1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об асимптотическом поведении некоторых функционалов от процесса броуновского движения

А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк

1. Пусть $w(t)$, $0 \leqslant t < +\infty$, — процесс m-мерного броуновского движения, т. е. $w(t) = (w^{(1)}(t), \ldots, w^{(m)}(t))$, где $w^{(i)}(t)$ — независимые одномерные броуновские движения. И пусть $f(x)$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) \in R^{(m)}$, $-\infty < x^{(i)} < \infty$, — борелевская функция, интегрируемая на каждом ограниченном измеримом множестве $R^{(m)}$. Рассмотрим случайную величину

$$\eta_T = \int_0^T f(w(t))\,dt = \int_0^T f(w^{(1)}(t), \ldots, w^{(m)}(t))\,dt. \qquad (1)$$

В этой статье изучаются предельные распределения величины (1) при $T \to \infty$. Точнее, изучается вопрос о существовании таких постоянных B_T, чтобы распределение величины η_T/B_T сходилось при $T \to \infty$ к некоторому собственному распределению.

Предельные распределения величин (1) для некоторых функций $f(x)$ изучались и ранее. Тот случай, когда $w(t)$ — одномерное броуновское движение и $f(x) = 1$ при $x \geqslant 0$, $f(x) = 0$ при $x < 0$, рассматривался в работе П. Леви [1]. В работе Г. Каллианпура и Х. Роббинса [2] изучались предельные распределения величин (1) в случае одномерного процесса $w(t)$ и ограниченной суммируемой на всей прямой функции $f(x)$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \neq 0$, а также в случае двумерного процесса $w(t)$ и ограниченной суммируемой на всей плоскости функции $f(x^{(1)}, x^{(2)})$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x^{(1)}, x^{(2)})\,dx^{(1)}dx^{(2)} \neq 0$. Е. Б. Дынкин в [3] приводит предельные теоремы для величин η_T в случае одномерного процесса $w(t)$ и функции $f(x)$ такой, что $f(x) \sim c_1 x^\alpha$ при $x \to +\infty$ и $f(x) \sim c_2 |x|^\alpha$ при $x \to -\infty$ $(\alpha > -1)$.

В п. 2 рассматривается одномерный процесс $w(t)$; устанавливаются достаточные условия существования предельного распределения величин η_T при довольно общих предположениях относительно вида функции $f(x)$. В п. 3 некоторые из полученных результатов обобщаются на многомерное броуновское движение.

2. Напомним, что ограниченная на каждом конечном интервале функция $R(x)$ называется регулярно меняющейся порядка α при $x \to +\infty$

$(x \to -\infty)$, если для всех $k > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(kx)}{R(x)} = k^\alpha \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{R(kx)}{R(x)} = k^\alpha\right).$$

Регулярно меняющиеся функции нулевого порядка называются медленно меняющимися. Регулярно меняющаяся функция $R(x)$ порядка α представима в виде $R(x) = |x|^\alpha R_0(x)$, где $R_0(x)$ — медленно меняющаяся функция. Нам полезно будет следующее определение, введенное авторами в [4].

Определение 1. Ограниченная на каждом конечном интервале функция $R(x)$ называется $(\alpha; c_1, c_2)$-регулярной на ∞, если

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{|R(x)|+|R(-x)|} = c_1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{R(-x)}{|R(x)|+|R(-x)|} = c_2$$

и функция $R_1(x) = c_1R(x) + c_2R(-x)$ — регулярно меняющаяся порядка α при $x \to +\infty$.

Заметим, что в этом определении $|c_1| + |c_2| = 1$. Будем называть $(0; c_1, c_2)$-регулярную на ∞ функцию (c_1, c_2)-медленно меняющейся на ∞. Всякая $(\alpha; c_1, c_2)$-регулярная на ∞ функция $R(x)$ представима в виде $R(x) = |x|^\alpha R_0(x)$, где $R_0(x)$ — (c_1, c_2)-медленно меняющаяся на ∞ функция. Условимся что если некоторой буквой обозначена $(\alpha; c_1, c_2)$-регулярная на ∞ функция, то той же буквой с нулевым индексом внизу мы будем обозначать соответствующую ей в только что приведенном представлении (c_1, c_2)-медленно меняющуюся на ∞ функцию.

Обозначим через $\widetilde{w}(t)$ процесс броуновского движения на отрезке $[0, 1]$. Введем, далее, следующие обозначения:

$$F(x) = \begin{cases} 2\int\limits_{-\infty}^{x} f(y)\,dy, \text{ если } \int\limits_{-\infty}^{0} f(y)\,dy \text{ сходится,} \\ 2\int\limits_{0}^{x} f(y)\,dy \quad \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$G(x) = 2\int\limits_0^x F^2(y)\,dy; \qquad H(x) = \int\limits_0^x F(y)\,dy;$$

$$u_{\alpha,c_1,c_2}(x) = \frac{1}{2}|x|^\alpha \{c_1 + c_2 + (c_1 - c_2)\operatorname{sign} x\},$$

$$\eta_{\alpha,c_1,c_2} = \int\limits_0^{\widetilde{w}(1)} u_{\alpha,c_1,c_2}(x)\,dx - \int\limits_0^1 u_{\alpha,c_1,c_2}(\widetilde{w}(t))\,d\widetilde{w}(t). \tag{2}$$

Величину η_T можно переписать в виде

$$\eta_T = \int\limits_0^{w(T)} F(x)\,dx - \int\limits_0^T F(w(t))\,dw(t) = H(w(T)) - \int\limits_0^T F(w(t))\,dw(t). \tag{3}$$

Если $\alpha > 0$, то выражение для η_{α,c_1,c_2} можно переписать в виде

$$\eta_{\alpha,c_1,c_2} = \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^1 u_{\alpha-1,c_1,-c_2}(\widetilde{w}(t))\,dt. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть при некоторых* $\alpha > -\frac{1}{2}$, c_1 *и* c_2 *функция* $F(x)$ *является* $(\alpha; c_1, c_2)$*-регулярной на* ∞. *Тогда величина*

$$\frac{\eta_T}{T^{\frac{\alpha+1}{2}} \{|F_0(\sqrt{T})| + |F_0(-\sqrt{T})|\}} \qquad (5)$$

имеет при $T \to \infty$ *предельное распределение, совпадающее с распределением величины* η_{α, c_1, c_2}.

Доказательство. Положим для $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ $w_1(\tau) = \frac{w(\tau T)}{\sqrt{T}}$, и пусть $\Phi_T(x) = \frac{F(x\sqrt{T})}{|F(\sqrt{T})| + |F(-\sqrt{T})|}$. Представим величину (5) (см. формулу (3)) в виде

$$\int_0^{w_1(1)} \Phi_T(x)\,dx - \int_0^1 \Phi_T(w_1(t)\sqrt{T})\,dw_1(t). \qquad (6)$$

Так как конечномерные распределения процесса $w_1(\tau)$ совпадают с конечномерными распределениями $\widetilde{w}(\tau)$, то распределение величины (6) совпадает с распределением величины

$$\int_0^{\widetilde{w}(1)} \Phi_T(x)\,dx - \int_0^1 \Phi_T(\widetilde{w}(t)\sqrt{T})\,d\widetilde{w}(t). \qquad (7)$$

В условиях теоремы $\Phi_T(x) \to u_{\alpha, c_1, c_2}(x)$ при $T \to \infty$ для всех x. Предположим вначале, что $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. Тогда функция $\Phi_T(x)$ в любом конечном интервале изменения x либо ограничена равномерно относительно T (при $\alpha > 0$), либо мажорируется (также равномерно относительно T) функцией вида $C|x|^{-\delta}$ $\left(\text{при } -\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 0\right)$, где в качестве δ можно взять любое число такое, что $|\alpha| < \delta < \frac{1}{2}$. Это следует из того, что для любой функции $R(x)$, регулярно меняющейся порядка $\alpha > 0$ при $x \to +\infty$, $\frac{R(Tx)}{R(T)} \to x^\alpha$ при $T \to \infty$ равномерно относительно x в любом конечном интервале вида $(0, a)$, где $a > 0$ (см. [6]). Отсюда вытекает, что величина (7) при $T \to \infty$ сходится по вероятности к η_{α, c_1, c_2} (см., например, [7], гл. 2, § 1). Пусть теперь $c_2 = 0$, $|c_1| = 1$ (случай $c_1 = 0$, $|c_2| = 1$ рассматривается аналогично). Так как при этом $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(-x)}{F(x)} = 0$, то для достаточно больших положительных x $|F(-x)| \leqslant |F(x)|$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что для всех положительных x $|F(-x)| \leqslant |F(x)|$. Тогда для $x < 0$ $|\Phi_T(x)| \leqslant |\Phi_T(|x|)|$. Отсюда, как и в случае $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, следует, что $\Phi_T(x)$ либо ограничена на любом конечном интервале изменения x, либо мажорируется функцией вида $C|x|^{-\delta}$, где $\delta < \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть при некоторых* $\beta \geqslant 0$ *и* $0 \leqslant d \leqslant 1$ *выполняются условия:*

1) *функция* $G(x)$ *является* $(\beta; d, d-1)$*-регулярной на* ∞;

2) *при* $|x| \to \infty$ $H(x) = o\left(|x|^{\frac{\beta+1}{2}} \{G_0(|x|) - G_0(-|x|)\}^{\frac{1}{2}}\right)$. *Тогда величина*

$$\frac{\eta_T}{T^{\frac{\beta+1}{4}} \{G_0(\sqrt{T}) - G_0(-\sqrt{T})\}^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

имеет при $T \to \infty$ *предельное распределение, совпадающее с распределением величины* $\omega \sqrt{\eta_{\beta,d,d-1}}$, *где* ω — *нормальная* (0, 1) *величина, не зависящая от процесса* $\widetilde{w}(t)$.

Доказательство. Положим $B_T = T^{\frac{\beta+1}{4}} \{G_0(\sqrt{T}) - G_0(-\sqrt{T})\}^{\frac{1}{2}}$ и представим величину (8) в виде

$$\frac{H(w(T))}{B_T} - \int_0^T \frac{F(w(t))}{B_T}\, dw(t). \tag{9}$$

Заметим, что $H(w(T))$ при каждом T имеет такое же распределение, как и $H(\widetilde{w}(1)\sqrt{T})$. В силу условия 2) с вероятностью 1

$$\frac{H(\widetilde{w}(1)\sqrt{T})}{B_T} = o\left(|\widetilde{w}(1)|^{\frac{\beta+1}{2}} \left\{\frac{G_0(|\widetilde{w}(1)|\sqrt{T}) - G_0(-|\widetilde{w}(1)|\sqrt{T})}{G_0(\sqrt{T}) - G_0(-\sqrt{T})}\right\}^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= o\left(|\widetilde{w}(1)|^{\frac{\beta+1}{2}}\right),$$

так что первое слагаемое в (9) сходится к 0 по вероятности.

Обозначим $\varphi_T = \int_0^T F(w(t))\, dw(t)$, $\zeta_T = \int_0^T F^2(w(t))\, dt$. Из условия 1) и теоремы 1 вытекает, что при $T \to \infty$ распределение величины ζ_T/B_T^2 сходится к распределению величины $\zeta = \eta_{\beta,d,d-1}$. Далее, $M\left(\frac{\zeta_T}{B_T^2}\right)^m \to M\zeta^m$ при любом $m > 0$; для этого достаточно заметить, что $M\left(\frac{\zeta_T}{B_T^2}\right)^m$ ограничено равномерно относительно T. Точно так, как при доказательстве леммы 2 из [8], можно показать, что для любых целых $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{B_T^{k+2m}} M\left(\int_{0<s_1<\ldots<s_k<T}\cdots\int d\varphi_{s_1} \ldots\, d\varphi_{s_k} \int_{0<u_1<\ldots<u_m<T}\cdots\int d\zeta_{u_1} \ldots d\zeta_{u_m}\right) = 0. \tag{10}$$

Используя теперь соотношение

$$\varphi_T^m = m! \int_{0<s_1<\ldots<s_m<T}\cdots\int d\varphi_{s_1} \ldots d\varphi_{s_m} + \frac{m!}{2} \int_{0<s_1<\ldots<s_{m-2}<T}\cdots\int d\varphi_{s_1} \ldots d\varphi_{s_{m-2}} \cdot \int_0^T d\zeta_{u_1} +$$

$$+ \frac{m!}{2^2} \int_{0<s_1<\ldots<s_{m-4}<T}\cdots\int d\varphi_{s_1} \ldots d\varphi_{s_{m-4}} \cdot \iint_{0<u_1<u_2<T} d\zeta_{u_1} d\zeta_{u_2} + \ldots,$$

убеждаемся, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{B_T^{2k+2m}}M\varphi_T^{2k}\zeta_T^m=\lim_{T\to\infty}\frac{(2k)!}{2^kB_T^{2k+2m}}M\zeta_T^m\int\limits_{0<u_1<\ldots<u_k<T}\cdots\int d\zeta_{u_1}\ldots d\zeta_{u_k}=$$

$$=(2k-1)!!\lim_{T\to\infty}M(\zeta_T/B_T^2)^{m+k}=(2k-1)!!\,M\zeta^{m+k},$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{B_T^{2(k+m)-1}}M\varphi_T^{2k-1}\zeta_T^m=0.$$

Найденные соотношения показывают, что совместное распределение величин φ_T/B_T и ζ_T/B_T^2 сходится (а всегда можно выбрать такую последовательность T_n, чтобы предел совместного распределения величин φ_{T_n}/B_{T_n} и $\zeta_{T_n}/B_{T_n}^2$ существовал — см. [6], стр. 17, замечание 2) к совместному распределению величин φ и ζ, для которых

$$M\varphi^l\zeta^m=\begin{cases}0, & \text{если } l \text{ нечетное},\\ (2l-1)!!\,M\zeta^{m+\frac{l}{2}}, & \text{если } l \text{ четное}.\end{cases}\tag{11}$$

Поэтому $\frac{\varphi}{\sqrt{\zeta}}$ будет нормально $(0,1)$ распределено и не будет зависеть от ζ. Следовательно, φ распределено как $\omega\sqrt{\zeta}$, где ω — нормальная $(0,1)$ величина, не зависящая от ζ. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия:*

1) *при некоторых* $\alpha>\frac{1}{2}$, c_1 *и* c_2 *функция* $H(x)$ *является* $(\alpha;\,c_1,\,c_2)$-*регулярной на* ∞;

2) *при некотором* $0\leqslant d\leqslant 1$ *функция*

$$E(x)=2\int_0^x[F(y)-\alpha|y|^{\alpha-1}H_0(y)\,\mathrm{sign}\,y]^2\,dy$$

является $(2\alpha-1,\,d,\,d-1)$-*регулярной на* ∞;

3) *существует конечный предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{E_0(\sqrt{T})-E_0(-\sqrt{T})}{(|H_0(\sqrt{T})|+|H_0(-\sqrt{T})|)^2}=l\geqslant 0.$$

Тогда величина

$$\frac{\eta_T}{T^{\alpha/2}(|H_0(\sqrt{T})|+|H_0(-\sqrt{T})|)}$$

имеет при $T\to\infty$ *предельное распределение, совпадающее с распределением величины*

$$\alpha\eta_{\alpha-1,c_1,-c_2}+\omega\sqrt{l\eta_{2\alpha-1,d,d-1}},\tag{12}$$

где ω — *нормальная* $(0,1)$ *величина, не зависящая от процесса* $\widetilde{w}(t)$.

Замечание. Если $l=0$, то условие 2) становится излишним; при этом второе слагаемое в (12) считается равным 0.

Доказательство. Положим $B_T = T^{\frac{\alpha}{2}}\{|H_0(\sqrt{T})| + |H_0(-\sqrt{T})|\}$. Введем обозначения:

$$\psi_T = H(w(T)) - \alpha \int_0^T |w(t)|^{\alpha-1} H_0(w(t)) \operatorname{sign} w(t)\, dw(t),$$

$$\varphi_T = \int_0^T [F(w(t)) - \alpha |w(t)|^{\alpha-1} H_0(w(t)) \operatorname{sign} w(t)]\, dw(t),$$

$$\zeta_T = \int_0^T [F(w(t)) - \alpha |w(t)|^{\alpha-1} H_0(w(t)) \operatorname{sign} w(t)]^2\, dt.$$

Пусть $l > 0$. Представим величину η_T в виде

$$\eta_T = \psi_T + \varphi_T = \psi_T + \frac{\varphi_T}{\sqrt{\zeta_T}} \sqrt{\zeta_T}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1 получаем, что при $T \to \infty$ распределение величины ψ_T/B_T сходится к распределению величины $\psi = \alpha\eta_{\alpha-1,c_1,-c_2}$. Далее, из условий 2) и 3) и теоремы 1 следует, что распределение величины ζ_T/B_T^2 при $T \to \infty$ сходится к распределению величины $\zeta = l\eta_{2\alpha-1,d,d-1}$. Наконец, как и при доказательстве теоремы 2 можно установить, что совместное распределение величин ψ_T/B_T, φ_T/B_T и ζ_T/B_T^2 сходится к совместному распределению величин ψ, φ и ζ, для которых

$$M\varphi^l\zeta^m\psi^k = \begin{cases} 0, & \text{если } l \text{ нечетное}, \\ (2l-1)!!\, M\zeta^{m+\frac{l}{2}}\psi^k, & \text{если } l \text{ четное}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $\frac{\varphi}{\sqrt{\zeta}}$ нормально $(0,1)$ распределено и не зависит от величин ζ и ψ. Следовательно, величина φ распределена, как $\omega\sqrt{\zeta}$, где ω — нормальная $(0,1)$ величина, не зависящая от ζ и ψ. Если же $l = 0$, то легко можно показать, что $\varphi_T \to 0$ по вероятности. Теорема (и замечание к ней) доказана.

Отметим теперь случай, когда сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$. Тогда $F(x) = 2\int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$. Приводимая ниже теорема не является наиболее полным следствием теорем 1 — 3, однако имеет несколько более удобную формулировку.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ такова, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ сходится.*

(I) *Если $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = c \neq 0$, то распределение величины*

$$\frac{1}{c\sqrt{T}} \int_0^T f(w(t))\, dt$$

при $T \to \infty$ сходится к распределению величины $\eta_{0,1,-1}$.

(II) *Если* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$ *и при некоторых* $-\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 0,\ c_1,\ c_2$ *функция* $F(x)$ *является* $(\alpha;\ c_1,\ c_2)$*-регулярной на* ∞, *то распределение величины*

$$\frac{1}{2T^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(|F_0(\sqrt{T})| + |F_0(-\sqrt{T})|\right)}\int\limits_0^T f(w(t))\,dt$$

при $T \to \infty$ *сходится к распределению величины* η_{α,c_1,c_2}.

(III) *Если* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} F^2(x)\,dx = a^2 < \infty$ *и* $H(x) = o(\sqrt{|x|})$ *при* $x \to \infty$, *то распределение величины*

$$\frac{1}{a\sqrt[4]{T}}\int\limits_0^T f(w(t))\,dt$$

$(a > 0)$ *при* $T \to \infty$ *сходится к распределению величины* $\omega\sqrt{\eta_{0,1,-1}}$, *где* ω — *нормальная* $(0,1)$ *величина, не зависящая от процесса* $\widetilde{w}(t)$.

Доказательство этой теоремы вытекает из теорем 1 и 2.

Замечание. Условие (III) выполняется, если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$ и существует такая постоянная $C > 0$, что $f(x) = 0$ при $|x| > C$.

В качестве следствия теоремы 1 рассмотрим предельные распределения для времени пребывания процесса $w(t)$ в некотором множестве состояний. Пусть A — борелевское множество точек на прямой и $\psi_A(x) = 1$, если $x \in A$, $\psi_A(x) = 0$, если $\overline{x \in A}$. Тогда время пребывания процесса во множестве A равно $\nu_T(A) = \int\limits_0^T \psi_A(w(t))dt$. Положим $F_A(T) = \int\limits_0^T \psi_A(x)\,dx$, так что $F_A(T)$ есть лебегова мера множества $[0, T] \cap A$ при $T > 0$ и $-F_A(T)$ — лебегова мера множества $[T, 0] \cap A$ при $T < 0$.

Теорема 5. *Пусть существуют такие число* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ *и медленно меняющаяся при* $T \to \infty$ *функция* $\chi(T)$, *что*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{F_A(T)}{T^\alpha\chi(T)} = c_1, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{F_A(-T)}{T^\alpha\chi(T)} = c_2,$$

где $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. *Тогда величина*

$$\frac{\nu_T(A)}{2T^{\frac{\alpha+1}{2}}\chi(\sqrt{T})}$$

имеет при $T \to \infty$ *предельное распределение, совпадающее с распределением величины* η_{α,c_1,c_2}.

Следствие 1. *Если существуют пределы*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{F_A(T)}{T} = c_1, \quad \lim_{T\to\infty}\frac{F_A(-T)}{T} = c_2$$

$(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$, *то распределение величины* $\frac{\nu_T(A)}{2T}$ *при* $T \to \infty$ *сходится к распределению величины* η_{1,c_1,c_2}.

Следствие 2. *Если существует такая медленно меняющаяся при $T \to \infty$ функция $\chi(T)$, что*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{F_A(T)}{\chi(T)} = c_1, \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{F_A(-T)}{\chi(T)} = c_2$$

$(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$, *то распределение величины* $\dfrac{\nu_T(A)}{2\sqrt{T}\chi(\sqrt{T})}$ *сходится при* $T \to \infty$ *к распределению величины* η_{0,c_1,c_2}.

Замечание. Распределения величин η_{α,c_1,c_2} для некоторых случаев приведены в [5]. В частности, $\eta_{0,c_1,c_2} = \dfrac{c_1 - c_2}{2}\eta_{0,1,-1}$ и величина $\eta_{0,1,-1}$ имеет сдвоенное нормальное распределение, т. е.

$$P\{\eta_{0,1,-1} < x\} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Далее, $\eta_{1,c_1,c_2} = \dfrac{c_1 - c_2}{4} + \dfrac{c_1 + c_2}{2}\eta_{1,1,1}$ и величина $\eta_{1,1,1}$ имеет арксинус распределения, т. е.

$$P\{\eta_{1,1,1} < x\} = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\dfrac{2x+1}{2}}, & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Перейдем к изучению предельных распределений величин (1) в случае m-мерного броуновского движения $w(t)$. Обозначим через (x, y) скалярное произведение векторов x и y из $R^{(m)}$, и пусть $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Приводимое ниже определение обобщает понятие $(\alpha; c_1, c_2)$-регулярной числовой функции от одной вещественной переменной на числовые функции, определенные для $x \in R^{(m)}$, и функции, определенные для $x \in R^{(m)}$ и принимающие значения из $R^{(m)}$.

Определение 2. Пусть функция $R(x)$, определенная для всех $x \in R^{(m)}$ и принимающая числовые значения либо значения из $R^{(m)}$, ограничена на каждом ограниченном измеримом множестве $R^{(m)}$. Если существуют точка $x_0 \in R^{(m)}$, $|x_0| = 1$, и принимающая числовые значения либо, соответственно, значения из $R^{(m)}$ функция $c(x) = c\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$, $|c(x)| \neq 0$, такие, что при любом $x \in R^{(m)}$, $|x| \neq 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{R(Tx)}{|R(Tx_0)|} = |x|^\alpha c\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

где α — некоторое вещественное число, то функцию $R(x)$ будем называть $\left(x_0, \alpha, c\left(\dfrac{x}{|x|}\right)\right)$-регулярной на ∞.

Замечание. Пусть $R(x)$ — $\left(x_0, \alpha, c\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$-регулярная функция. Если точка $z_0 \in R^{(m)}$, $|z_0| = 1$, такова, что $|c(z_0)| \neq 0$, то функция $R(x)$ будет также $\left(z_0, \alpha, c\left(\frac{x}{|x|}\right) |c(z_0)|\right)$-регулярной на ∞.

Лемма. *Пусть функция $R(x)$, определенная для всех $x \in R^{(m)}$ и принимающая числовые значения либо значения из $R^{(m)}$, ограничена на каждом ограниченном измеримом множестве $R^{(m)}$. Для того чтобы при некотором выборе постоянных B_T для каждого $x \in R^{(m)}$ существовал отличный от тождественного нуля конечный предел*

$$u(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{R(Tx)}{B_T}, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $R(x)$ была $\left(x_0, \alpha, c\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$-регулярной на ∞. При этом, если $R(x)$ — $\left(x_0, \alpha, c\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$-регулярная на ∞ функция, то в качестве B_T можно взять $B_T = |R(Tx_0)|$, и тогда $u(x) = |x|^\alpha c\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

Доказательство. Достаточность условия (и заключительное утверждение леммы) очевидна. Докажем его необходимость. Предположим вначале, что $R(x)$—числовая функция. Пусть при некоторых постоянных B_T имеет место формула (13). Тогда функция $u(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению: для любых x, y из $R^{(m)}$ и любого $a > 0$

$$u(ax)\, u(y) = u(ay)\, u(x). \tag{14}$$

Действительно,

$$u(ax)\, u(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{R(Tax)}{B_T} \cdot \frac{R(Tay)}{B_{Ta}} = \lim_{T\to\infty} \frac{R(Tax)}{B_{Ta}} \cdot \frac{R(Tay)}{B_T} = u(x)\, u(ay).$$

Покажем теперь, что все измеримые решения уравнения (14) представимы в виде $u(x) = |x|^\alpha u\left(\frac{x}{|x|}\right)$, где α — некоторое число. Исключая решение $u(x) \equiv 0$, перепишем (14) в виде

$$\frac{u(ax)}{u(x)} = \frac{u(ay)}{u(y)} = h(a), \tag{15}$$

где $h(a)$ — вспомогательная неизвестная функция. Из (15) получаем уравнение

$$u(ax) = u(x)\, h(a). \tag{16}$$

Пусть $b > 0$. Тогда

$$u(abx) = u(x)\, h(ab) = u(x)\, h(a)\, h(b);$$

отсюда получаем, что

$$h(ab) = h(a)\, h(b).$$

Единственным измеримым решением последнего уравнения есть решение $h(a) = a^\alpha$, где α — некоторое число. Из (16) получаем, что $u(ax) = a^\alpha u(x)$, откуда, полагая $a = |x|^{-1}$, находим, что $u(x) = |x|^\alpha u\left(\frac{x}{|x|}\right)$. Если теперь

$x_0 \in R^{(m)}$, $|x_0| = 1$, такая точка, что $u(x_0) \neq 0$, то при любом $x \in R^{(m)}$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{R(Tx)}{|R(Tx_0)|} = |x|^{\alpha} \frac{u\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|u(x_0)|},$$

откуда и следует требуемое утверждение. Если же $R(x) = (R^{(1)}(x), \ldots$ $\ldots, R^{(m)}(x))$ и $u(x) = (u^{(1)}(x), \ldots, u^{(m)}(x))$, то из (13) (и только что доказанного) следует, что для любого $1 \leqslant i \leqslant m$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{R^{(i)}(Tx)}{B_T} = |x|^{\alpha} u^{(i)}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Поэтому $u(x) = |x|^{\alpha} u\left(\frac{x}{|x|}\right)$ и доказательство леммы завершается точно так, как и в рассмотренном случае. Лемма доказана.

Обозначим через $H(x)$, $x \in R^{(m)}$, решение уравнения $\Delta H(x) = 2f(x)$, где Δ — оператор Лапласа, а функция $f(x)$ определена в п. 1. Представим величину η_T в виде

$$\eta_T = H(w(t)) - H(0) - \sum_{i=1}^{m} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x^{(i)}}(w(t))\, dw^{(i)}(t) =$$

$$= H(w(t)) - H(0) - \int_0^T (\operatorname{grad} H(w(t)), dw(t)) \tag{17}$$

(здесь и в дальнейшем число 0 и точка $(0, 0, \ldots, 0) \in R^{(m)}$ обозначаются одним и тем же символом). Пусть, далее, $\widetilde{w}(t) = (\widetilde{w}^{(1)}(t), \ldots, \widetilde{w}^{(m)}(t))$ — броуновское движение, определенное для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеет место следующая

Теорема 6. *Пусть выполняются условия:*

1) *при некоторых* $x_0 \in R^{(m)}$, $|x_0| = 1$, *и* $\alpha > -1$ $\operatorname{grad} H(x)$ — $\left(x_0, \alpha, c\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$*-регулярная функция на* ∞;

2) *существует такое* $0 \leqslant \varepsilon < \alpha + 1$, *что*

$$\frac{|x|^{\varepsilon} |\operatorname{grad} H(xT)|}{|x|^{\alpha} |\operatorname{grad} H(x_0 T)|}$$

ограничено равномерно относительно x *и* T *на любом ограниченном множестве* $R^{(m)}$.

Тогда существует такая числовая функция $\gamma(x) = \gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)$, $x \in R^{(m)}$, *что* $H(x)$ *будет* $\left(x_0, \alpha+1, \gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)\right)$*-регулярной функцией на* ∞ *и при* $T \to \infty$ *величина* $\frac{\eta_T}{\sqrt{T}\,|\operatorname{grad} H(x_0 \sqrt{T})|}$ *имеет предельное распределение, совпадающее с распределением величины*

$$l\,|\widetilde{w}(t)|^{\alpha+1} \gamma\left(\frac{\widetilde{w}(t)}{|\widetilde{w}(t)|}\right) - \int_0^1 |\widetilde{w}(t)|^{\alpha} \left(c\left(\frac{\widetilde{w}(t)}{|\widetilde{w}(t)|}\right), d\widetilde{w}(t)\right), \tag{18}$$

где

$$l = \lim_{T \to \infty} \frac{|H(x_0 \sqrt{T})|}{\sqrt{T}\,|\operatorname{grad} H(x_0 \sqrt{T})|}.$$

Доказательство. Требуемая в теореме регулярность $H(x)$ вытекает из соотношения

$$H(x) = H(0) + \sum_{i=1}^{m} \int_0^{x^{(i)}} \frac{\partial H}{\partial x^{(i)}}(0, \ldots, 0, x^{(i)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(m)})\, dx^{(i)}$$

условий 1) и 2) и леммы 2. Обозначим $B_T = \sqrt{T}|\operatorname{grad} H(x_0 \sqrt{T})|$. Распределение величины η_T/B_T при каждом T совпадает с распределением величины

$$\frac{H(\widetilde{w}(1)\sqrt{T}) - H(0)}{B_T} - \frac{\sqrt{T}}{B_T} \int_0^1 (\operatorname{grad} H(\widetilde{w}(t)\sqrt{T}),\, d\widetilde{w}(t)), \tag{19}$$

а величина (19) при $T \to \infty$ сходится по вероятности к величине (18); последнее легко следует из условий 1) и 2) (см. [7], гл. 2, § 1).

Замечание. 1). Условие 2) можно заменить более слабым условием: для любого $R > 0$ существует функция $\varphi_R(x)$, определенная для $x \in R^{(m)}$, $|x| \leqslant R$, такая, что

$$P\left\{\int_0^1 \varphi_R^2(w(t))\, dt < +\infty\right\} = 1$$

и равномерно относительно T и x, $|x| \leqslant R$,

$$\frac{|\operatorname{grad} H(xT)|}{|\operatorname{grad} H(x_0 T)|} \leqslant \varphi_R(x).$$

2). Если вместо условия 2) потребовать, чтобы при $T \to \infty$

$$\frac{\operatorname{grad} H(xT)}{|\operatorname{grad} H(x_0 T)|} \to c\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\alpha}$$

равномерно относительно x на любом ограниченном множестве вида $0 < r \leqslant |x| \leqslant R < \infty$, то для всех $x \neq 0$ будет выполняться соотношение

$$c\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\alpha} = l \operatorname{grad} \gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\alpha+1},$$

и тогда, полагая $U(x) = l\gamma\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^{\alpha+1}$, функционал (18) можно записать в виде

$$U(\widetilde{w}(t)) - \int_0^1 (\operatorname{grad} U(\widetilde{w}(t)),\, d\widetilde{w}(t)). \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Lévy, Sur certains processus stochastiques homogénes, Compositio Mathematica, **7**, 1939, 283—339.
2. G. Kallianpur, H. Robbins, Ergodic property of the Brownian motion process, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **39**, 1953, 525—533.
3. Е. Б. Дынкин, О некоторых предельных теоремах для цепей Маркова, УМЖ, т. VI, N 1, 1954.
4. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Предельные теоремы для случайных блужданий, I, Теория вероятн. и ее прим., т. 10, № 4, 1965.
5. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Предельные теоремы для случайных блужданий. II, Теория вероятн. и ее прим., т. 11, N 1, 1966.
6. J. Karamata, Sur un mode de croissance réguliére des fonctions, Mathematica (Cluj), **4**, 1930, 38—53.
7. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевск. ун-та, К., 1961.
8. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Предельные распределения аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин, УМЖ, т. 17, № 2, 1965.

Поступила 20.I 1966 г.

Киев