О мультипликативных и спектральных свойствах пространственных матриц с неотрицательными элементами

Н. П. Соколов

1. Настоящая статья является продолжением исследований по теории пространственных матриц, опубликованных в предыдущей статье автора [1]. Рассматриваются основные мультипликативные и спектральные свойства неотрицательных пространственных матриц. Обобщаются теоремы Перрона и Фробениуса о характеристических числах и собственных векторах квадратных матриц с положительными и неотрицательными элементами и указываются специфические особенности примитивных и стохастических пространственных матриц. Терминология и обозначения заимствованы из статьи [1].

Возьмем p-мерную матрицу n-го порядка

$$A = \| A_{i_1 \ldots i_p} \| \qquad (i_1, \ldots, i_p = 1, \ldots, n)$$

над некоторым числовым полем P. Пусть λ, μ — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию

$$\lambda + 2\mu = p. \tag{1}$$

Обозначая через $m = (m_1, \ldots, m_\mu)$, $s = (s_1, \ldots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \ldots c_\mu)$ разбиения совокупности индексов $i_1, \ldots, i_p$ матрицы A, представим ее в виде

$$A = \| A_{msc} \|, \tag{2}$$

где каждый из индексов разбиений m, s, c пробегает значения $1, \ldots, n$. Обозначим, далее, через $N_1, \ldots, N_{n^\mu}$ расположенные в нормальном порядке совокупности μ значений индексов каждого из разбиений m, c, а через $L_1, \ldots, L_{n^\lambda}$ — совокупности λ значений индексов разбиения s и составим из элементов матрицы A квадратную матрицу порядка $n^{\lambda+\mu}$

$$\mathfrak{A}(\lambda, \mu) = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{A}_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mathfrak{A}_{n^\lambda} \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

где

$$\mathfrak{A}_h = \| A_{\varrho L_h \sigma} \| \qquad (\varrho, \sigma = N_1, \ldots, N_{n^\mu};\ h = 1, \ldots, n^\lambda) \tag{4}$$

— квадратные матрицы порядка n^μ. Матрица (3) называется (λ, μ)-*ассоциированной с матрицей* A. Матрица (4) является $(0, \mu)$-ассоциированной с 2μ-мерной матрицей n-го порядка

$$A_h = \| A_{mL_hc} \| \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda), \tag{5}$$

представляющей h-е сечение ориентации (s) матрицы A.

В дальнейшем предполагается, что элементы матрицы A — вещественные неотрицательные числа и что всегда выполняется условие (1).

2. Определение 1. Неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A, представленная в виде (2), называется *полностью или частично* (λ, μ)-*разложимой*, если соответственно все матрицы $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, представленные в виде (4) или некоторых из этих матриц, разложимы [2, стр. 321]. В противном случае, когда каждая из матриц $\mathfrak{A}_h$ неразложима [2, стр. 321], матрица A называется (λ, μ)-*неразложимой*. Если каждая из матриц $\mathfrak{A}_h (h = 1, \ldots, n^\lambda)$ — покрываемонеразложима*, то матрица A называется (λ, μ)-*покрываемонеразложимой*.

Теорема 1. *Неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A тогда и только тогда является* (λ, μ)-*неразложимой, когда сумма матрицы A и* (λ, μ)-*единичной p-мерной матрицы n-го порядка* $E(\lambda, \mu)$ *есть* (λ, μ)-*покрываемонеразложимая матрица.*

Теорема очевидна, если принять во внимание, что покрываемая неразложимость суммы матрицы $\mathfrak{A}_h$ и единичной квадратной матрицы n^μ-го порядка E_{n^μ} является необходимым и достаточным условием неразложимости матрицы $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ [3, стр. 577].

Отметим основные мультипликативные свойства неотрицательных пространственных матриц.

Теорема 2. *Если неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A является* (λ, μ)-*покрываемонеразложимой, то ее* (λ, μ)-*свернутая* $(n^\mu - 1)$-я *степень представляет положительную матрицу, т. е.*

$$^{\lambda,\mu}(A^{n^\mu - 1}) > 0. \tag{6}$$

Действительно, по условию теоремы каждая из матриц n^μ-го порядка $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ — покрываемонеразложима, а тогда, как известно [3, стр. 577],

$$\mathfrak{A}_h^{n^\mu - 1} > 0 \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda).$$

Таким образом, все диагональные клетки квазидиагональной матрицы $\mathfrak{A}^{n^\mu - 1}(\lambda, \mu)$ положительны. Поэтому положительной будет и матрица $\mathfrak{A}^{n^\mu - 1}(\lambda, \mu)$, которая согласно правилу составления (λ,μ)-свернутого произведения пространственных матриц [1, стр. 68] является (λ, μ)-ассоциированной с p-мерной матрицей n-го порядка $^{\lambda,\mu}(A^{n^\mu - 1})$. Последняя, следовательно, удовлетворяет неравенству (6).

Из теорем 1 и 2 вытекает очевидное

Следствие. *Если неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка* A — (λ, μ)-*неразложима, то* (λ, μ)-*свернутая* $(n^\mu - 1)$-*я степень суммы матриц A и* $E(\lambda, \mu)$ *является положительной матрицей, т. е.*

$$^{\lambda,\mu}[(A + E(\lambda, \mu))^{n^\mu - 1}] > 0.$$

3. Пространственные положительные матрицы являются частным видом (λ, μ)-неразложимых неотрицательных матриц. Следующая теорема выражает спектральные свойства положительных пространственных матриц.

Теорема 3. (Общая теорема Перрона). *Положительная p-мерная матрица n-го порядка A, представленная в виде* (2), *всегда имеет вещественное и притом положительное* (λ, μ)-*характеристическое число* R, *которое является g-кратным* $(1 \leqslant g \leqslant n^\lambda)$ *корнем* (λ, μ)-*характеристического уравнения этой матрицы и превосходит модули всех других*

---

* См. [3], стр. 577. Квадратная неотрицательная матрица n-го порядка называется *покрываемонеразложимой*, если $\min\{\varepsilon+\eta\} > n$, где ε — число строк, η — число столбцов матрицы таких, что каждый ее ненулевой элемент принадлежит одной из этих строк или одному из этих столбцов, причем $0 < \varepsilon < n$ и $0 < \eta < n$.

(λ, μ)-*характеристических чисел*. (В дальнейшем число R иногда именуется максимальным (λ, μ)-характеристическим числом матрицы A). *Вместе с тем R есть простой корень* $(0, \mu)$-*характеристических уравнений g сечений ориентации* (s) *матрицы A. Числу R соответствует неотрицательная фундаментальная** (λ, μ)-*собственная матрица $Y = \| Y_{cs} \|$ для A. Положительные элементы матрицы Y образуют g сечений ориентации* (s) *этой матрицы, которые представляют соответствующие числу R фундаментальные* $(0, \mu)$-*собственные матрицы $Y_h = \| Y_{cL_h} \|$* $(h = h_1, \ldots, h_g)$ *для упомянутых выше сечений матрицы A.*

Действительно, так как $A > 0$, то и $\mathfrak{A}_h > 0$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$. Согласно теореме Перрона [2, стр. 323] положительная матрица $\mathfrak{A}_h$ всегда имеет вещественное и притом положительное характеристическое число R_h, которое является простым корнем ее характеристического уравнения и превосходит модули всех других характеристических чисел этой матрицы. Характеристическая матрица для $\mathfrak{A}_h$ — матрица системы n^μ линейных однородных уравнений с n^μ неизвестными

$$\sum_{\sigma=N_1}^{N_{n^\mu}} (A_{\varrho L_h \sigma} - \alpha \delta_{\varrho\sigma}) Y_{\sigma L_h} = 0 \qquad (\varrho = N_1, \ldots, N_{n^\mu}), \tag{7}$$

из которых при $\alpha = R_h$ определяются координаты соответствующего числу R_h собственного вектора $Y_{L_h} = (Y_{N_1 L_h}, \ldots, Y_{N_{n^\mu} L_h})$ матрицы $\mathfrak{A}_h$. Согласно теореме Перрона все эти координаты положительны и $Y_{L_h} > 0$.

Пусть R — максимальное из чисел R_h $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ и пусть им обладают $g (1 \leqslant g \leqslant n^\lambda)$ матриц $\mathfrak{A}_h (h = h_1, \ldots, h_g)$, а следовательно, и g сечений ориентации (s) матрицы A, с которыми $(0, \mu)$-ассоциированы эти матрицы и которые представляются матрицами A_h $(h = h_1, \ldots, h_g)$ Тогда R, являясь также простым корнем $(0, \mu)$-характеристических уравнений матриц A_h $(h = h_1, \ldots, h_g)$, будет g-кратным корнем (λ, μ)-характеристического уравнения матрицы A, и модули всех других (λ, μ)-характеристических чисел будут меньше чем R. Соответствующие числу R собственные векторы Y_{L_h} матриц $\mathfrak{A}_h$ $(h = h_1, \ldots, h_g)$, как указано выше, положительны. Каждый из них является $(0, \mu)$-ассоциированным вектором с $(0, \mu)$-собственной матрицей $Y_h = \| Y_{cL_h} \|$ для A_h $(h = h_1, \ldots, h_g)$. Матрицы $Y_h (h = h_1, \ldots, h_g)$, имеющие наименьшее число измерений μ, являются фундаментальными $(0, \mu)$-собственными матрицами для $A_h (h = h_1, \ldots, h_g)$. Эти матрицы, составленные из тех же элементов, что и векторы $Y_{L_h} (h = h_1, \ldots, h_g)$, положительны. Каждая из них представляет сечение ориентации (s) фундаментальной (λ, μ)-собственной матрицы $Y = \| Y_{cs} \|$ для A, соответствующей (λ, μ)-характеристическому числу R матрицы A. Таким образом, g сечений ориентации (s) матрицы Y положительны. Остальные же сечения этой ориентации — нулевые, так как при $\alpha = R$ системам линейных однородных уравнений (7) при значениях h, отличных от $h_1, \ldots, h_g$, соответствуют неособенные матрицы и следовательно эти системы уравнений имеют только нулевое решение. Теорема доказана.

4. Спектральные свойства (λ, μ)-неразложимых неотрицательных пространственных матриц выражаются следующей теоремой, обобщающей теорему 3.

---

* Как известно (см. [1], стр. 75), (λ, μ)-собственная матрица $X = \| X_{csk} \|$ для A имеет произвольное число измерений, не меньшее чем $\lambda + \mu$ (разбиение $k = (k_1, \ldots, k_\nu)$ содержит произвольное число ν индексов, пробегающих значения $1, \ldots, n$). При наименьшем числе измерений она называется *фундаментальной* (λ, μ)-собственной матрицей для A.

Т е о р е м а 4. (Общая теорема Фробениуса). *Представленная в виде* (2) (λ, μ)*-неразложимая неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A всегда имеет положительное* (λ, μ)*-характеристическое число R, которое является g-кратным* $(1 \leqslant g \leqslant n^{\lambda})$ *корнем* (λ, μ)*-характеристического уравнения этой матрицы. Модули всех других* (λ, μ)*-характеристических чисел не превосходят числа R* (см. выше). *Вместе с тем R есть простой корень* $(0, \mu)$*-характеристических уравнений g сечений ориентации (s) матрицы A. Числу R соответствует неотрицательная фундаментальная* (λ, μ)*-собственная матрица* $Y = \| Y_{cs} \|$ *для A. Положительные элементы матрицы Y образуют g сечений ориентации (s) этой матрицы, которые представляют соответствующие числу R фундаментальные* $(0, \mu)$*-собственные матрицы* $Y_h = \| Y_{cl_h} \|$ $(h = h_1, \ldots, h_g)$ *для упомянутых выше сечений матрицы A.*

Если при этом A имеет g рядов (λ, μ)*-характеристических чисел*

$$\alpha_0^{(h)} = R, \qquad \alpha_1^{(h)}, \ldots, \alpha_{d_h-1}^{(h)} \qquad (h = h_1, \ldots, h_g)$$

с одним и тем же модулем R, то все числа каждого ряда различны между собой и являются корнями соответствующего уравнения

$$\alpha^{d_h} - R^{d_h} = 0 \qquad (h = h_1, \ldots, h_g).$$

Вообще весь (λ, μ)*-спектр* $\alpha_0^{(h)}, \alpha_1^{(h)}, \ldots, \alpha_{n^\mu-1}^{(h)}$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ *матрицы A состоит из* $(0, \mu)$*-спектров* n^λ *сечений ориентации (s) матрицы A. Рассматриваемый как система точек в комплексной α-плоскости, этот спектр переходит сам в себя при повороте α-плоскости вокруг точки* $\alpha = 0$ *на угол* $\frac{2\pi}{d}$, *тогда как каждый из упомянутых выше* $(0, \mu)$*-спектров переходит сам в себя при повороте α-плоскости на угол* $\frac{2\pi}{d_h}$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, *где* d_h — *число* $(0, \mu)$*-характеристических чисел h-го сечения ориентации (s) матрицы A с максимальным модулем* R_h, а d — *общий наибольший делитель чисел* $d_1, \ldots, d_{n^\lambda}$. *При* $d_h > 1$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ *перестановкой сечений ориентации (m) и такой же перестановкой сечений ориентации (c) в каждой из матриц* (5), *представляющих сечения ориентации (s) матрицы A, последняя может быть приведена к такой p-мерной матрице, для которой диагональные клетки* (λ, μ)*-ассоциированной с ней квазидиагональной матрицы являются клеточными матрицами «циклического» вида*

$$\mathfrak{A}_h = \begin{Vmatrix} O & \mathfrak{A}_{12} & O & \ldots & O \\ O & O & \mathfrak{A}_{23} & \ldots & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & \ldots & \mathfrak{A}_{d_h-1\,d_h} \\ \mathfrak{A}_{d_h1} & O & O & \ldots & O \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где $\mathfrak{A}_{12}, \ldots, \mathfrak{A}_{d_h-1\,d_h}, \mathfrak{A}_{d_h1}$ *и все нулевые клетки — квадратные матрицы порядка* $\frac{n^\mu}{d_h}$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$.

В самом деле, если A — (λ, μ)-неразложимая неотрицательная матрица, то $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ — неразложимые неотрицательные матрицы. Согласно теореме Фробениуса [2, стр. 323, 324] каждая матрица $\mathfrak{A}_h$ имеет положительное характеристическое число R_h, которое является простым корнем ее характеристического уравнения и которого не превосходят модули всех других характеристических чисел этой матрицы. Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 3, нетрудно убедиться в справедливости первой части доказываемой теоремы. В справедливости ее второй части убеждаемся, замечая, что согласно той же теореме Фробениуса характеристические числа матрицы $\mathfrak{A}_h$ с одним и тем же максимальным модулем R_h различны между собой и являются корнями уравнения $\alpha^{d_h} - R_h^{d_h} = 0$, где d_h — число этих характеристических чисел, и что спектр $\alpha_0^{(h)}, \alpha_1^{(h)}, \ldots, \alpha_{n\mu-1}^{(h)}$ матрицы $\mathfrak{A}_h$, рассматриваемый как система точек в комплексной α-плоскости, переходит сам в себя при повороте этой плоскости вокруг точки $\alpha = 0$ на угол $\frac{2\pi}{d_h}$, а также принимая во внимание, что при $d_h > 1$ матрица $\mathfrak{A}_h$ может быть приведена к виду (8) перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов, чему соответствуют однотипные перестановки сечений ориентаций (m) и (c) матрицы (5).

5. Спектральные свойства пространственных (λ, μ)-неразложимых неотрицательных матриц не сохраняются при переходе к (λ, μ)-разложимым матрицам, однако в ослабленной форме некоторые из этих свойств имеют место и для (λ, μ)-разложимых неотрицательных пространственных матриц. Для произвольных неотрицательных пространственных матриц укажем на следующую теорему.

Теорема 5. *Неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A, представленная в виде* (2), *всегда имеет неотрицательное* (λ, μ)-*характеристическое число R такое, что модули всех* (λ, μ)-*характеристических чисел матрицы A не превосходят R. Вместе с тем R есть корень* (λ, μ)-*характеристических уравнений g* $(1 \leqslant g \leqslant n^\lambda)$ *сечений ориентации* (s) *матрицы A. Числу R соответствует неотрицательная фундаментальная* (λ, μ)-*собственная матрица $Y = \| Y_{cs} \|$ для A. В матрице Y $n^\lambda - g$ сечений ориентации* (s) *целиком состоят из нулей, а остальные g сечений неотрицательны и представляют соответствующие числу R фундаментальные* $(0, \mu)$-*собственные матрицы $Y_h = \|Y_{cL_h}\|$* $(h = h_1, \ldots, h_g)$ *для упомянутых выше сечений матрицы A.*

Доказательство теоремы проводим аналогично доказательствам предыдущих теорем, принимая во внимание, что неотрицательная матрица $\mathfrak{A}_h (h = 1, \ldots, n^\lambda)$, как известно [2, стр. 334], всегда имеет неотрицательное характеристическое число R_h, которого не превосходят модули всех ее характеристических чисел и которому соответствует отличный от нуля собственный вектор $Y_h = (Y_{N_1 L_h}, \ldots, Y_{N_{n^\mu} L_h})$ с неотрицательными координатами.

Замечание 1. Составляя суммы элементов каждой строки неотрицательной матрицы $\mathfrak{A}_h$, представленной в виде (4), т. е. суммы элементов каждого сечения ориентации (m) матрицы A_h, представленной в виде (5), и обозначая наибольшую из этих сумм через V_h, а наименьшую — через v_h, мы можем, как известно [2, стр. 331, 335], установить границы для величины максимального характеристического числа R_h матрицы $\mathfrak{A}_h$, а именно

$$v_h \leqslant R_h \leqslant V_h \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda),$$

откуда заключаем, что максимальное (λ, μ)-характеристическое число R неотрицательной матрицы A, являющееся максимальным из чисел R_h $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, содержится в границах

$$v \leqslant R \leqslant V, \tag{9}$$

где V — максимальное из чисел V_h, а v — минимальное из чисел v_h $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$.

Замечание 2. Для максимального (λ, μ)-характеристического числа R положительной матрицы A можно указать интервал, более узкий, чем (9). Сохраняя прежние обозначения R_h, V_h, v_h в случае, когда матрица $\mathfrak{A}_h$ положительна, обозначим через l_h минимальный элемент положительной матрицы $\mathfrak{A}_h$ и положим

$$k_h = \sqrt{\frac{v_h - l_h}{V_h - l_h}}.$$

Тогда, согласно неравенствам Островского [5, стр. 254], получим:

$$v_h + \left(\frac{1}{k_h} - 1\right) l_h \leqslant R_h \leqslant V_h - (1 - k_h)\, l_h \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda),$$

откуда

$$w \leqslant R \leqslant W,$$

где W — максимальное из чисел $V_h - (1 - k_h)\, l_h$, а w — минимальное из чисел $v_h + \left(\frac{1}{k_h} - 1\right) l_h$ $(h=1, \ldots, n^\lambda)$.

6. Рассмотрим один частный вид пространственных неотрицательных (λ, μ)-неразложимых матриц, определяемый следующим образом.

Определение 2. Неотрицательная (λ, μ)-неразложимая p-мерная матрица n-го порядка A, представленная в виде (2), называется (λ, μ)-примитивной, если все матрицы $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, представленные в виде (4), примитивны [2, стр. 345].

Следующая теорема устанавливает важное свойство (λ, μ)-примитивных матриц.

Теорема 6. *Неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A тогда и только тогда является (λ, μ)-примитивной, когда существует целое положительное число q такое, что*

$$^{\lambda,\mu}(A^q) > 0. \tag{10}$$

В справедливости теоремы убеждаемся, замечая, что необходимое и достаточное условие (λ, μ)-примитивности матрицы A совпадает с необходимыми и достаточными условиями примитивности матриц (4). Эти условия, как известно [2, стр. 345], заключаются в существовании целых положительных чисел q_h таких, что

$$\mathfrak{A}_h^{q_h} > 0 \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda).$$

Тогда будет иметь место неравенство

$$\mathfrak{A}^q\,(\lambda, \mu) > 0,$$

где q — максимальное из чисел q_h $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, а следовательно, верным будет и неравенство (10).

Определение 3. Если неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A — (λ, μ)-примитивная, то наименьшее целое положительное число $\gamma(A)$ такое, что имеет место неравенство (10), если $q \geqslant \gamma(A)$, называется *показателем матрицы A*.

Теорема 7. *Показатель $\gamma(A)$ (λ, μ)-примитивной p-мерной матрицы n-го порядка A удовлетворяет неравенству*

$$\gamma(A) \leqslant (n^\mu - 1)^2 + 1. \tag{11}$$

Действительно, так как квазидиагональная матрица $\mathfrak{A}^q\,(\lambda,\mu)$ является (λ, μ)-ассоциированной с матрицей $^{\lambda,\mu}(A^q)$, положительной при $q \geqslant \gamma(A)$, то диагональные клетки $\mathfrak{A}_h^q$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ матрицы $\mathfrak{A}^q\,(\lambda, \mu)$ положительны. Следовательно, каждая из матриц n^μ-го порядка $\mathfrak{A}_1$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ примитивная с показателем $\gamma(\mathfrak{A}_h)$, удовлетворяющим согласно теореме Виландта

[4, стр. 648] неравенству

$$\gamma(\mathfrak{A}_h) \leqslant (n^\mu - 1)^2 + 1 \qquad (h = 1, \ldots, n^\lambda). \tag{12}$$

Совокупность же неравенств (12) обусловливает неравенство (11).

7. Особую разновидность пространственных неотрицательных матриц представляет (λ, μ)-стохастические матрицы.

Определение 4. Представленная в виде (2) p-мерная матрица n-го порядка A называется (λ, μ)-стохастической, если она неотрицательна и сумма элементов каждого ее сечения ориентации (ms) равна единице.

Отметим некоторые специфические свойства (λ, μ)-стохастических матриц.

Теорема 8. *Неотрицательная p-мерная матрица n-го порядка A, представленная в виде* (2), *тогда и только тогда будет* (λ, μ)-*стохастической, когда она имеет фундаментальную* (λ, μ)-*собственную матрицу, все элементы которой равны единице, при максимальном* (λ, μ)-*характеристическом числе 1 кратности* n^λ, *являющемся также простым максимальным* $(0, \mu)$-*характеристическим числом каждого сечения ориентации* (s) *матрицы* A.

В самом деле, согласно определению 4 матрица A является (λ, μ)-стохастической лишь при соблюдении условий

$$A_{\varrho L_h \sigma} \geqslant 0, \qquad \sum_{\sigma=N_1}^{N_{n^\mu}} A_{\varrho L_h \sigma} = 1 \qquad (\varrho, \sigma = N_1, \ldots, N_{n^\mu}; \quad h = 1, \ldots, n^\lambda),$$

когда каждая матрица $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$, представленная в виде (4), будет стохастической. Необходимое и достаточное условие для этого состоит, как известно [2, стр. 347, 348], в существовании собственного вектора $Y_h = (Y_{N_1 L_h}, \ldots, Y_{N_{n^\mu} L_h})$ с координатами, равными единице, при характеристическом числе 1, которое является максимальным для стохастической матрицы $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$. Повторяя далее те же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 3, легко убеждаемся в справедливости теоремы 8.

Поскольку (λ, μ)-характеристические числа и соответствующие им (λ, μ)-элементарные делители p-мерной матрицы n-го порядка A получаются объединением характеристических чисел и соответствующих им элементарных делителей матриц $\mathfrak{A}_h$ $(h = 1, \ldots, n^\lambda)$ [1, стр. 77, 78], а также поскольку характеристическому числу 1 стохастической матрицы $\mathfrak{A}_h$, как и всякому ее характеристическому числу с модулем 1, всегда соответствуют только элементарные делители первой степени [2, стр. 348], то имеет, очевидно, место

Теорема 9. (λ, μ)-*характеристическому числу 1* (λ, μ)-*стохастической матрицы, как и всякому ее* (λ, μ)-*характеристическому числу с модулем 1, всегда соответствуют только* (λ, μ)-*элементарные делители первой степени.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Соколов, Операции над пространственными матрицами, УМЖ, т. 17, № 5, 1965, 67—79.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.
3. A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn, The exponents of incidence matrices, Duke Math. J., t. 31, 1964, 575—584.
4. H. Wielandt, Unzerlegbare nicht negative Matrizen, Math. Z., **52**, 1950, 642—648.
5. A. Ostrowski, Bounds for the greatest latent root of a primitive matrix, J. London Math. Soc., **27**, 1952, 253—256.

Поступила 6.XI 1965 г.
Киев