное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$; $\eta : \mathbf{C} \to \mathfrak{A}$, $\eta(\lambda) = \lambda 1$, $\lambda \in \mathbf{C}$, 1 — единица в $\mathfrak{A}$; π — произвольное конечномерное представление алгебры $\mathfrak{A}$; $\pi(\mathfrak{A})$ — образ алгебры $\mathfrak{A}$ при представлении π; $*$ — инволюция C^*-алгебры $\mathfrak{A}$; d_π — линейное отображение такое, что $d_\pi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ $(x_i, y_i \in \pi(\mathfrak{A}))$.

Замечание. Если $\mathfrak{A}$ — коммутативная C^*-алгебра, то определение 1 эквивалентно определению структуры компактной группы на пространстве X максимальных идеалов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$; причем, если рассматривать последнюю реализованной как алгебру $C(X)$ непрерывных функций на X (тогда $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$ совпадает с алгеброй $C(X \times X)$ непрерывных функций на $X \times X$, [3]), то отображения φ, $+$, ε приобретают вид

$$
\begin{aligned}
&\varphi : f(x) \to f(x'x) \\
&+ : f(x) \to \overline{f(x^{-1})} \qquad\qquad f(x) \in C(X), \\
&\varepsilon : f(x) \to f(e),
\end{aligned}
$$

где $\{x, x'\} \to x'x$ — композиция в группе X, x^{-1} — обратный x, e — единица в X.

Обозначим через $\sim$ линейный оператор в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ такой, что $\sim : a \otimes b \to b \otimes a$ $(a, b \in \mathfrak{A})$. Непосредственно из определения нормы в $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$ следует, что $\sim$ изометричен относительно этой нормы, следовательно, может быть расширен на $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$. Образ элемента $a \in \mathfrak{A}$ (соответственно $b \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$) при отображении $+$ (соответственно $+ \otimes +, \sim$) будем обозначать a^+ (соответственно b^+, $\widetilde{b}$).

Ниже нам потребуются следующие равенства

$$a^{++} = a, \tag{4}$$

$$\varphi(a^+) = \widetilde{\varphi(a)}^+, \tag{5}$$

$$\varepsilon(a^+) = \overline{\varepsilon(a)}, \tag{6}$$

$$\varphi(1) = 1 \otimes 1. \tag{7}$$

Все эти равенства вытекают из (1) — (3). Но чтобы избежать громоздких доказательств, примем их в качестве аксиом.

3. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные C^*-алгебры, $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ — их алгебраическое тензорное произведение, f — непрерывный функционал на $\mathfrak{A}$, а g — непрерывный функционал на $\mathfrak{B}$. Определим линейные отображения $f \otimes I$ и $I \otimes g$ алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ в C^*-алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно, полагая

$$
\begin{aligned}
&f \otimes I : \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \to \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, y_i, \\
&I \otimes g : \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \to \sum_{i=1}^{n} x_i g(y_i) \qquad (x_i \in \mathfrak{A},\ y_i \in \mathfrak{B},\ i = 1, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Ниже покажем, что отображения $f \otimes I$ и $I \otimes g$ непрерывны относительно норм C^*-алгебр и, следовательно, допускают однозначное продолжение до непрерывных отображений $\mathfrak{A} \dot{\otimes} \mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \dot{\otimes} \mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$ соответственно. Считая, что это доказано, и сохраняя для расширений отображений $f \otimes I$ и $I \otimes g$ на $\mathfrak{A} \dot{\otimes} \mathfrak{B}$ прежние обозначения, введем следующее.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$—компактная кольцевая группа. Центральный положительный функционал f на $\mathfrak{A}$ называется инвариантной мерой компактной кольцевой группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$, если

$$f \otimes I[\varphi(x)] = I \otimes f[\varphi(x)] = f(x)1 \tag{9}$$

(1 — единица C^*-алгебры $\mathfrak{A}$).

Очевидно, когда компактная кольцевая группа совпадает с обычной группой, т. е. когда $\mathfrak{A}$ — коммутативная C^*-алгебра, это определение соответствует обычному определению инвариантной меры на компактных группах.

4. Теорема 1. *Каждая компактная кольцевая группа $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$ имеет единственную (с точностью до положительного множителя) инвариантную меру.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сделаем несколько предварительных замечаний, в частности, докажем непрерывность отображений (8).

а) Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — произвольные $\mathfrak{C}^*$-алгебры. Обозначим через $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B})'$ пространства непрерывных функционалов на C^*-алгебрах $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$ соответственно. По двум положительным функционалам $h \in \mathfrak{A}'$ и $g \in \mathfrak{B}'$ можно определить положительный функционал $h \otimes g \in (\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B})'$ такой, что [3, 4]

$$h \otimes g(x \otimes y) = h(x)g(y) \qquad (x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{B}). \tag{10}$$

Если h — непрерывный вещественный $(\overline{h(x)} = h(x^*),\ x \in \mathfrak{A})$ функционал на $\mathfrak{A}$, а g — такой же функционал на $\mathfrak{B}$, то существует единственная пара положительных функционалов $h_1, h_2 \in \mathfrak{A}'$ и единственная пара положительных функционалов $g_1, g_2 \in \mathfrak{B}'$ таких, что ([6], 12.3.4)

$$\begin{aligned} h &= h_1 - h_2, \qquad \|h\| = \|h_1\| + \|h_2\|, \\ g &= g_1 - g_2, \qquad \|g\| = \|g_1\| + \|g_2\|. \end{aligned} \tag{11}$$

Полагая $h \otimes g = h_1 \otimes g_1 - h_1 \otimes g_2 - h_2 \otimes g_1 + h_2 \otimes g_2$, определим вещественный функционал на $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$, обладающий свойством (10). Покажем, что

$$\|h \otimes g\| \leqslant \|h\| \|g\|. \tag{12}$$

Действительно, (12) верно для положительных h и g, ибо в этом случае $\|h\| = h(1)$, $\|g\| = g(1)$, $\|h \otimes g\| = h \otimes g(1 \otimes 1)$ (см. [6], 2.1.9). Поэтому в силу (11)

$$\|h \otimes g\| \leqslant \sum_{i,j=1,2} \|h_i \otimes g_j\| = \sum_{i,j=1,2} \|h_i\| \|g_j\| = \|h\| \|g\|.$$

Докажем непрерывность отображения $f \otimes I$, предполагая сначала, что f — вещественный функционал на $\mathfrak{A}$. Для любого эрмитового $y \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ $(y = y^*)$ элемент $f \otimes I\ [y]$ также эрмитов. Поэтому ([6], 1.2.6)

$$\|f \otimes I[y]\| = \sup_h |h(f \otimes I[y])|,$$

где h изменяется по множеству вещественных функционалов из единичного шара в $\mathfrak{B}'$. В силу (12)

$$\begin{aligned} \|f \otimes I[y]\| = \sup_h |h(f \otimes I[y])| = \sup_h |h \otimes f[y]| \leqslant \\ \leqslant \|f\| \sup_{h_1} |h_1(y)| = \|f\| \|y\|, \end{aligned}$$

где h_1 изменяется по множеству вещественных функционалов из единичного шара в $(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B})'$ Если теперь y — произвольный элемент из $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, то, представляя его в виде $y = y_1 + iy_2$, где y_1, y_2 — эрмитовы элементы из $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, и учитывая неравенство $\sqrt{2}\| y_1 + iy_2 \| \geqslant \| y_1 \| + \| y_2 \|$, легко показать, что $\| f \otimes I [y] \| \leqslant \sqrt{2} \| f \| \| y \|$, и тем самым доказать непрерывность $f \otimes I$.

Непрерывность отображения $I \otimes g$: $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ (g — вещественный функционал из $\mathfrak{B}'$) доказывается аналогично.

Пусть f, g — произвольные непрерывные функционалы на $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ соответственно. Представив f, g в виде $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$, где f_1, f_2 — вещественные функционалы из $\mathfrak{A}'$, а g_1, g_2 — такие же функционалы из $\mathfrak{B}'$, определим функционал $f \otimes g$ на $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$ и отображения $f \otimes I$, $I \otimes g$, совпадающие с (8) на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, полагая

$$f \otimes g = f_1 \otimes g_1 + i (f_1 \otimes g_2) + i (f_2 \otimes g_1) - f_2 \otimes g_2,$$

$$f \otimes I = f_1 \otimes I + i (f_2 \otimes I); \qquad I \otimes g = I \otimes g_1 + i (I \otimes g_2).$$

Очевидно, что для произвольных $g \in \mathfrak{B}'$, $f \in \mathfrak{A}'$ и $y \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$

$$g (f \otimes I [y]) = f (I \otimes g [y]) = f \otimes g (y). \tag{13}$$

Поэтому, если f — положительный функционал из $\mathfrak{A}'$ и y — положительный элемент из $\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}$, то $h (f \otimes I [y]) \geqslant 0$ для всех положительных функционалов h на $\mathfrak{B}$. Тогда ([6], 2.6.2.) $f \otimes I [y] \geqslant 0$. Аналогично, $I \otimes g [y] \geqslant 0$ при $g \geqslant 0$.

б) Отметим следующие равенства, легко вытекающие из способа определения отображений $f \otimes I$, $I \otimes g$ ($f \in \mathfrak{A}'$, $g \in \mathfrak{B}'$),

$$\begin{gathered} f \otimes I ((1 \otimes x_2) y) = x_2 (f \otimes I [y]), \\ I \otimes g ((x_1 \otimes 1) y) = x_1 (I \otimes g [y]) \end{gathered} \tag{14}$$

$$(x_1 \in \mathfrak{A},\ x_2 \in \mathfrak{B},\ y \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}).$$

Если $\psi_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1$, $\psi_2 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1$ — $*$-гомоморфизмы C^*-алгебр и $g \in \mathfrak{B}'$, $f \in \mathfrak{A}'$, то

$$\begin{gathered} \psi_1 [I \otimes g [y]] = I \otimes g [(\psi_1 \otimes I) (y)], \\ \psi_2 [f \otimes I [y]] = f \otimes I [(I \otimes \psi_2) (y)], \qquad y \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{B}, \end{gathered} \tag{15}$$

где I — тождественное отображение $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}$ в правом равенстве и аналогичное отображение $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}$ во втором.

в) Всюду далее символ N_g, сопоставляемый положительному функционалу g на произвольной C^*-алгебре C, используется для обозначения левого идеала, состоящего из всех тех $x \in C$, для которых $g (x^* x) = 0$.

Пусть f, s (соответственно g, t) — положительные функционалы на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ (соответственно $\mathfrak{B}$), причем $N_s \supseteq N_f$ и $N_t \supseteq N_g$. Тогда $N_{s \otimes t} \supseteq N_{f \otimes g}$. В самом деле, включение $y \in N_{f \otimes g}$ равносильно равенству $f \otimes g (y^* y) = f (I \otimes g [y^* y]) = 0$ (см. (13)). Так как $I \otimes g [y^* y] \geqslant 0$, то $I \otimes g [y^* y] \in N_f \subseteq N_s$. Следовательно, $s [I \otimes g [y^* y]] = s \otimes g (y^* y) = g [I \otimes s [y^* y]] = 0$. Поскольку $I \otimes s [y^* y] \geqslant 0$, то $I \otimes s [y^* y] \in N_g \subseteq N_t$. Тогда $t [I \otimes s [y^* y]] = s \otimes t (y^* y) = 0$. Итак, $N_{s \otimes t} \supseteq N_{f \otimes g}$.

г) Пусть f, g — те же функционалы, что и выше. Тогда при $y \in N_{f \otimes g}$: $I \otimes g [y] \in N_f$, $f \otimes I [y] \in N_g$. Действительно, в силу (14) и (13)

$$f ((I \otimes g [y])^* (I \otimes g [y])) = f \otimes g (((I \otimes g [y])^* \otimes 1) y) = 0.$$

Следовательно, $I \otimes g [y] \in N_f$. Аналогично, $f \otimes I [y] \in N_g$.

В доказательстве теоремы будет использована следующая

Лемма 1. *Пусть L — локально выпуклое линейное топологическое пространство. B — компактное выпуклое подмножество в L; Ψ — полугруппа линейных преобразований ψ пространства L в себя, каждое из которых преобразует B на себя. Если полугруппа Ψ действует равностепенно непрерывно на B, то существует элемент $p \in B$ такой, что $\psi(p) = p$ для всех $\psi \in \Psi$.*

Равностепенная непрерывность полугруппы Ψ на B означает следующее. Какова бы ни была окрестность нуля V в L, существует окрестность нуля U в L такая, что при $x - y \in U$ $(x, y \in \mathfrak{B})$ $\psi(x - y) \in V$ для всех $\psi \in \Psi$.

Подробное доказательство этой леммы здесь не приводится, поскольку его нетрудно получить из доказательства теоремы Какутани в той форме, как оно изложено в [8] (теорема 2).

5. Приступим к доказательству теоремы. Прежде всего превратим пространство $\mathfrak{A}'$ непрерывных функционалов на C^*-алгебре $\mathfrak{A}$ в $*$-алгебру. Будет нетрудно заметить, что эта алгебра аналогична алгебре мер на компактной группе. Пусть $g, h \in \mathfrak{A}'$. Определим на $\mathfrak{A}$ линейные функционалы g^+ и $g * h$, полагая

$$g^+(x) = \overline{g(x^+)}, \qquad g * h(x) = g \otimes h(\varphi(x)).$$

Поскольку функционал $g \otimes h$ на $\mathfrak{A} \mathbin{\hat{\otimes}} \mathfrak{A}$ и отображения φ и $+$, как $*$-гомоморфизмы, непрерывны относительно норм C^*-алгебр, то g^+, $g * h \in \mathfrak{A}'$. Покажем, что пространство $\mathfrak{A}'$, наделенное операциями $\{g, h\} \to g * h$ и $g \to g^+$, является ассоциативной алгеброй с инволюцией. Используя равенства (15), имеем

$$((g * h) * f)(x) = g * h \otimes f(\varphi(x)) = g \otimes h(\varphi(I \otimes f[\varphi(x)])) =$$
$$= g \otimes h \otimes f[(\varphi \otimes I)\varphi(x)],$$
$$(g * (h * f))(x) = g \otimes h * f(\varphi(x)) = h \otimes f(\varphi(g \otimes I[\varphi(x)])) =$$
$$= g \otimes h \otimes f[(I \otimes \varphi)\varphi(x)] \qquad (x \in \mathfrak{A}).$$

Согласно аксиоме ассоциативности (1) правые крайние, а следовательно, и левые крайние члены выписанных двух цепочек равенств совпадают. Итак, $\{g, h\} \to g * h$ — ассоциативная операция. В силу (4) и (5) имеют место следующие равенства

$$(g^+)^+(x) = g(x^{++}) = g(x),$$
$$(g * h)^+(x) = \overline{g \otimes h(\varphi(x^+))} = \overline{g \otimes h(\widetilde{\varphi(x)}^+)} =$$
$$= h^+ \otimes g^+(\varphi(x)) = h^+ * g^+(x), \tag{16}$$
$$(\lambda g)^+(x) = \overline{\lambda g(x^+)} = \overline{g((\bar{\lambda}x)^+)} = g^+(\bar{\lambda}x) = \bar{\lambda}g^+(x).$$

Следовательно, операция $g \to g^+$ является инволюцией в алгебре $\mathfrak{A}'$. Эта алгебра содержит единицу, роль которой играет отображение ε. Действительно, в силу аксиомы левой единицы (2), равенств (6) и (16)

$$\varepsilon * g = g, \qquad \varepsilon^+ = \varepsilon, \quad g = (\varepsilon * g^+)^+ = g * \varepsilon \qquad (g \in \mathfrak{A}').$$

Пусть g, h — нормированные положительные функционалы на $\mathfrak{A}$ ($\|g\| = \|h\| = 1$). Напомним, что норма положительного функционала на C^*-алгебре с единицей равна значению этого функционала на единице. Поэтому положительный функционал $g \otimes h$ также является нормированным. Учитывая, что φ и $+$ — $*$-гомоморфизмы, имеем

$$g^+(x^*x) = \overline{g((x^*x)^+)} = \overline{g(x^{+*}x^+)} \geqslant 0,$$
$$g*h(x^*x) = g \otimes h(\varphi(x)^*\varphi(x)) \geqslant 0.$$

Таким образом, функционалы g^+ и $g*h$ положительны. Принимая во внимание то, что $+$ — эпоморфизм и, следовательно, $1^+ = 1$, а также равенство (7), заключаем, что g^+, $g*h$ нормированы:

$$\|g^+\| = g^+(1) = g(1^+) = g(1) = \|g\| = 1,$$
$$\|g*h\| = g \otimes h(\varphi(1)) = g(1)h(1) = \|g\|\|h\| = 1.$$

Итак, операции $g \to g^+$, $\{g, h\} \to g*h$ не выводят из множества P нормированных положительных функционалов:

$$P*P = P, \qquad P^+ = P. \tag{17}$$

Этим же свойством обладает множество Z центральных положительных функционалов из P. Действительно, если $h, g \in Z$, то, очевидно, $h \otimes g$ — центральный функционал на $\mathfrak{A} \mathring{\otimes} \mathfrak{A}$. Тогда упомянутое свойство следует непосредственно из определения операций в алгебре $\mathfrak{A}'$.

6. Рассмотрим $\mathfrak{A}'$ как топологическое пространство, снабженное $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$-топологией* и сопоставим каждому элементу $g \in P$ линейную операцию R_g в $\mathfrak{A}'$

$$R_g : h \to h*g \qquad (h \in \mathfrak{A}',\ g \in P).$$

Эти операции, очевидно, образуют полугруппу $\{R_g\}$.

С помощью несложных рассуждений легко проверить, что полугруппа $\{R_g\}$ равностепенно непрерывна на P.

7. Далее отдельные утверждения, возникающие по ходу доказательства, будем формулировать в виде лемм.

Л е м м а 2. *Существует функционал $p \in P$ такой, что для всех $a \in P$*

$$p*a*p = p, \qquad p = p^+.$$

Будем говорить, что подмножество $P_1 \subseteq P$ инвариантно по подмножеству $P_2 \subseteq P$, если $P_2 * P_1 \subseteq P_1$. Как известно, P выпукло и компактно в $\mathfrak{A}'$ ([7] гл. IV, § 19, п. 4). В силу (17) множество выпуклых компактных подмножеств из P, инвариантных по P, не пусто. Упорядоченное по включению, это множество индуктивно. Действительно, нижней гранью направленного множества $\{K_\alpha\}$ выпуклых компактных и инвариантных по P подмножеств K_α является подмножество $\bigcap_\alpha K_\alpha$. Применяя лемму Цорна, выделим в P минимальное выпуклое компактное и инвариантное по P подмножество K. Следовательно, если $K_1 \subseteq K$ (K_1 выпукло и компактно) и $P*K_1 \subseteq K_1$, то $K_1 = K$. Для любого $g \in K$ множество $K*g \subseteq K$ инвариантно по P, выпукло и компактно как образ выпуклого компакта K при непрерывном линейном отображении $R_g . h \to h*g$ $(h \in K)$. В силу минимальности K, $K*g = K$ для любого $g \in K$. Отсюда следует, что пространство $\mathfrak{A}'$, выпуклое компактное множество K и полугруппа равностепенно непрерывных отображений $R_g (g \in K)$ находятся в условиях леммы 1. Следовательно, согласно этой лемме существует элемент $p \in K$ такой, что $p*K = p$. Из этого равенства и очевидного включения $P*p \subset K$ следует, что $p*P*p = p$. Можно считать, что $p = p^+$. В противном случае вместо p возьмем $p^+ * p$.

---

* Далее, говоря о топологических свойствах подмножеств из $\mathfrak{A}'$ и отображений, определенных на $\mathfrak{A}'$, будем иметь в виду $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$-топологию.

Следствие. *Существует функционал $f \in Z$ такой, что для всех $a \in Z$*

$$f * a * f = f, \qquad f^+ = f.$$

Действительно, в предыдущих рассуждениях использовались лишь свойство (17), выпуклость и компактность P. Но Z, очевидно, также обладает всеми этими свойствами.

Лемма 3. *Пусть $a, b \in P$, причем $b = b^+$. Если*

$$N_a \subseteq N_{b*b}, \text{ то } N_a \subseteq N_\varepsilon.$$

Пусть q — неразложимый положительный функционал на $\mathfrak{A}$ такой, что $N_q \supseteq N_b$ (см. [7] гл. IV, § 19, п.3). Тогда

$$N_{q^+} = N_q^+ \supseteq N_b^+ = N_{b^+} = N_b.$$

Обозначим $q = q_1$, $q^+ = q_2$, и пусть π_1, π_2 — неприводимые представления, канонически построенные по q_1, q_2* в гильбертовых пространствах $H_1 = \mathfrak{A}/N_{q_1}$, $H_2 = \mathfrak{A}/N_{q_2}$ соответственно. Рассмотрим также представления $\pi_i \otimes \pi_j$ $(i, j = 1, 2)$ в гильбертовых пространствах $H_i \otimes H_j$ и докажем следующие включения

$$\pi_i \otimes \pi_j (N_{b \otimes b}) \subseteq \pi_i (N_b) \otimes \pi_j (\mathfrak{A}) + \pi_i (\mathfrak{A}) \otimes \pi_j (N_{q_j}) \qquad (i, j = 1, 2). \tag{18}$$

Пусть $s \in N_{b \otimes b}$; тогда, очевидно, существуют элементы y_k, $x_k \in \mathfrak{A}$ $(k = 1, \ldots, n)$ такие, что

$$\pi_i \otimes \pi_j (s) = \sum_{k=1}^{n} \pi_i (x_k) \otimes \pi_j (y_k). \tag{19}$$

Если все $y_k \in N_{q_j}$, то (18) доказано. В противном случае y_k, не принадлежащие N_{q_j}, можно без ограничения общности считать такими, что их образы $\xi(y_k)$ при каноническом отображении $\xi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/N_{q_j}$ составят часть ортонормированного базиса в H_j. Следовательно,

$$q_j (y_k^* y_{k'}) = \delta_{k,k'}; \qquad y_k, y_{k'} \overline{\in} N_{q_j}. \tag{20}$$

Определим на $\pi_j(\mathfrak{A})$ функционал $\dot{q}_j : \pi_j(x) \to q_j(x)$ $(x \in \mathfrak{A})$. Тогда для любого $z \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}$ (см. (15))

$$\pi_i (I \otimes q_j [z]) = I \otimes \dot{q}_j [\pi_i \otimes \pi_j (z)]. \tag{21}$$

Возьмем произвольный элемент $y_{k_0} \overline{\in} N_{q_j}$ из (19). Так как $(1 \otimes y_{k_0}^*) s \in N_{b \otimes b} \subseteq N_{b \otimes q_j}$ (п.4, в)), то $I \otimes q_j [(1 \otimes y_{k_0}^*) s] \in N_b$ (п.4.г)). Поэтому в силу (20) и (21) имеем

$$\pi_i (I \otimes q_j [(1 \otimes y_{k_0}^*) s]) = \sum_{k=1}^{n} I \otimes \dot{q}_j [\pi_i (x_k) \otimes \pi_j (y_{k_0}^* y_k)] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \pi_i (x_k) q_j (y_{k_0}^* y_k) = \pi_i (x_{k_0}) \in \pi_i (N_b).$$

Таким образом, в (19) при каждом k или $\pi_i (x_k) \in \pi_i (N_b)$, или $\pi_j (y_k) \in \pi_j (N_{q_j})$. Следовательно, (18) справедливо.

* Имеется в виду способ построения представления по положительному функционалу, изложенный, например, в [7], гл. IV, § 17, п. 3.

Обозначим $\pi_i \otimes \pi_j = \pi^{ij}$ и $\pi_i \otimes \pi_i = \pi_{ii}$ $(i, j = 1, 2)$ (мы различаем эквивалентные представления и, следовательно, порядок слагаемых (сомножителей) в прямых суммах (тензорных произведений) представлений). Поскольку, как нетрудно проверить, $\operatorname{Ker} \pi_1 = (\operatorname{Ker} \pi_2)^+$ и $\operatorname{Ker} \pi_2 = (\operatorname{Ker} \pi_1)^+$, то можно определить линейные отображения алгебр

$$\pi^{ij}(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}) = \pi_i(\mathfrak{A}) \otimes \pi_j(\mathfrak{A}) \text{ в } \pi^{i^0 j}(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}) = \pi_{i^0}(\mathfrak{A}) \otimes \pi_j(\mathfrak{A})$$

(где $i^0 = 1$, если $i = 2$, и $i^0 = 2$, если $i = 1$; $j = 1, 2$), полагая

$$\sum_{k=1}^{m} \pi_i(x_k) \otimes \pi_j(y_k) \to \sum_{k=1}^{m} \pi_{i^0}(x_k^{+*}) \otimes \pi_j(y_k) \tag{22}$$

$$(x_k, y_k \in \mathfrak{A}).$$

Обозначим

$$\pi^1 = \pi^{21} \otimes \pi^{22} \otimes \pi^{11} \otimes \pi^{12}; \qquad \pi^2 = \pi^{11} \otimes \pi^{12} \otimes \pi^{21} \otimes \pi^{22}.$$

Тогда с помощью отображений (22) можно составить линейное отображение алгебры $\pi^1(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ и $\pi^2(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ такое, что каждая компонента $\pi^{ij}(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ алгебры $\pi^1(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ переходит в компоненту $\pi^{i^0 j}(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ алгебры $\pi^2(\mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A})$ согласно (22). Это отображение обозначим через $\circ \otimes I$. Нетрудно убедиться, что

$$(\circ \otimes I)\, \pi^1(z) = \pi^2((+ * \otimes I)\, z) \qquad (z \in \mathfrak{A} \overset{*}{\otimes} \mathfrak{A}). \tag{23}$$

Согласно условию леммы $N_a \subseteq N_{b*b}$; следовательно, при $x \in N_a$ $b * b\,(x^* x) = b \otimes b\,(\varphi(x)^* \varphi(x)) = 0$, и, значит, $\varphi(x) \in N_{b \otimes b}$. Тогда, принимая во внимание равенство $N_b = N_b^+$, а также (23) и (18), имеем

$$\pi^2((+ * \otimes I)\, \varphi(x)) = (\circ \otimes I)\, \pi^1(\varphi(x)) \in$$

$$\in \sum_{i,j=1,2} \otimes \left(\pi_i(N_b^*) \otimes \pi_j(\mathfrak{A}) + \pi_i(\mathfrak{A}) \otimes \pi_j(N_{q_j})\right)$$

(порядок прямых слагаемых в сумме лексикографический). Представление π^2 можно рассматривать как реализацию представления $\pi_{12} \otimes \pi_{12}$ в пространстве $\sum\limits_{i,j=1,2} \otimes (H_i \otimes H_j) \simeq (H_1 \otimes H_2) \otimes (H_1 \otimes H_2)$. Поэтому в силу аксиомы левого обратного (3) и предыдущего включения имеем

$$\varepsilon(x)\, \pi_{12}(1) = d_{\pi_{12}}(\pi_{12} \otimes \pi_{12}((+ * \otimes I)\, \varphi(x))) \in$$

$$\in \pi_1(N_b^* + N_{q_1}) \otimes \pi_2(N_b^* + N_{q_2}) \subseteq \pi_1(N_{q_1}^* + N_{q_1}) \otimes \pi_2(N_{q_2}^* + N_{q_2}).$$

Отсюда нетрудно сделать вывод, что $\varepsilon(x) = 0$. Действительно, в противном случае должно быть $\pi_i(1) \in \pi_i(N_q^* + N_q)$ $(i = 1, 2)$. Пусть ξ_i — тот вектор пространства H_i, который отождествляется с классом смежности $\mathfrak{A}$ по N_{q_i}, содержащим единицу алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $(\pi_i(z)\, \xi_i, \xi_i)_{H_i} = q_i(z) = 0$ для всех $z \in N_{q_i}^* + N_{q_i}$, в то время как $(\pi_i(1)\, \xi_i, \xi_i)_{H_i} = q_i(1) = \| q_i \| \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Итак, $N_a \subseteq N_\varepsilon$.

Лемма 4. *Если функционал $p \in P$ удовлетворяет условиям леммы 2, т. е.*

$$p^+ = p; \qquad p * a * p = p \tag{24}$$

для всех $a \in P$, то $N_{a*p} = N_{p*a} = \{0\}$ для всех $a \in P$.

Так как $p * p = p$ и $p = p^+$, то по лемме 3 $N_p \subseteq N_\varepsilon$. Следовательно, (п.4, г)), $N_{p \otimes a} \subseteq N_{\varepsilon \otimes a}$; $N_{a \otimes p} \subseteq N_{a \otimes \varepsilon}$ для любого $a \in P$. Но тогда $N_{p*a} \subseteq$

$\subseteq N_a$ и $N_{a*p} \subseteq N_a$. Взяв $a = b * p$ $(b \in P)$ в первом из последних двух включений и $a = b$ — во втором, в силу (24), заключаем

$$N_p = N_{p*b*p} \subseteq N_{b*p} \subseteq N_b \qquad (b \in P).$$

Следовательно,

$$N_p \subseteq \bigcap_{p \in P} N_b = \{0\}. \tag{25}$$

В таком случае для любого $b \in P$ $N_{a \otimes p} \subseteq N_{a \otimes b}$, а значит,

$$N_{a*p} \subseteq N_{a*b}. \tag{26}$$

Полагая $b = a$ в последнем включении и предполагая, что $a = a^+$, видим, что функционалы $a * p$ удовлетворяют условиям леммы 3. Следовательно, $N_{a*p} \subseteq N_\varepsilon$. Кроме того, в силу (24), $(a * p) * b * (a * p) = a * p$. Поэтому к функционалу $a * p$ можно применить те же рассуждения, что и к p при выводе равенства (25). В результате имеем: $N_{a*p} = \{0\}$, если $a = a^+$. Если $a \neq a^+$, то, взяв в (26) $b = a^+ * p$ и учитывая, что $(a * a^+)^+ = a * a^+$, получим

$$N_{a*p} \subseteq N_{a*a^+*p} = \{0\}.$$

Итак, первое утверждение леммы доказано. Второе доказывается аналогично.

Следствие. *Если функционал $f \in Z$ удовлетворяет условиям следствия леммы 2, т. е.*

$$f^+ = f, \qquad f * c * f = f \qquad (c \in Z),$$

то $N_f = \{0\}$, $N_{a*f} = \{0\}$ для всех $a \in P$.

Действительно, заменив в рассуждениях, приводящих к (25), p на f и P на Z, получим

$$N_f \subseteq \bigcap_{c \in Z} N_c.$$

Но Z содержит все функционалы вида $s_\pi : x \to \frac{1}{n_\pi} \operatorname{Sp}(\pi(x))$ $(x \in \mathfrak{A})$, где π — произвольное неприводимое представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$; n_π — его размерность. Поэтому

$$N_f \subseteq \bigcap_{c \in Z} N_c \subseteq \bigcap_{\pi} N_{s_\pi} = \bigcap_{\pi} \operatorname{Ker} \pi = \{0\}.$$

Если p — функционал из леммы 2, то по лемме 4 $N_{a*p} = N_p = \{0\}$ $(a \in P)$. Следовательно, $N_{a \otimes f} = N_{a \otimes p}$ (п.4,в)), $(a \in P)$. Отсюда

$$N_{a*f} = N_{a*p} = \{0\}.$$

8. Докажем, что функционал f, о котором идет речь в последнем следствии, удовлетворяет условиям (9), т. е. является инвариантной мерой компактной кольцевой группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$. Очевидно, достаточно показать, что

$$a * f = f * a = a(1) f \tag{27}$$

для всех $a \in \mathfrak{A}'$. Рассмотрим множество $P * f \subseteq P$. Это множество выпукло и компактно как образ выпуклого компакта P при непрерывном линейном отображении $a \to a * f$ $(a \in P)$. Поэтому, согласно теореме Крейна—Мильмана, $P * f$ содержит экстремальную точку f_0. Пусть $b \in P$ и $b < f_0$, т. е. существует число $C > 0$ такое, что $b(x^* x) \leqslant C f_0(x^* x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$. Тогда, как нетрудно показать, пользуясь теоремой 1 из § 19, гл. IV [7], $b \otimes f < p_0 \otimes f$. Следовательно, $b * f < f_0 * f$. Последнее означает справедливость равенства

$$f_0 * f = \lambda b * f + (1-\lambda) s \qquad (0 < \lambda < 1) \tag{28}$$

для некоторого $s \in P$. Так как $f * f = f$, то из равенства (28) следует: $s = s * f \in P * f$, кроме того, $f_0 * f = f_0$. В силу экстремальности f_0 в $P * f$,

$$b * f = f_0 \text{ для всех } b \in S_1 = \{a \in P : a < f_0\}. \tag{29}$$

Очевидно, S_1—наименьший суппорт* компакта P, содержащий f_0 (иными словами — порожденный f_0). Благодаря непрерывности на P операции $x \to x * f$ из (29) вытекает, что $\overline{S}_1 * f = f_0$ (черта означает замыкание в $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$-топологии).

Пусть

$$S_2 = \{a \in P : a < b, \text{ хотя бы для одного } b \in \overline{S}_1\},$$

т. е. S_2 — суппорт компакта P, порожденный $\overline{S}_1$. Если $a \in S_2$ и b — такой элемент из $\overline{S}_1$, что $a < b$, то $a * f < b * f = f_0$. Следовательно, $a * f \in S_1$, и поэтому $a * f = a * f * f = f_0$. Итак, $S_2 * f = f_0$, а значит, $\overline{S}_2 * f = f_0$. Продолжая по индукции, получим последовательность (вообще говоря, трансфинитную) замкнутых множеств

$$\overline{S}_1 \subseteq \overline{S}_2 \subseteq \overline{S}_3 \subseteq \ldots \subseteq \overline{S}_\lambda \subseteq \ldots, \tag{30}$$

где $\overline{S}_{\lambda+1}$ — замыкание суппорта $S_{\lambda+1}$, порожденного $\overline{S}_\lambda$, причем для предельного трансфинитного числа λ множество $\overline{S}_\lambda$ определяется как замыкание суппорта, порожденного $\bigcup\limits_{\mu<\lambda} \overline{S}_\mu$. Таким образом, каждому трансфинитному числу второго класса сопоставляется множество $\overline{S}_\lambda$ такое, что

$$\overline{S}_\lambda * f = f_0.$$

Так как C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ сепарабельна, то топология, индуцированная на P $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$-топологией, имеет счетный базис ([11], гл. III, § 3, предл. 6 и лемма 3). Поэтому по теореме Бэра ([10], стр. 136) число различных множеств в последовательности (30) счетно и, следовательно, существует трансфинитное число γ такое, что $\overline{S}_\gamma = \overline{S}_{\gamma+1}$. Из способа построения $\overline{S}_{\gamma+1}$ по S_γ следует, что $\overline{S}_\gamma$ — замкнутый суппорт компакта P. Согласно теореме 3.16 из [9] существует взаимно однозначное соответствие между замкнутыми по $\sigma(\mathfrak{A}', \mathfrak{A})$ — топологии суппортами S компакта P и замкнутыми по норме левыми идеалами N в $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} S &= \{g \in P : g(x^*x) = 0 \text{ для всех } x \in N\}, \\ N &= \{x \in \mathfrak{A} : g(x^*x) = 0 \text{ для всех } g \in S\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Поскольку $f_0 \in \overline{S}_\gamma$ и $N_{f_0} = N_{f_0 * f} = \{0\}$ (следствие леммы 4), то левый идеал, соответствующий согласно (31) суппорту $\overline{S}_\gamma$, является нулевым идеалом. Но это значит, что соответствующий последнему суппорт совпадает с P, т. е. $\overline{S}_\gamma = P$. Следовательно, $\overline{S}_\gamma * f = P * f = f_0$. Отсюда $f_0 = f * f = f$ и $P * f = f$. Кроме того, $f = (P * f)^+ = f^+ * P = f * P$.

Итак, $a * f = f * a = f$ для всех $a \in P$. Так как каждый функционал из $\mathfrak{A}'$ является линейной комбинацией функционалов из P, то из последнего равенства следует (27), следовательно, f — инвариантная мера ком-

---

* Мы следуем терминологии, принятой в [9], где суппортом S компактного множества P называется выпуклое подмножество из P, обладающее тем свойством, что любые элементы s, $t \in P$ такие, что $\lambda s + (1-\lambda) t = r$ для некоторого числа $1 > \lambda > 0$ и $r \in S$, входят в S (см. [9], п. 1.7).

пактной кольцевой группы $\mathfrak{G}(\mathfrak{A}, \varphi, +, \varepsilon)$. Эта мера единственна, ибо всякий другой функционал из P, обладающий свойством (9), очевидно, совпадает с f. Теорема доказана.

Используя доказанную теорему, можно показать, что каждому объекту, названному нами компактной кольцевой группой, однозначным образом соответствует кольцевая группа в смысле определения п. 4.2 [1].

Автор выражает глубокую благодарность Г. И. Кацу за помощь и полезные знамечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Кац, Кольцевые группы и принцип двойственности, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 12, 1963; т. 13, 1965.
2. В. Г. Палюткин, Об эквивалентности двух определений конечной кольцевой группы, УМЖ, т. 16, № 3, 1964.
3. T. Turumaru, On the direct product of operator algebras. I, Tohoku Math. J., **4**, 1952, 242—251.
4. A. Wulfsohn, Le produit tensoril de C^*-algebres. Bull. Sc. Math., **87**, 1963, 13—21.
5. А. Гишарде, О тензорных произведениях C^*-алгебр, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965, 986—989.
6. I. Dixmier, Les C^*-algebres et leurs representations, Paris, 1964.
7. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, М.—Л., 1965.
8. I. E. L. Peck, On ergodic theorem for a non-commutative semi-group of linear operators, Pros. Amer. Math. Soc., **2**, 1951, 414—421.
9. R. T. Prosser, On the ideal structure of operator algebras, Mem. Amer. Math. Soc., N 45, 1963.
10. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
11. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 27.XI 1965 г.
Киев