Применение принципа мажорант к одному классу итерационных процессов

В. С. Гребенюк

Пусть требуется решить нелинейное функциональное уравнение

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $P(x)$—нелинейная операция из X в Y, X и Y—полные линейные пространства, нормированные посредством полуупорядоченных пространств Z и W [1].

Будем решать уравнение (1), исходя из некоторого x_0, методом последовательных приближений:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta_k x_{n+1} \quad k = 1, 2, \ldots, m+1, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где

$$\Delta_1 x_{n+1} = -\Gamma_n P(x_n),$$

$$\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1},$$

$$\Delta_k x_{n+1} = -\left[I + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \ldots \Delta_{k-1} x_{n+1}\right]^{-1} \Gamma_n P(x_n), \tag{3}$$

$$k = 2, 3, \ldots, m+1, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Процесс (2) для уравнения (1) является итерационным процессом m-го порядка]2]. Процесс, аналогичный (2), рассмотрим и для уравнения

$$Q(z) = 0, \tag{4}$$

где $Q(z)$— операция из Z в W.

Теорема 1. *Если в уравнениях (1) и (4) $P(x)$ и $Q(z)$—аналитические операторы и выполнены условия.*

1) существуют операторы $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и $T_0 = [Q'(z_0)]^{-1}$, причем оператор T_0 непрерывен и $\|\Gamma_0\| \leqslant -T_0$;

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant -T_0 Q(z_0)$;

3) $\|P^{(k)}(x)\| \leqslant Q^{(k)}(z)$ *при* $\|x - x_0\| \leqslant z - z_0 \leqslant z' - z_0$, $k = 2, 3, \ldots, m+1$;

4) $-\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} T(z) Q^{(j)}(z) \Delta_{k-j+1} z \ldots \Delta_{k-1} z < 1, \quad k = 2, 3, \ldots, m+1,$

то из осуществимости и сходимости рассматриваемого процесса для уравнения (4) (к его корню $z^* \in (z_0, z')$) следует осуществимость и сходимость *процесса* (2) *для уравнения* (1); *процесс* (2) *при этом сходится к* x^*—*корню уравнения* (1), *причем* $\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n$.

Для доказательства теоремы прежде всего покажем, что

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant z_1 - z_0. \tag{5}$$

Так как

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta_k x_1, \\ z_1 &= z_0 + \Delta_k z_1, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \ldots, m+1,$$

то для выполнения (5) достаточно выполнение неравенства

$$\|\Delta_k x_1\| \leqslant \Delta_k z_1, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{6}$$

Доказательство неравенства (6) проведем методом математической индукции по k. В силу (3) и 3-го условия теоремы имеем:

$$\|\Delta_1 x_1\| = \|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant -T_0 Q(z_0) = \Delta_1 z_1, \tag{7}$$

т. е. условие (6) при $k = 1$ выполняется.

Пусть $\|\Delta_{k-1}x_1\| \leqslant \Delta_{k-1}z_1$. Покажем, что $\|\Delta_k x_1\| \leqslant \Delta_k z_1$. В самом деле,

$$\|\Delta_k x_1\| = \Big\| \Big[I + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!}\Gamma_0 P^{(j)}(x_0)\,\Delta_{k-j+1}x_1 \ldots \Delta_{k-1}x_1\Big]^{-1}\Gamma_0 P(x_0)\Big\| \leqslant$$
$$k = 2,3\ldots, m+1$$

$$\leqslant - \frac{T_0 Q(z_0)}{1 + \sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} T_0 Q^{(j)}(z_0)\,\Delta_{k-j+1}z_1 \ldots \Delta_{k-1}x_1} = \Delta_k z_1.$$
$$k=2,3,\ldots, m+1.$$

Таким образом, оценка (6), а значит и (5), доказаны.

Покажем, что существует оператор Γ_1. Можно написать [5]:

$$\Gamma_1 = \{I - \Gamma_0\,[P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}\Gamma_0 = D_0^{-1}\Gamma_0;$$

так как [3]

$$P'(x_1) = P'(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} P^{(i+1)}(x_0)(x_1 - x_0)^i,$$

то

$$\|\Gamma_0\,[P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\|\Gamma_0 P^{(i+1)}(x_0)\|\,\|x_1 - x_0\|^i \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} T_0 Q^{(i+1)}(z_0)(z_1 - z_0)^i = T_0\,[Q'(z_0) - Q'(z_1)] =$$

$$= 1 - \frac{Q'(z_1)}{Q'(z_0)} = q.$$

Используя условие 3) теоремы, нетрудно получить, что $0 < q < 1$. Вследствие того, что $\|\Gamma_0\,[P'(x_0) - P'(x_1)]\| \leqslant q < 1$, существует оператор D_0^{-1} и $\|D_0^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q} = \frac{Q'(z_0)}{Q'(z_1)}$. Поэтому оператор Γ_1 существует и

$$\|\Gamma_1\| \leqslant -\frac{Q'(z_0)}{Q'(z_1)}T_0 = -\frac{1}{Q'(z_1)} = -T_1.$$

Оценим $\| \Gamma_1 P(x_1) \|$:

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \| D_0^{-1} \Gamma_0 P(x_1) \| .$$

На основании обобщения формулы Тейлора [3] и (5) находим, что

$$\| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant \frac{1}{2} \| \Gamma_0 P''(x_0) \| \| x_1 - x_0 \|^2 + \frac{1}{3!} \| \Gamma_0 P'''(x_0) \| \| x_1 - x_0 \|^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{i} \int_{x_0}^{x_1} \| \Gamma_0 P^{(i+1)}(x) (x_1 - x)^i \| \, dx \leqslant - \frac{1}{2} T_0 Q''(z_0) (z_1 - z_0)^2 -$$

$$- \frac{1}{3!} T_0 Q'''(z_0) (z_1 - z_0)^3 - \ldots - \frac{1}{i} \int_{z_0}^{z_1} T_0 Q^{(i+1)}(z) (z_1 - z)^i dz = - T_0 Q(z_1). \qquad (8)$$

В силу (8) имеем:

$$\| \Gamma_1 P(x_1) \| \leqslant \| D_0^{-1} \| \| \Gamma_0 P(x_1) \| \leqslant - \frac{Q'(z_0)}{Q'(z_1)} T_0 Q(z_1) = - T_1 Q(z_1).$$

Значит, если заменить в условиях теоремы точки x_0 и z_0 на x_1 и z_1, то эти условия будут выполнены, а поэтому процесс может быть продолжен. Таким образом, осуществимость процесса (2) для уравнения (1) показана и можно утверждать, что:

1) существует $\Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$ и $T_n = [Q'(z_n)]^{-1}$, $\| \Gamma_n \| \leqslant - T_n$;

2) $\| \Gamma_n P(x_n) \| \leqslant - T_n Q(z_n)$;

3) $\| P^{(k)}(x) \| \leqslant Q^{(k)}(z)$ при $\| x - x_0 \| \leqslant z - z_0 \leqslant z' - z_0$, $k = 2, 3, \ldots, m+1$;

4) $- \sum\limits_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} T(z) Q^{(j)}(z) \Delta_{k-j+1} z \ldots \Delta_{k-1} z < 1$, $k = 2, 3, \ldots, m+1$.

Очевидно,

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \| x_{n+1} - x_n \| + \| x_{n+2} - x_{n+1} \| + \ldots + \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant z_{n+1} - z_n + z_{n+2} - z_{n+1} + \ldots + z_{n+p} - z_{n+p-1} = z_{n+p} - z_n. \qquad (9)$$

Так как процесс для уравнения (4) сходится, то $z_{n+p} - z_n \to 0$ при $n, p \to \infty$, поэтому $\| x_{n+p} - x_n \| \to 0$ при $n, p \to \infty$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. В силу полноты пространства X последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому $x^* \in X$.

Пусть в (9) $p \to \infty$, тогда

$$\| x^* - x_n \| \leqslant z^* - z_n.$$

Покажем, что

$$P(x^*) = 0. \qquad (10)$$

Из (2) имеем:

$$x_{n+1} - x_n = - \left[I + \sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j!} \Gamma_n P^{(j)}(x_n) \, \Delta_{k-j+1} x_{n+1} \ldots \Delta_{k-1} x_{n+1} \right]^{-1} \Gamma_n P(x_n);$$

$$k = 2, 3, \ldots, m+1.$$

Отсюда получаем:

$$-P(x_n) = P'(x_n)\left[I + \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_n P^{(j)}(x_n)\,\Delta_{k-j+1}x_{n+1}\ldots\Delta_{k-1}x_{n+1}\right](x_{n+1}-x_n) =$$

$$=\Theta_n(x_{n+1}-x_n).$$

В силу

$$\|P'(x_n)\| = \|P'(x_n) - P'(x_0) + P'(x_0)\| \leqslant \|P'(x_n) - P'(x_0)\| + \|P'(x_0)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x_n}\|P''(x)\|\,dx + \int_{x_0}^{x^*}\|P''(x)\|\,dx \leqslant \int_{z_0}^{z_n} Q''(z)\,dz + \int_{z_0}^{z^*} Q''(z)\,dz$$

и условия 4) теоремы заключаем, что $\|\Theta_n\|$ ограничена. Исходя из ограниченности нормы оператора Θ_n и из того, что $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, получаем, что $P(x_n)\to 0$. И так как $x_n\to x^*$, то в силу непрерывности оператора $P(x)$ имеем (10).

Если последовательные приближения определяются формулой

$$x_{n+1} = x_n - \left[I + \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\Gamma_0 P^{(j)}(x_n)\,\Delta_{k-j+1}x_{n+1}\ldots\Delta_{k-1}x_{n+1}\right]^{-1}\Gamma_0 P(x_n),$$

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m+1, \tag{11}$$

то процесс называется модифицированным. Имеет место

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *из сходимости модифицированного процесса для уравнения* (4) *вытекает существование решения и сходимость процесса для уравнения* (1).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 и поэтому не приводится.

Следствие. Если X и Y — *нормированные пространства в обычном смысле* [3] *и*

1. $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leqslant \eta$,
2. $\|\Gamma_0\| \leqslant B$,
3. $\|P^{(k)}(x)\| \leqslant M_k,\ k = 2, 3, \ldots, m+1$,
4. $\displaystyle\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}BM_j\Delta_{k-j+1}z\ldots\Delta_{k-1}z < 1, \quad k = 2, 3, \ldots, m+1$

в области, содержащей $x_0,\ x_1,\ \ldots$ (*в качестве такой области можно взять область, определяемую неравенством* $\|x - x_0\| \leqslant 2\eta$), *и выполняется условие*

$$2B\sum_{k=2}^{m+1}\frac{M_k(2\eta)^{k-1}}{k!} \leqslant 1, \tag{12}$$

то существует решение x^* *уравнения* (1), *процессы* (2) *и* (11) *сходятся и быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant z^* - z_n.$$

Условие (12) *для уравнения*

$$Q(z) \equiv \frac{\eta}{B} - \frac{z}{B} + \sum_{k=2}^{m+1} \frac{M_k z^k}{k!} = 0$$

является достаточным для существования положительного корня (z^* — *наименьший положительный корень).*

Действительно, $Q(o) = \frac{\eta}{B} > 0$, а

$$Q(2\eta) = \frac{\eta}{B} - \frac{2\eta}{B} + \frac{\eta}{B} 2B \sum_{k=2}^{m+1} \frac{M_k (2\eta)^{k-1}}{k!} \leqslant \frac{\eta}{B} - \frac{2\eta}{B} + \frac{\eta}{B} = 0.$$

Следовательно, существует точка t $(0 < t < 2\eta)$, в которой $Q(t) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950.
2. И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. 2, Физматгиз, М., 1960.
3. Л. В. Канторович, УМН, вып. 6, 1948.
4. В. Е. Мираков, ДАН СССР, т. 113, № 5, 1957.
5. Ю. А. Каазик, Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, вып. 62, 1958.

Поступила 24.I 1964 г.
Днепропетровск