1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 4
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О строении изометрических преобразований симплектического и ортогонального векторного пространства

И. К. Цикунов

В последнее время появились работы И. М. Яглома [5] и Ю. Б. Ермолаева [6, 7], в которых рассматриваются симметрические, кососимметрические и симплектические (изометрические) преобразования вещественных симплектических пространств, а также симметрические и кососимметрические формы над произвольными сепарабельными полями.

Данную статью можно считать естественным продолжением выше названных работ. Автор ставил своей целью выяснить наиболее общие, не зависящие от особенностей поля, свойства изометрических преобразований билинейно-метрических пространств с ортогональной или симплектической метрикой. В ходе рассмотрения удалось выделить довольно обширный класс изометрических преобразований, классифицировать которые оказалось возможным над любым полем характеристики $\neq 2$. В другой класс вошли изометрические преобразования с самообратными (см. определения 1, 2) характеристическими полиномами. Свойства этих преобразований существенно зависят от поля, над которым они рассматриваются и требуют дальнейшего изучения.

Автор пользуется возможностью выразить благодарность профессору Л. А. Калужнину за ценные советы и указания, данные по поводу работы.

1. Определения и обозначения. Всюду в дальнейшем, кроме специально оговоренных случаев, под пространством V будет пониматься невырожденное билинейно-метрическое ([1], 245—267) векторное пространство с ортогональной или симплектической метрикой над произвольным полем K характеристики $\neq 2$. Буквой A будет обозначаться изометрическое линейное преобразование этого пространства, т. е. преобразование, сохраняющее неизменной метрическую билинейную форму: $(Ax, Ay) = (x, y)$, где (x, y) обозначает скалярное произведение векторов x и y в пространстве V.

Ненулевой вектор x, обладающий свойством $(x, x)=0$, будем называть изотропным.

Пространство U назовем вырожденным, если в нем найдется по крайней мере один ненулевой вектор x, ортогональный всему пространству, т. е. $(x, y) = 0$ для всех векторов $y \in U$.

Совокупность векторов x пространства U таких, что $(x, y) = 0$ для всех векторов $y \in U$, назовем радикалом U и будем обозначать $\mathrm{Rad}\, U$.

Пространство U, совпадающее со своим радикалом: $\mathrm{Rad}\, U = U$, назовем изотропным.

В статье применяются обозначения и символы:

$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ — линейная оболочка векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

θ — нуль-вектор;

$\oplus$ — знак прямой суммы пространств;

$\perp$ — знак ортогональной суммы пространств.

Обратим внимание на некоторые специальные понятия.

Определение 1. Назовем полином вида

$$p^n(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \alpha_2\lambda^{r-2} + \ldots + \alpha_{r-2}\lambda^2 + \alpha_{r-1}\lambda + \alpha_r$$

самообратным полиномом первого рода, если

а) его коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_i = \alpha_{r-i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r);$$

б) полином $p(\lambda)$ неприводим (степени $\geqslant 2$).

Определение 2. *Самообратными полиномами второго рода* назовем полиномы вида $(\lambda \pm 1)^n$.

Определение 3. Несамообратные полиномы $q_1^m(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_r$ и $q_2^m(\lambda) = \lambda^r + \beta_1\lambda^{r-1} + \ldots + \beta_r$ назовем *взаимнообратными*, если

а) выполняются соотношения $\beta_{r-i}\alpha_r = \alpha_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, r)$;

б) $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ — неприводимые полиномы.

Иногда для удобства полином $q_2^m(\lambda)$, взаимнообратный полиному $q_1^m(\lambda)$, будем обозначать символом $q_1^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Определение 4. Подпространство U пространства V назовем циклическим относительно преобразования A, если

а) U инвариантно относительно A и не распадается в прямую сумму инвариантных относительно A подпространств;

б) аннулирующий полином для пространства U является степенью неприводимого, т. е. для любого вектора $x \in U$ $f^n(A)\,x = \vartheta$, где $f(\lambda)$ — неприводимый полином, а n — некоторое целое число.

Циклическое пространство будем обозначать символом $U(f(\lambda), n)$, где $f^n(\lambda)$ — аннулирующий полином для этого пространства.

Определение 5. Пространство V назовем *A-гиперболическим*, если

а) оно представимо в виде ортогональной суммы

$$V = U_1(f_1, n_1) \oplus U_2(f_2, n_2) \perp U_3(f_3, n_3) \oplus U_4(f_4, n_4) \perp \ldots \perp U_k(f_k, n_k) \oplus$$
$$\oplus U_{k+1}(f_{k+1}, n_{k+1}),$$

где все пространства $U_i(f_i, n_i)$ циклические относительно A и изотропны, а прямые суммы $U_i(f_i, n_i) \oplus U_{i+1}(f_{i+1}, n_{i+1})$ невырождены;

б) в нем нет невырожденных циклических подпространств.

Рассмотрим некоторые простейшие свойства только что введенных объектов.

Замечание 1. Если полином $p^n(\lambda)$ самообратный первого рода, то $p^j(\lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, — тоже самообратный полином первого рода и имеет четную степень.

В самом деле, из определения видно, что самообратный полином вместе с корнем β имеет ему обратный $\frac{1}{\beta}$, и $\beta \neq \frac{1}{\beta}$. Этим же свойством обязан обладать неприводимый полином $p(\lambda)$, и его коэффициенты, следовательно, удовлетворяют соотношениям $\alpha_i = \pm\alpha_{s-i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$, где s — степень полинома $p(\lambda)$; однако из указанных соотношений только $\alpha_i = \alpha_{s-i}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$ удовлетворяют требованию $\beta \neq \frac{1}{\beta}$, причем степень полинома должна быть четной.

Для других j рассуждения проводятся аналогично.

Замечание 2. Если $q_1^m(\lambda)$ и $q_2^m(\lambda)$ — взаимно обратные полиномы, то и $q_1^i(\lambda)$ взаимнообратен $q_2^i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Опять же из определения видно, что полиномы $q_1^m(\lambda)$ и $q_2^m(\lambda)$ имеют взаимно обратные корни, и, следовательно, $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ тоже имеют взаимно обратные корни. Пусть $q_1(\lambda) = \lambda^s + \alpha_1\lambda^{s-1} + \ldots + \alpha_s$, тогда полиномы $\alpha_s\lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + 1$ и $q_2(\lambda) = \lambda^s + \beta_1\lambda^{s-1} + \ldots + \beta_s$ имеют одинаковые корни и оба неприводимы, значит, $\alpha_s\lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_1\lambda + 1 = \gamma(\lambda^s + \beta_1\lambda^{s-1} + \ldots + \beta_s)$, $\gamma \in K$; отсюда $\gamma = \alpha_s$, $\alpha_j = \beta_{s-j}\alpha_s$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$. Аналогичным образом проводятся рассуждения и для других i.

Замечание 3. Пусть V — невырожденное билинейно-метрическое пространство, A — изометрическое преобразование этого пространства, $f(\lambda)$ — некоторый полином, $(x, f(A)y)$ — скалярное произведение, где $x, y \in V$, $f(\lambda) = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots + \alpha_k$; тогда $(x, f(A)y) = \left(\alpha_k f\left(\frac{1}{A}\right)x, A^k y\right)$, где $\alpha_k f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha_k\lambda^k + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$.

Доказательство получается непосредственной проверкой:

$$(x, f(A)y) = \alpha_0(x, A^k y) + \alpha_1(x, A^{k-1}y) + \ldots + \alpha_k(x, y),$$

A — изометрия, т. е. $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всех векторов $x, y \in V$, значит $\alpha_0(x, A^k y) + \alpha_1(x, A^{k-1}y) + \ldots + \alpha_k(x, y) = \alpha_0(x, A^k y) + \alpha_1(Ax, A^k y) + \ldots$ $\ldots + \alpha_k(A^k x, A^k y) = (\alpha_k A^k x + \ldots + \alpha_1 Ax + \alpha_0 x, A^k y) = \left(\alpha_k f\left(\frac{1}{A}\right)x, A^k y\right)$.

Для самообратных полиномов 1-го рода, так как $\alpha_k = 1$ и $f(\lambda) = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, получим $(x, f(A)y) = (f(A)x, A^k y)$.

Для самообратных полиномов 2-го рода $\alpha_k = (\pm 1)^k$, поэтому $(x, (A \pm 1)^k y) = (\pm 1)^k((A \pm 1)^k x, A^k y)$.

Замечание 4. В любом циклическом относительно A пространстве $U(f(\lambda), n)$ имеется базис вида $a, Aa, \ldots, A^{r-1}a$, где r — степень полинома $f^n(\lambda)$, a — некоторый вектор из $U(f(\lambda), n)$. Такой базис назовем *циклическим*, а вектор a — *образующим вектором* пространства $U(f(\lambda), n)$.

Если взять векторы $a, f(A)a, f^2(A)a, \ldots, f^{n-1}(A)a$ из пространства $U(f(\lambda), n)$ и для каждого вектора построить подпространство $W_i = \langle f^{n-i-1}(A)a, Af^{n-i-1}(A)a, \ldots, A^{r_i-1}f^{n-i-1}(A)a\rangle$, где r_i — степень полинома $f^{i+1}(\lambda)$ (аннулирующего для W_i), то

а) все W_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ цикличны относительно A;

б) $U(f(\lambda), n) = W_{n-1} \supset W_{n-2} \supset \ldots \supset W_1 \supset W_0$.

Остальные понятия и обозначения имеют общепринятый смысл, однако следует заметить, что в рассуждениях и доказательствах автор существенно использует результаты монографии [2], многие термины тоже взяты оттуда.

2. Инвариантные подпространства и их свойства. Рассматривается изометрическое линейное преобразование A невырожденного билинейно-метрического пространства V над произвольным полем K. Пусть

$$f(\lambda) = p_1^{n_1}(\lambda)\cdot p_2^{n_2}(\lambda)\cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}(\lambda)\cdot q_1^{m_1}(\lambda)\cdot \ldots \cdot q_l^{m_l}(\lambda)\cdot(\lambda \pm 1)^{r_1}\cdot \ldots \cdot(\lambda \pm)^{r_s}$$

— характеристический полином преобразования A, записанный в виде произведения элементарных делителей, причем $p_i^{n_i}(\lambda)$ — самообратные полиномы первого рода, $q_i^{m_i}(\lambda)$ — произвольные не самообратные неприводимые полиномы. Разложим векторное пространство V в прямую сумму циклических относительно преобразования A подпространств соответственно разбиению характеристического полинома на элементарные делители:

$$V = U_1(p_1, n_1) \oplus U_2(p_2, n_2) \oplus \ldots \oplus U_k(p_k, n_k) \oplus U_1(q_1, m_1) \oplus \ldots \oplus U_l(q_l, m_l) \oplus$$
$$\oplus U(\lambda \pm 1)^{r_1} \oplus \ldots \oplus U(\lambda \pm 1)^{r_s}. \qquad (1)$$

Здесь подпространства $U_i(p_i, n_i)$ соответствуют элементарным делителям $p_i^{n_i}(\lambda)$, подпространства $U_i(q_i, m_i)$ — делителям $q_i^{m_i}(\lambda)$ и подпространства $U(\lambda \pm 1)^{r_i}$ — самообратным полиномам второго рода $(\lambda \pm 1)^{r_i}$.

Выясним особенности метрик, индуцированных в этих подпространствах.

Лемма 1. *Пусть V — невырожденное билинейно-метрическое пространство над некоторым полем K и A — изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом* $f(\lambda) = \alpha_0\lambda^k + \alpha_1\lambda^{k-1} + \ldots$ $\ldots + \alpha_k$, *тогда* $f(\lambda) = \gamma\alpha_k f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, *где* $\alpha_k f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha_k\lambda^k + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$, $\gamma \in K$.

Доказательство. Пусть y — произвольный вектор из V, тогда (см. замечание 3) $(x, f(A)y) = \left(\alpha_k f\left(\frac{1}{A}\right)x, A^k y\right) = 0$, $x \in V$. Преобразование A невырождено, значит, полином $\alpha_k f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \equiv 0 \pmod{f(\lambda)}$, другими словами, так как размерности полиномов равны, $f(\lambda) = \gamma\alpha_k f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где $\gamma \in K$.

Лемма 2. *Циклическое подпространство $U(q, m)$ вырождено.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть подпространство $U(q, m)$ невырождено. Из леммы 1 следует, что $q^m(\lambda) = \gamma\alpha_r q^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где $q^m(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \ldots + \alpha_r$ — элементарный делитель, соответствующий $U(q, m)$, $\gamma \in K$. Отсюда получаем: $\alpha_i = \gamma\alpha_{r-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, $\alpha_0 = 1$. Если $i = r$, то $\gamma = \alpha_r$; если $i = 0$, то $\gamma \cdot \alpha_r = \gamma^2 = 1$, $\gamma = \pm 1$. По условию леммы $\gamma = 1$ быть не может, так как $q^m(\lambda)$ — несамообратный полином, а при $\gamma = -1$ соотношения для коэффициентов принимают вид $\alpha_i = -\alpha_{r-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$ и полином $q^m(\lambda)$ оказывается приводимым, чего тоже не может быть. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Пространство $U(q, m)$ изотропно.*

Доказательство. Напомним, что для любого векторного пространства V, если A — линейное преобразование в V, а U — инвариантное относительно A подпространство, A индуцирует в фактор-пространстве V/U линейное преобразование, минимальный полином которого делит минимальный полином для преобразования A в V.

С другой стороны, для билинейно-метрического пространства V, если $\mathrm{Rad}\,V \neq V$, фактор-пространство $V/\mathrm{Rad}\,V$ невырождено и не равно ϑ. Вместе с тем, если A — изометрическое преобразование пространства V, то $\mathrm{Rad}\,V$ инвариантен относительно A. В самом деле, пусть вектор $x \in \mathrm{Rad}\,V$ и y — произвольный вектор из V, тогда вектор $A^{-1}y$ пробегает все пространство V вместе с y, так как A невырождено, и $(x, A^{-1}y) = (Ax, y) = 0$ для всех $y \in V$.

Применив сказанное выше в данном случае, получаем: пространство $U(q, m)/\operatorname{Rad} U(q, m)$ невырождено и соответствующий минимальный полином имеет вид $q^i(\lambda)$, $0 < i < m$, что невозможно по лемме 2. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь надо выяснить, какие отношения ортогональности существуют между подпространствами типа $U(q, m)$ и другими подпространствами из разложения (1).

Лемма 4. *Пусть подпространствам $U_1(q_1, m_1)$ и $U_2(q_2, m_2)$ соответствуют не взаимно обратные полиномы $q_1^{m_1}(\lambda)$ и $q_2^{m_2}(\lambda)$, тогда прямая сумма $U_1(q_1, m_1) \oplus U_2(q_2, m_2)$ вырождена.*

Доказательство. Допустим, что пространство $U_1 \oplus U_2$ — невырождено. Тогда по лемме 1 $q_1^{m_1}(\lambda) \cdot q_2^{m_2}(\lambda) = \gamma q_1^{m_1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot q_2^{m_2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, где $\gamma \in K$. Полиномы $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ неприводимы и несамообратны, значит, $q_1^{m_1}(\lambda) = \gamma_1 q_2^{m_2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $q_2^{m_2}(\lambda) = \gamma_2 q_1^{m_1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in K$. Таким образом, степени полиномов $q_1(\lambda)$ и $q_2(\lambda)$ равны, и, следовательно, случай $m_1 \neq m_2$ приводит к противоречию. Пусть теперь $m_1 = m_2 = m$, $q_1^m(\lambda) = \gamma_1 q_2^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ и $q_1^m(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \ldots + \alpha_r$, $\beta_r q_2^m\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \beta_r\lambda^r + \beta_{r-1}\lambda^{r-1} + \ldots + 1$, тогда $\alpha_{r-i}\beta_r = \gamma_1\beta_i$ $(i = 0, 1, \ldots, r)$, при $i = r$ получим $\gamma_1 = 1$, так что $\alpha_{r-i}\beta_r = \beta_i$. А это противоречит не взаимно обратности полиномов $q_1^{m_1}(\lambda)$ и $q_2^{m_2}(\lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Подпространства $U_1(q_1, m_1)$ и $U_2(q_2, m_2)$ ортогональны друг другу, если им соответствуют не взаимно обратные полиномы $q_1^{m_1}(\lambda)$ и $q_2^{m_2}(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть W_1 — пространство всех векторов из U_1, ортогональных U_2, W_2 — пространство всех векторов из U_2, ортогональных U_1, и $W_1 \neq U_1$, $W_2 \neq U_2$. С другой стороны, эти два подпространства не могут быть одновременно нулевыми, поскольку прямая сумма $U_1 \oplus U_2$ вырождена (см. лемму 4), а пространства U_1 и U_2 изотропны (по лемме 3). Рассмотрим фактор-пространства U_1/W_1 и U_2/W_2. Элементами $\neq \vartheta + W_1$ в этих пространствах будут классы эквивалентности вида $x + W_1$, $y + W_2$, где $x \in U_1$, $x \bar{\in} W_1$; $y \in U_2$, $y \bar{\in} W_2$. Между такими элементами однозначным образом определено скалярное произведение $(x + W_1, y + W_2) = (x, y)$. Вместе с тем каждое из пространств U_1/W_1, U_2/W_2 изотропно и по построению в U_1/W_1 нет элементов, ортогональных U_2/W_2, и в U_2/W_2 нет элементов, ортогональных U_1/W_1. Таким образом, прямая сумма $U_1/W_1 \oplus$ $\oplus U_2/W_2$ должна быть невырождена, что противоречит лемме 4, поскольку пространство U_1/W_1 является пространством типа $U(q_1, m_i)$, а U_2/W_2 — типа $U(q_2, m_j)$ (см. напоминание в доказательстве леммы 3). Полученное противоречие показывает, что хотя бы одно из фактор-пространств U_1/W_1 и U_2/W_2 должно быть нулевым. Лемма доказана.

Лемма 6. *Подпространство $U_1(q, m)$ ортогонально любым подпространствам типа $U_2(p, n)$ или $U_2(\lambda \pm 1)^r$.*

Лемма 7. *Подпространство $U_1(p_1, n_1)$ ортогонально любым подпространствам типа $U_2(\lambda \pm 1)^r$ или $U_2(p, n)$, если $p_2(\lambda) \neq p(\lambda)$.*

Обе предыдущие леммы являются следствием леммы 8.

Лемма 8. *Пусть $U_1(f_1, m_1)$ и $U_2(f_2, m_2)$ — подпространства в V, инвариантные относительно преобразования A, а $f_1^{m_1}(\lambda)$ и $f_2^{m_2}(\lambda)$ — взаимно-простые элементарные делители характеристического полинома преобразования A, причем $f_2^{m_2}(\lambda)$ — самообратный полином (первого или второго рода, безразлично), тогда $U_1(f_1, m_1) \perp U_2(f_2, m_2)$.*

Доказательство. Пусть x — произвольный вектор из U_1, тогда $f_2^{m_2}(A)x \neq \vartheta$, поскольку $f_1^{m_1}(\lambda)$ и $f_2^{m_2}(\lambda)$ — взаимно просты. Однако (см. замечание 3) $(f_2^{m_2}(A)x,\ A^r y) = \pm(x,\ f_2^{m_2}(A)y) = 0$, где r — степень полинома $f_2^{m_2}(\lambda)$, y — любой вектор из U_2; и так как подпространство U_2 инвариантно относительно A, для любого полинома $h_2(\lambda)$ выполняется $(h_2(A)f_2^{m_2}(A)x,\ A^r y) = 0$. Но для взаимно простых полиномов $f_1^{m_1}(\lambda)$ и $f_2^{m_2}(\lambda)$ найдутся такие $h_1(\lambda)$ и $h_2(\lambda)$, что $h_1(\lambda)f_1^{m_1}(\lambda) + h_2(\lambda)f_2^{m_2}(\lambda) = 1$, и тогда выражение $(h_1(A)f_1^{m_1}(A)x,\ A^r y) + (h_2(A)f_2^{m_2}(A)x,\ A^r y) = (x,\ A^r y) = 0$ для всех векторов $x \in U_1$ и $y \in U_2$. Лемма доказана.

Предыдущие леммы, а именно леммы 5 и 6, показывают, что подпространство $U(q_1,\ m)$ ортогонально всем подпространствам из разложения (1), кроме, может быть, подпространств $U(q_2,\ m)$, где полином $q_2{}^m(\lambda)$ взаимно-обратен полиному $q_1^m(\lambda)$.

Покажем, что среди всех пространств типа $U(q_2,\ m)$ найдется хотя бы одно такое, что прямая сумма $U(q_1,\ m) \dotplus U(q_2,\ m)$ будет невырожденным пространством. Доказательство поведем от противного.

Лемма 9. *Пусть все пространства из совокупности* $U_2\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right), n_2\right)$ $U_3\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_3\right), \ldots, U_k\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_k\right)$ *вырождены и такие, что прямая сумма вырожденного пространства* $U_1(f(\lambda),\ n_1)$ *с каждым из этих подпространств тоже вырождена и* $n_1 \geqslant n_i$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$, *тогда в* $U_1(f(\lambda),\ n_1)$ *найдется ненулевое подпространство* W_0, *ортогональное всем пространствам из указанной совокупности.*

Доказательство. Выберем из пространств $U_2\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_2\right)$, $U_3\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_3\right), \ldots, U_k\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_k\right)$ какое-нибудь одно и обозначим его символом $U_i\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_i\right)$. Найдем для этого пространства соответствующее $W_0 \subset U_1(f(\lambda),\ n_1)$.

Пусть W_1 — пространство всех векторов из U_1, ортогональных U_i, W_i — пространство всех векторов из U_i, ортогональных U_1, и W_0 — пространство всех векторов x из U_1 таких, что $f(A)x = \vartheta$. Подпространства W_1 и W_0 лежат в циклическом пространстве U_1 и инвариантны относительно A, поэтому, если $W_1 \neq \vartheta$, то $W_1 \supseteq W_0$. С другой стороны, $\operatorname{Rad} U_1$ тоже инвариантен относительно A и, как следует из условия леммы, не равен нулю, значит, $\operatorname{Rad} U_1 \supseteq W_0$. Таким образом, пространство $W_1 \cap \operatorname{Rad} U_1 \supseteq W_0$ при условии, что $W_1 \neq \vartheta$.

Допустим противное, т. е. $W_1 = \vartheta$, и, следовательно, $W_1 \cap \operatorname{Rad} U_1 = \operatorname{Rad}\langle U_1 \oplus U_i\rangle \cap \operatorname{Rad} U_1 = \vartheta$. Тогда для любого не равного нулю вектора $z \in \operatorname{Rad}\langle U_1 \dotplus U_i\rangle$, $z = x + y$, $x \in U_1$, $y \in U_i$ выполняется условие $y \neq \vartheta$. Пространство $\operatorname{Rad}\langle U_1 \oplus U_i\rangle$ инвариантно относительно A, поэтому вектор $f^j(A)z$, где $0 \leqslant j \leqslant n_1$, лежит в $\operatorname{Rad}\langle U_1 \oplus U_i\rangle$. Однако всегда можно найти такое j_1, что в векторе $f^{j_1}(A)z = f^{j_1}(A)x + f^{j_1}(A)y$ слагаемое $f^{j_1}(A)x \neq \vartheta$, но $f^{j_1+1}(A)x = \vartheta$, т. е. $f^{j_1}(A)x \in W_0 \subseteq \operatorname{Rad} U_1$. Следовательно, не равный нулю вектор $f^{j_1}(A)y \in W_i$.

Пусть теперь b — некоторый образующий вектор пространства U_i, тогда $f^{n_i-1}\left(\frac{1}{A}\right)b \in W_i$, поскольку W_i инвариантное относительно A подпространство циклического пространства U_i, и, значит, $\left(a,\ f^{n_i-1}\left(\frac{1}{A}\right)b\right)=$ $=0$ для любого вектора a из U_1. Но (см. замечание 3) $\left(a,\ f^{n_i-1}\left(\frac{1}{A}\right)b\right)=$ $=\alpha_r(f^{n_i-1}(A)a,\ A^r b)$, где $\alpha_r\in K$, r — степень полинома $f^{n_i-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Таким образом, $(f^{n_i-1}(A)a,\ A^r b)=0$ и, если a — образующий вектор пространства U_1, то $f^{n_i-1}(A)a\neq\vartheta$, так как $n_1\geqslant n_i$.

Повторив только что приведенные рассуждения для любого вектора $A^j f^{n_i-1}\left(\frac{1}{A}\right)b\in W_i$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,)$, получим: $(f^{n_i-1}(A)a,\ A^j A^r b)=0$, а это означает, что вектор $f^{n_i-1}(A)a$ ортогонален всему пространству U_i, т. е. $f^{n_i-1}(A)a\in W_1\neq\vartheta$. Полученное противоречие показывает, что пространство W_0 ортогонально $U_i\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_i\right)$, а вместе с ним и всем другим пространствам $U_i\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ n_i\right)$ $(i=2,\ 3,\ \ldots,\ k)$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь всевозможные прямые суммы $U_1(q_1,\ m)\dotplus U(q_2,\ m)$, где $U_1(q_1,\ m)$ — некоторое фиксированное пространство, а $U(q_2, m)$ — любое из подпространств разложения (1), соответствующее полиному $q_2^m(\lambda)=$ $=q_1^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Если все пары $U_1(q_1\ m)\oplus U(q_2,\ m)$ вырождены, то по леммам 5, 6, 9 ненулевое подпространство $W_0\subset U_1(q_1,\ m)$ ортогонально всему пространству V, что невозможно, так как V невырождено. Значит, найдется пара $U_1(q_1,\ m)\dotplus U_2(q_2,\ m)$ такая, что $\mathrm{Rad}\,\langle U_1(q_1,\ m)\dotplus U_2(q_2,\ m)\rangle=0$. Тогда [1, 2] пространство V можно представить в виде ортогональной суммы инвариантных относительно A подпространств $U_1(q_1,\ m)\dotplus U_2(q_2,\ m)$ и $V^{(1)}: V=U_1(q_1,\ m)\dotplus U_2(q_2,\ m)\perp V^{(1)}$, причем $V^{(1)}$, будучи ортогональным дополнением невырожденного пространства $U_1(q_1,\ m)\dotplus U_2(q_2,\ m)$, тоже невырождено и, следовательно, обладает всеми метрическими свойствами пространства V; а преобразование A индуцирует в нем изометрическое преобразование $A^{(1)}$ с характеристическим полиномом $f_1(\lambda)=\dfrac{f(\lambda)}{q_1^m(\lambda)\cdot q_2^m(\lambda)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть A — изометрическое преобразование невырожденного билинейно-метрического пространства V с ортогональной или симплектической метрикой, и характеристический полином $f(\lambda)$ преобразования A имеет элементарный делитель $q^m(\lambda)$ ($q^m(\lambda)$ несамообратный), тогда*

а) *в $f(\lambda)$ найдется элементарный делитель $q^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;*

б) *паре $q^m(\lambda)$, $q^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ соответствует A-гиперболическое подпространство $U(q(\lambda),\ m)\oplus U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ m\right)$;*

в) *пространство V распадается в ортогональную сумму*

$$V=U(q(\lambda),\ m)\oplus U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ m\right)\perp V^{(1)},$$

где $V^{(1)}$ — невырожденное инвариантное относительно A пространство, обладающее той же метрикой, что и пространство V.

Только что доказанная теорема дает возможность исключить из дальнейшего рассмотрения элементарные делители типа $q^m(\lambda)$. Подобные теоремы относительно элементарных делителей других типов можно доказать, исходя из следующих рассуждений.

Для делителя типа $p^n(\lambda)$ уже известно из леммы 7, что подпространство $U(p, n)$ ортогонально любым подпространствам $U(\lambda \pm 1)^r$, а также пространствам $U(p_1, n_1)$, если $p_1(\lambda) \neq p(\lambda)$. Пусть $U(p, n)$ невырождено, тогда его можно выделить ортогональным слагаемым из всего пространства $V: V = U(p, n) \perp U^{\perp}(p, n)$, где $U^{\perp}(p, n)$ — ортогональное дополнение пространству $U(p, n)$. Повторяя этот процесс, можно выделить все невырожденные подпространства типа $U(p, n)$. Из оставшихся вырожденных подпространств выберем все с некоторым фиксированным полиномом $p(\lambda)$ и расположим их в порядке убывания индекса n: $U_1(p, n_1), U_2(p, n_2), \ldots$ $\ldots, U_l(p, n_l)$. Если теперь все пары $U_1(p, n_1) \oplus U_i(p, n_i)$ $(i = 2, 3, \ldots, l)$ из этой совокупности представляют собой вырожденные пространства, то по леммам 7 и 9 подпространство $W_0 \subset U_1(p, n_1)$ ортогонально всему пространству V, что невозможно. Значит, найдется такое i, что $U_1(p, n_1) \oplus$ $\oplus U_i(p, n_i)$ невырождено, вместе с тем из второй части доказательства леммы 9 следует, что прямая сумма $U_1(p, n_1) \oplus U_i(p, n_i)$ всегда вырождена, если $n_1 > n_i$ $\left(\text{вектор } f^{n_i}\left(\frac{1}{A}\right) b \text{ равен нулю и, следовательно, вектор } f^{n_i}(A)\, a \in \operatorname{Rad}\left(U_1(f(\lambda), n_1) \oplus U_i\left(f\left(\frac{1}{\lambda}\right), n_i\right)\right)\right)$ так, что $n_1 = n_i = n$.

Лемма 10. *Пусть пространство $V = U_1(p, n) \oplus U_2(p, n)$ невырождено, подпространства U_1 и U_2 вырождены, тогда пространство V можно представить в виде ортогональной суммы $V = U_1'(p, n) \perp U_2'(p, n)$, где подпространства U_1' и U_2' невырождены.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай симплектической метрики. Пусть $p^{n-1}(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + 1$, $p(\lambda) = \lambda^s + \beta_1\lambda^{s-1} +$ $+ \ldots + \beta_1\lambda + 1$, a — образующий вектор пространства U_1, b_1 — образующий вектор пространства U_2. Вектор $p^{n-1}(A)\, a \in \operatorname{Rad} U_1$, так как пространство U_1 вырождено, кроме того $(p^{n-1}(A)\, a, p^i(A)\, b_1) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Последнее равенство легко проверить: $(p^{n-1}(A)\, a, \;\; p^i(A) \;\; b_1) =$ $= (p^{n-1}(A)\, a, p(A)\, p^{i-1}(A)\, b_1) = (p^n(A)\, a, A^s p^{i-1}(A)\, b_1) = 0$.

Пространство V невырождено, значит, в U_2 должен найтись некоторый образующий вектор c такой, что $(p^{n-1}(A)\, a, c) \neq 0$. Рассмотрим линейное преобразование пространства V вида

$$g(A) = A^{\frac{r+s}{2}} \left(\beta_{\frac{s}{2}} A^{\frac{s}{2}} + 2\beta_{\frac{s}{2}-1} A^{\frac{s}{2}-1} + \ldots + 2\beta_1 A + 2\right),$$

где β_i — коэффициенты полинома $p(\lambda)$ (r и s четные, ввиду самообратности полинома $p(\lambda)$). Это преобразование невырождено, так как $p(\lambda)$ неприводим. Пространство U_2 инвариантно относительно $g(A)$, поэтому в U_2 можно найти образующий вектор $b = g^{-1}(A)\, c$. Теперь утверждается, что пространство $U_1' = \langle a + b, A(a + b), \ldots, A^{sn-1}(a + b)\rangle$ невырождено. Допустим обратное: $\operatorname{Rad} U_1' \neq \vartheta$, тогда $p^{n-1}(A)(a + b) \in \operatorname{Rad} U_1'$ и $(A^l(a + b), p^{n-1}(A)(a + b)) = 0$ $(l = 0, 1, \ldots, r)$; $(A^l(a + b), p^{n-1}(A)(a + b)) =$ $= (A^l a, p^{n-1}(A)\, b) + (A^l b, p^{n-1}(A) a)$, так как $p^{n-1}(A) a \in \operatorname{Rad} U_1$, $p^{n-1}(A) b \in \operatorname{Rad} U_2$, с другой стороны, $(A^l a, p^{n-1}(A)\, b) = (p^{n-1}(A)\, A^l a, A^r b) = (p^{n-1}(A)\, a, A^{r-l} b)$

Таким образом, $(A^l(a + b), \;\; p^{n-1}(A)(a + b)) = (p^{n-1}(A)\, a, \;\; A^{r-l} b) +$ $+ (A^l b, p^{n-1}(A)\, a) = (A^l b - A^{r-l} b, p^{n-1}(A)\, a)$,

$$l=\frac{r}{2}+1,\quad \beta_{\frac{s}{2}-1}\cdot(A^{\frac{r}{2}+1}b-A^{\frac{r}{2}-1}b,\ p^{n-1}(A)a)=0,$$

$$l=\frac{r}{2}+2,\quad \beta_{\frac{s}{2}-2}\cdot(A^{\frac{r}{2}+2}b-A^{\frac{r}{2}-2}b,\ p^{n-1}(A)a)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l=\frac{r+s}{2}-1,\quad \beta_1\cdot(A^{\frac{r+s}{2}-1}b-A^{\frac{r-s}{2}+1}b,\ p^{n-1}(A)a)=0,$$

$$l=\frac{r+s}{2},\quad 1\cdot(A^{\frac{r+s}{2}}b-A^{\frac{r-s}{2}}b,\ p^{n-1}(A)a)=0.$$

Сложив все эти равенства, получим

$$(A^{\frac{r-s}{2}}(A^s+\beta_1A^{s-1}+\ldots+\beta_{\frac{s}{2}-1}A^{\frac{s}{2}+1}-\beta_{\frac{s}{2}-1}A^{\frac{s}{2}-1}-\ldots$$

$$\ldots-\beta_1A-1)\,b,\quad p^{n-1}(A)a)=0.$$

Но, как уже отмечалось, $(A^{\frac{s}{2}-1}p(A)b,\ p^{n-1}(A)a)=0$. Вычитая из этого равенства предыдущее, имеем

$$(A^{\frac{r-s}{2}}(\beta_{\frac{s}{2}}A^{\frac{s}{2}}+2\beta_{\frac{s}{2}-1}A^{\frac{s}{2}-1}+\ldots+2\beta_1A+2)\,b,\ p^{n-1}(A)a)=0,$$

что противоречит выбору вектора b.

Итак, U_1' невырождено и инвариантно относительно A. Тогда, как известно, $V=U_1'\perp U_1'^{\perp}$, причем $U_1'^{\perp}$ невырождено и инвариантно относительно A. Первая часть леммы доказана.

Пусть теперь метрика пространства V ортогональная. Все предыдущие рассуждения справедливы, только вместо $g(A)$ берем $g_1(A)=A^{\frac{r}{2}}$ и $(A^l(a+b),\quad p^{n-1}(A)(a+b))=(p^{n-1}(A)a,\quad A^{r-l}b)+(A^lb,\quad p^{n-1}(A)a)=$ $=(A^lb+A^{r-l}b,\ p^{n-1}(A)a)$. Выбрав $l=\frac{r}{2}$, получим $2(A^{\frac{r}{2}}b,\ p^{n-1}(A)a)=0$ что опять же противоречит выбору вектора b.

Как следствие из предыдущих лемм, вытекает

Теорема 2. *Пусть A — изометрическое преобразование невырожденного билинейно-метрического пространства V с ортогональной или симплектической метрикой и характеристический полином $f(\lambda)$ преобразования, A имеет элементарный делитель $p^n(\lambda)$, тогда*

а) *в V найдется невырожденное циклическое подпространство $U(p,\ n)$;*

б) *пространство V можно представить в виде ортогональной суммы $V=U(p,\ n)\perp U^{\perp}(p,\ n)$, где $U^{\perp}(p,\ n)$ — невырожденное инвариантное относительно A пространство, обладающее той же метрикой, что и пространство V.*

Элементарные делители $(\lambda\pm1)^r$ имеют много общего с делителями $p^n(\lambda)$, так как все они — самообратные полиномы. Поэтому многие леммы, справедливые для $p^n(\lambda)$, справедливы и для $(\lambda\pm1)^r$. Так, прежде всего, любое пространство типа $U(\lambda+1)^{r_1}$ ортогонально любому пространству $U(\lambda-1)^{r_2}$ (по лемме 8). Рассмотрев совокупность подпространств $U_1(\lambda\pm1)^{r_1}$,

$U_2(\lambda \pm 1)^{r_2}, \ldots, U_l(\lambda \pm 1)^{r_l}$ (здесь и в дальнейшем берутся или все верхние знаки, или все нижние), расположенных в порядке убывания индекса r: $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_l$, можно предположить, что все эти пространства вырождены, ибо невырожденное подпространство можно, как и для $p^n(\lambda)$, ортогонально выделить из всего пространства V. Далее можно сформулировать утверждение, аналогичное лемме 9.

Лемма 11. *Пусть все пространства из совокупности $U_2(\lambda \pm 1)^{r_2}$, $U_3(\lambda \pm 1)^{r_3}, \ldots, U_l(\lambda \pm 1)^{r_l}$ вырождены и такие, что прямая сумма вырожденного пространства $U_1(\lambda \pm 1)^{r_1}$ с каждым из этих пространств тоже вырождена, а $r_1 \geqslant r_i$ $(i = 2, 3, \ldots, l)$, тогда в $U_1(\lambda \pm 1)^{r_1}$ найдется ненулевое подпространство W_0, ортогональное всем пространствам из указанной совокупности.*

Специального доказательства для леммы 11 приводить не будем, поскольку оно совершенно аналогично доказательству леммы 9, только из замечания 3 надо брать часть, соответствующую самообратным полиномам второго рода.

Продолжая рассуждения дальше, точно так же, как и для $p^n(\lambda)$, получим, что для каждого вырожденного подпространства $U_1(\lambda \pm 1)^r$ найдется другое вырожденное подпространство $U_2(\lambda \pm 1)^r$ такое, что прямая сумма $U_1(\lambda \pm 1)^r \oplus U_2(\lambda \pm 1)^r$ невырождена. Но на этом аналогия с $p^n(\lambda)$ и кончается. Оказывается, что не для всякой невырожденной прямой суммы типа $U_1(\lambda \pm 1)^r \oplus U_2(\lambda \pm 1)^r$ можно доказать утверждение, аналогичное лемме 10. Это можно сделать для прямой суммы $U_1(\lambda \pm 1)^{2i+1} \oplus \oplus U_2(\lambda \pm 1)^{2i+1}$ в случае ортогональной метрики (вытекает непосредственно из последнего замечания в доказательстве леммы 10) и для прямой суммы вида $U_1(\lambda \pm 1)^{2i} \oplus U_2(\lambda \pm 1)^{2i}$ в случае симплектической метрики. Докажем последнее утверждение.

Лемма 12. *Пусть невырожденное пространство $V = U_1(\lambda \pm 1)^{2i} \oplus \oplus U_2(\lambda \pm 1)^{2i}$ имеет симплектическую метрику, подпространства $U_1(\lambda \pm 1)^{2i}$ и $U_2(\lambda \pm 1)^{2i}$ вырождены, тогда пространство V можно представить в виде ортогональной суммы $V = U_1'(\lambda \pm 1)^{2i} \perp U_2'(\lambda \pm 1)^{2i}$, где подпространства $U_1'(\lambda \pm 1)^{2i}$ и $U_2'(\lambda \pm 1)^{2i}$ невырождены.*

Доказательство. Пусть a — образующий вектор U_1, b — образующий вектор U_2, тогда $(A^i b, (A \pm 1)^{2i-1} a) \neq 0$. В противном случае $(A^i b, (A \pm 1)^{2i-1} a) \pm (A^{i-1} b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = (A^{i-1}(A \pm 1) b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = \pm \pm (A^i b, (A \pm 1)^{2i} a) = 0$ и, следовательно, $(A^{i-1} b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = 0$. Очевидно, что и для любого вектора из $A^j b$, $0 \leqslant j \leqslant 2i-1$, можно получить такое равенство, и, значит, вектор $(A \pm 1)^{2i-1} a \in \operatorname{Rad} U_1$ ортогонален U_2, что невозможно.

Рассмотрим теперь пространство $\langle a+b, A(a+b), \ldots, A^{2i-1}(a+b)\rangle$, оно невырождено. Допустим противное, т. е. $(A \pm 1)^{2i-1}(a+b) \in \in \operatorname{Rad}\langle a+b, A(a+b), \ldots, A^{2i-1}(a+b)\rangle$, тогда $(A^i(a+b), (A \pm 1)^{2i-1}(a+b)) = 0$. Но с другой стороны, $(A^i(a+b), (A \pm 1)^{2i-1}(a+b)) = (A^i a, (A \pm 1)^{2i-1} b) + + (A^i b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = \pm ((A \pm 1)^{2i-1} a, A^{i-1} b) + (A^i b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = = (A^i b \mp A^{i-1} b, (A \pm 1)^{2i-1} a)$. Сложив это выражение с заведомо равным нулю скалярным произведением $(A^i b \pm A^{i-1} b, (A \pm 1)^{2i-1} a)$, получим $(A^i b, (A \pm 1)^{2i-1} a) = 0$, что противоречит выбору векторов a и b.

Таким образом, $\langle a+b, A(a+b), \ldots, A^{2i-1}(a+b)\rangle = U_1'(\lambda \pm 1)^{2i}$ и пространство V можно представить в виде ортогональной суммы $V = = U_1'(\lambda \pm 1)^{2i} \perp U_1'^{\perp}(\lambda \pm 1)^{2i}$.

Лемма доказана.

Что касается прямых сумм $U_1(\lambda\pm 1)^{2l+1}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2l+1}$ при симплектической метрике и прямых сумм $U_1(\lambda\pm 1)^{2l}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2l}$ при ортогональной метрике, то для них можно доказать нечто совершенно противоположное лемме 10. Так, сразу можно заметить, что любое подпространство типа $U(\lambda\pm 1)^{2l+1}$ при симплектической метрике является вырожденным, поскольку имеет нечетную размерность. Также являются вырожденными подпространства типа $U(\lambda\pm 1)^{2l}$ при ортогональной метрике, что показывается в лемме 13, а лемма 14 заканчивает рассуждения.

Лемма 13. *Пусть циклическое пространство U обладает ортогональной метрикой, и пусть A — изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом $(\lambda\pm 1)^{2j}$, тогда пространство U вырождено.*

Доказательство. Пусть a — образующий вектор пространства U. Рассмотрим скалярное произведение $(a, (A\pm 1)^{2j-1}a)=\pm((A\pm 1)^{2j-1}a, A^{2j-1}a)$ (см. замечание 3) и, перенеся все в левую часть, получим:

$$(a, (A\pm 1)^{2j-1}a)\mp(A^{2j-1}a, (A\pm 1)^{2j-1}a)=((1\mp A^{2j-1})a, (A\pm 1)^{2j-1}a)=0.$$

Сложим полученное равенство с $((1\pm A^{2j-1})a, (A\pm 1)^{2j-1}a)=0$; тогда $2(a, (A\pm 1)^{2j-1}a)=0$. Значит, вектор $(A\pm 1)^{2j-1}a\in \operatorname{Rad} U$.

Лемма 14. *Пусть невырожденное пространство $V=U_1\oplus U_2$, где подпространства U_1 и U_2 вырожденные и циклические относительно преобразования A, характеристический полином которого равен $(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\times$ $\times(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, $\nu=1$ при симплектической метрике, $\nu=$ $=0$ при ортогональной Тогда V является A-гиперболическим пространством и, следовательно, представимо в виде $V=U_1''\oplus U_2''$, где U_1'' и U_2'' — изотропные, циклические подпространства.*

Доказательство. Пусть a — образующий вектор пространства

$$U_1 \text{ и } (A\pm 1)^{2l+\nu-1}a\in \operatorname{Rad} U_1,\ (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a\,\overline{\in}\, \operatorname{Rad} U_1,\ 1\leqslant l\leqslant k.$$

Следует заметить, что данное выражение охватывает все возможные размерности $\operatorname{Rad} U_1$, поскольку и в симплектическом и в ортогональном случаях $\dim \operatorname{Rad} U_1$ должна быть нечетная в силу вырожденности подпространств нечетной и четной размерности соответственно.

Отметим, что $(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)\neq 0$. В противном случае $(A\pm 1)^{2l+\nu-2}a\in$ $\in \operatorname{Rad} U_1$. В самом деле, $(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)\pm(Aa, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)=$ $=(Aa, (A(A\pm 1)^{2l+\nu-2}\pm(A\pm 1)^{2l+\nu-2})a)=(Aa, (A\pm 1)^{2l+\nu-1}a)=0$. Если теперь $(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)=0$, то $(Aa, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)=0$, и $\langle a, Aa, \ldots, A^{2k+\nu-1}a\rangle$ ортогонально $(A\pm 1)^{2l+\nu-2}a$.

С другой стороны, так как пространство V невырождено, в U_2 найдется образующий вектор b такой, что $(b, (A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)\neq 0$.

Рассмотрим векторное пространство U_1' с образующим вектором $a+$ $+\alpha(A\pm 1)^{2k-2l+1}b$, где α — скалярный множитель. Прежде всего $\dim \operatorname{Rad} U_1'$ не меньше $\dim \operatorname{Rad} U_1$: $(A\pm 1)^{2l+\nu-1}(a+\alpha(A\pm 1)^{2k-2l+1}b)=(A\pm 1)^{2l+\nu-1}a+$ $+\alpha(A\pm 1)^{2k+\nu}b=(A\pm 1)^{2l+\nu-1}a\in \operatorname{Rad} U_1$, $(a+\alpha(A\pm 1)^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2l+\nu-1}a)=$ $=\alpha((A\pm 1)^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2l+\nu-1}a)=\pm\alpha(A^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2k+\nu}a)=0$.

Теперь рассмотрим вектор $(A\pm 1)^{2l+\nu-2}(a+\alpha(A\pm 1)^{2k-2l+1}b)=$ $=(A\pm 1)^{2l+\nu-2}a+\alpha(A\pm 1)^{2k+\nu-1}b$: $(a+\alpha(A\pm 1)^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a+$ $+\alpha(A\pm 1)^{2k+\nu-1}b)=(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)+\alpha((A\pm 1)^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)+$ $+\alpha(a, (A\pm 1)^{2k+\nu-1}b)=(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)\pm\alpha(A^{2k-2l+1}b, (A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)+$ $+(\pm 1)^{\nu+1}\alpha((A\pm 1)^{2k+\nu-1}a, A^{2k+\nu-1}b)=(a, (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)\pm\alpha(A^{2k-2l+1}b,$

$(A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)+(\pm 1)^{\nu+1}(-1)^{\nu}\alpha(A^{2k+\nu-1}b,\ (A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)=(a,\ (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a)\pm$
$\pm\,\alpha\,(A^{2k-2l+1}(1+(\mp 1)^{\nu}A^{2l+\nu-2})\,b,\ (A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)$.

Легко заметить, что полином $1+(\mp 1)^{\nu}\lambda^{2l+\nu-2}$ взаимно прост с полиномом $\lambda\pm 1$ как при симплектической, так и при ортогональной геометрии, значит, скалярное произведение $(A^{2k-2l+1}(1+(\mp 1)^{\nu}A^{2l+\nu-2})b,\ (A\pm 1)^{2k+\nu-1}a)$ обращается в нуль одновременно с произведением $(b,\ (A\pm 1)^{2l+\nu-1}a)$, которое не равно нулю в силу выбора вектора b. Таким образом, скалярное произведение

$$(a+\alpha\,(A\pm 1)^{2k-2l+1}b,\ (A\pm 1)^{2l+\nu-2}a+\alpha\,(A\pm 1)^{2k+\nu-1}b)$$

соответствующим подбором коэффициента α можна обратить в нуль. Обозначим выбранное значение α через α', тогда подпространство U_1' с образующим вектором $a+\alpha'(A\pm 1)^{2k-2l+1}b$ будет иметь радикал размерности по крайней мере на единицу большей $\dim\operatorname{Rad}U_1$. В действительности $\dim\operatorname{Rad}U_1'$ увеличится по крайней мере на 2 в силу обязательной нечетности размерности радикала. Повторив приведенное рассуждение нужное количество раз, получим изотропное подпространство U_1'', причем $V=U_1''\oplus U_2$. Точно таким же образом получаем подпространство U_2'', и, следовательно, лемма доказана.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема 3. *Пусть A — изометрическое преобразование невырожденного билинейно-метрического пространства V с ортогональной или симплектической метрикой и характеристический полином $f(\lambda)$ преобразования A имеет элементарный делитель $(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, где $\nu=1$ при симплектической метрике, $\nu=0$ при ортогональной, тогда*

а) *в V найдется невырожденное циклическое подпространство $U(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$;*

б) *пространство V можно представить в виде ортогональной суммы $V=U(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}\perp U^{\perp}(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, где пространство $U^{\perp}(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, будучи ортогональным дополнением пространства $U(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, невырождено и инвариантно относительно A.*

Теорема 4. *В условиях предыдущей теоремы характеристический полином $f(\lambda)$ преобразования A имеет элементарный делитель $(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$, тогда*

а) *в $f(\lambda)$ найдется еще один элементарный делитель $(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$;*

б) *паре $(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$, $(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$ соответствует A-гиперболическое пространство $U_1(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$;*

в) *пространство V распадается в ортогональную сумму инвариантных относительно A подпространств:*

$$V=U_1(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\perp\langle U_1(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\rangle^{\perp}.$$

Вывод. Теоремы 1 — 4 показывают, что *для любого изометрического преобразования A* пространство V распадается в *ортогональную сумму* невырожденных инвариантных относительно A подпространств типа $U(p,\ n)$, $U(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, $U(q(\lambda),\ m)\oplus U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ m\right)$, $U_1(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}\oplus U_2(\lambda\pm 1)^{2k+\nu}$ и строение преобразования A определяется строением изометрических преобразований, индуцированных им в этих подпространствах. Если в одну группу объединить все невырожденные циклические подпространства $U(p,\ n)$ и $U(\lambda\pm 1)^{2k+1-\nu}$, а в другую — подпространства $U(q(\lambda),\ m)\oplus U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ m\right)$,

$U_1(\lambda \pm 1)^{2k+\nu} \oplus U_2(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$, то V естественным образом распадется в ортогональную сумму двух невырожденных инвариантных относительно A подпространств, первое из которых является ортогональной суммой циклических подпространств (циклическая часть), вторая — A-гиперболическим подпространством (гиперболическая часть).

Поскольку строение изометрических преобразований в циклических пространствах существенно зависит от особенностей поля, эти пространства не будут рассматриваться в данной статье (см. также вступление). Что касается изометрических преобразований, индуцированных в гиперболической части пространства, то в этом случае рассуждения можно провести до конца.

3. Строение изометрических преобразований в гиперболических относительно них пространствах. Пусть A — такое изометрическое преобразование пространства V, что V является A-гиперболическим. По определению в V не может быть невырожденных циклических подпространств, поэтому характеристический полином преобразования A может содержать в качестве элементарных делителей только несамообратные неприводимые полиномы $q^m(\lambda)$ и полиномы $(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$, где $\nu = 1$ при симплектической метрике, $\nu = 0$ при ортогональной. Отсюда же следует, что прямые суммы $U_i(f_i, n_i) \oplus U_{i+1}(f_{i+1}, n_{i+1})$ (см. определение 5) являются пространствами вида $U(q(\lambda), m) \oplus U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right), m\right)$, или $U_1(\lambda \pm 1)^{2k+\nu} \oplus U_2(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$. Их характерной особенностью является то, что прямые слагаемые $U(q(\lambda), m)$, $U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right), m\right)$, $U_1(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$, $U_2(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$ изотропны. Эта особенность, по сути дела, и определяет строение изометрических преобразований в этих пространствах. В самом деле, обозначим подпространства $U(q(\lambda), m)$ или $U_1(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$ через U_1, $U\left(q\left(\frac{1}{\lambda}\right), m\right)$ или $U_2(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$ через U_2 и будем рассматривать оба типа подпространств вместе. В новых обозначениях задача формулируется так: дано невырожденное билинейно-метрическое пространство $U_1 \oplus U_2$ с ортогональной или симплектической метрикой над произвольным полем K; A — изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом $f(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda)$, где $f_1(\lambda) = q^m(\lambda)$ или $(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$, $f_2(\lambda) = q^m\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ или $(\lambda \pm 1)^{2k+\nu}$, причем подпространства U_1 и U_2 инвариантны относительно A и изотропны. В матричной форме сказанное выше запишется так: $\begin{pmatrix} O & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & O \end{pmatrix}$ — матрица Грама пространства $U_1 \oplus U_2$, где при ортогональной метрике $\Gamma_2 = \Gamma_1'$, при симплектической: $\Gamma_2 = -\Gamma_1'$; $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ — матрица преобразования A, где A_1 имеет характеристический полином $f_1(\lambda)$, A_2 — $f_2(\lambda)$ (размерности всех матриц Γ_1, Γ_2, A_1, A_2, O одинаковы).

Пусть теперь матрица $\begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix}$ определяет некоторое невырожденное преобразование базиса в пространстве $U_1 \oplus U_2$. Матрица Грама нового базиса, как известно, равна

$$\begin{pmatrix} T_1' & O \\ O & T_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & O \\ O & T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & T_1'\Gamma_1 T_2 \\ T_2'\Gamma_2 T_1 & O \end{pmatrix}.$$

Выбрав $T_2 = \Gamma_1^{-1} T_1'^{-1}$, имеем

$$\begin{pmatrix} O & T_1'\Gamma_1 T_2 \\ T_2'\Gamma_2 T_1 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ T_1^{-1}\Gamma_1'^{-1}\Gamma_2 T_1 & O \end{pmatrix}$$

Отсюда для ортогональной метрики получаем

$$\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}, \text{ так как } \Gamma_2 = \Gamma_1',$$

для симплектической —

$$\begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}, \text{ так как } \Gamma_2 = -\Gamma_1'.$$

Вернемся к преобразованию A. Оно является изометрией, поэтому $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всех $x, y \in U_1 \oplus U_2$, что в матричной форме примет вид

$$\begin{pmatrix} A_1' & O \\ O & A_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & E \\ \pm E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ \pm E & O \end{pmatrix},$$

где $+E$ — для ортогональной метрики, $-E$ — для симплектической. После перемножения матриц получим: $A_1' A_2 = E$, и $A_2 = A_1'^{-1}$.

Таким образом, любое преобразование базиса в пространстве $U_1 \oplus U_2$ с матрицей $\begin{pmatrix} T & O \\ O & T'^{-1} \end{pmatrix}$ не меняет метрическую форму. Однако оно меняет матрицу преобразования A следующим образом:

$$\begin{pmatrix} T^{-1} & O \\ O & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & O \\ O & T'^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{-1}A_1T & O \\ O & (T^{-1}A_1T)'^{-1} \end{pmatrix}.$$

Но матрица T может быть любой невырожденной матрицей, поэтому матрицу A_1 можно привести при помощи матрицы T к любой канонической форме над полем K, например к естественной нормальной форме (форме Фробениуса) [1].

Итак, доказана

Теорема 5. *Пусть V — невырожденное билинейно-метрическое пространство с ортогональной или симплектической метрикой над произвольным полем K характеристики $\neq 2$, A — изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом $f(\lambda) = q_1^{m_1}(\lambda) \cdot \ldots \cdot q_l^{m_l}(\lambda) \cdot (\lambda \pm 1)^{2k_1+\nu} \cdot \ldots \cdot (\lambda \pm 1)^{2k_s+\nu}$, где $q_i^{m_i}(\lambda)$ — произвольные несамообратные неприводимые полиномы, $\nu = 1$ при симплектической метрике, $\nu = 0$ — при ортогональной; тогда в пространстве V найдется такой базис, что его матрица Грама будет равна:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & \\ & \Gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_{\frac{l+s}{2}} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} O & E \\ \pm E & O \end{pmatrix};$$

$+E$ — *при ортогональной метрике,* $-E$ — *при симплектической, а матрица преобразования* A *примет вид*

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{\frac{l+s}{2}} \end{pmatrix},$$

где матрицам B_i *соответствуют характеристические полиномы* $f_i(\lambda) = f_{i1}(\lambda)\cdot f_{i1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ *вида* $q_i^{m_i}(\lambda)\cdot q_i^{m_i}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ *или* $(\lambda\pm 1)^{2k_i+\nu}\cdot(\lambda\pm 1)^{2k_i+\nu}$, *и*

$$B_i = \begin{pmatrix} A_i & O \\ O & A_i'^{-1} \end{pmatrix},$$

причем

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & -\alpha_r \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & 0 & -\alpha_2 \\ & & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

если $f_{i1}(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r-1} + \ldots + \alpha_r$.

Примечание. Для матриц A_i, если $f_{i1}(\lambda) = (\lambda\pm 1)^{2k_i+\nu}$, можно предложить еще одну каноническую форму:

$$A_i = \begin{pmatrix} \mp 1 & & & \\ 1 & \mp 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М., 1956.
2. E. Artin, Geometric algebra, Intersience Publishers Inc., New York, 1957.
3. Ф. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.
4. А. З. Петров, Пространства Эйнштейна, Физматгиз, М., 1961.
5. И. М. Яглом, Квадратические и кососимметрические билинейные формы в вещественных симплектических пространствах, Тр. сем. по век. и тенз. анализу, т. 8, Гостехиздат, М., 1950.
6. Ю. Б. Ермолаев, Одновременное приведение пары билинейных форм к каноническому виду, ДАН СССР, т. 132, № 2, 1960.
7. Ю. Б. Ермолаев, Одновременное приведение пары билинейных форм к каноническому виду над произвольным совершенным полем характеристики≠2, Итог. науч. конф. Казанск. гос. ун-та за 1962 г., Изд-во Казанск. гос. ун-та, Казань, 1963, 25—27.
8. L. E. Dickson, Equivalence of Paires of Bilinear or Quadratic Forms in the Rational Transformations, Trans. Amer. Math. Soc., **10**, № 3.

Поступила 1.III 1965 г.
Киев