К теории бесконечных систем уравнений

А. Г. Дорфман

Для ряда математических теорий и их приложений (для теории дифференциальных уравнений в частности) представляют интерес бесконечные системы уравнений вида

$$F_m(f,\ z) = 0, \quad m = n,\ n+1, \dots, \tag{1}$$

где F_m—операторы над последовательностями функций

$$f = \{f^{(n)},\ f^{(n+1)}, \dots\}, \quad z = \{z^{(n)},\ z^{(n+1)}, \dots\},$$

зависящих от аргументов u, v, . . . Последовательность f считается известной, последовательность z — искомой.

Рассмотрим здесь бесконечную рекуррентную систему (имеющую ближайшее отношение к теории деформаций поверхностей):

$$-H\,(f^{(n)},\ z^{(m)}) = H\,(f^{(n+1)},\ z^{(m-1)}) + \dots \tag{2}$$

Оператор H имеет следующий смысл:

$$H\,(\varphi,\ \psi) = \varphi_{uu}\psi_{vv} - 2\varphi_{uv}\psi_{uv} + \varphi_{vv}\psi_{uu}$$

(индексами обозначается дифференцирование по соответствующим аргументам). Многоточие в правой части (2) обозначает слагаемые, в которые функции $z^{(i)}$, $i \geqslant m-1$, не входят. Система удовлетворяется при $z = f$.

Докажем следующее предложение.

Пусть дана последовательность форм

$$f = \{f^{(3)}(u, v),\ f^{(4)}(u, v),\ f^{(5)}(u, v),\ \ldots,\ f^{(m)}(u, v),\ \ldots\},$$

где $f^{(3)} = 3u^2v + 3uv^2$, $f^{(4)} = 6u^2v^2$, *а* $f^{(m)}(u, v)$, $m \geqslant 5$,*—совершенно произвольные фиксированные формы.*

Тогда существует непрерывное семейство последовательностей форм

$$z = \{f^{(3)}(u, v),\ f^{(4)}(u, v),\ z^{(5)}(u, v, t),\ \ldots,\ z^{(m)}(u, v, t),\ \ldots\},$$

где

$$z^{(m)} = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} a_{(l)}^{(m)} u^{(m-l)} v^l,$$

удовлетворяющее бесконечной системе (2) *и включающее исходную последовательность* f *при* $t = 0$*.

Доказательство. Составим следующие выражения:

$$H(f^{(3)}, z^{(m)}) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k^{3,m} u^{m-1-k} v^k, \tag{3}$$

где

$$h_k^{3,m} = 6m(m-1)(p_k a_k^{(m)} + q_k a_{k+1}^{(m)}),$$

$$p_k = \binom{m-2}{k} - 2\binom{m-2}{k-1},\quad q_k = \binom{m-2}{k-1} - 2\binom{m-2}{k};$$

$$H(f^{(4)}, z^{(m)}) = \sum_{k=0}^{m} h_k^{4,m} u^{m-1-k} v^k, \tag{4}$$

где

$$h_k^{4,m} = 12m(m-1)\mu_k a_k^{(m)},$$

$$\mu_k = \binom{m-2}{k} - 4\binom{m-2}{k-1} + \binom{m-2}{k-2}.$$

Принимая во внимание эти выражения, сведем систему (2) к следующей последовательности систем уравнений относительно коэффициентов $a^{(m)}$ форм $z^{(m)}$:

$$-h_k^{3,m} = h_k^{4,m-1} + \ldots \tag{5}$$

или

$$\frac{m}{2}\binom{m-1}{k}(p_k a_k^{(m)} - q_k a_{k+1}^{(m)}) = (m-1)(m-2)\mu_k a_k^{(m-1)} + \ldots,$$

где

$$p_k = -(m-1) + 3k,\quad q_k = 3(m-1) - 3k,\quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Каждая система последовательности (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов формы $z^{(m)}$ с матрицей системы $A_m^{(3)}$:

$$A_m^{(3)} = \begin{bmatrix} p_0 q_0 & & & \\ & p_1 q_1 & & 0 \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & p_{m-1} q_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Выясним, каков ранг этой матрицы при различных значениях $m \geqslant 5$.

Пусть m—число вида $3n + 1$. Тогда в каждой диагонали один (и только один) из элементов p_k и q_k обращается в нуль: в первой—при $k = n$,

---

* Как следует из работ [1—4], подобное решение системы (2) при $n \geqslant 5$ является редким исключением.

во второй—при $k = 2n$, т.е. $p_n = 0$ и $q_{2n} = 0$. Следовательно, матрица принимает такой вид:

$$A^{(3)}_{3n+1} = \begin{bmatrix} p_0q_0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & p_{n-1}q_{n-1} & & & & & & \\ & & 0 & q_n & & & & & \\ & & & p_{n+1}q_{n+1} & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & 0 & p_{2n-1}q_{2n-1} & & & \\ & & & & & p_{2n} & 0 & & \\ & & & & & & p_{2n+1}q_{2n+1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & p_{3n}q_{3n} \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы $A^{(3)}_{3n+1}$ равен $3n$, т. е. на единицу меньше числа строк.

Действительно, строки этой матрицы удовлетворяют линейной зависимости с коэффициентами

$$\lambda_0 = 0, \ldots, \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = A_n, \ldots, \lambda_{2n} = A_{2n}, \lambda_{2n+1} = 0, \ldots, \lambda_{3n} = 0,$$

где A_i, $n \leqslant i \leqslant 2n$, суть адъюнкты матрицы, состоящей из центральных элементов (она выделена пунктиром). Следовательно, ранг $A^{(3)}_{3n+1} \leqslant 3n$. С другой стороны, ранг $A^{(3)}_{3n+1}$, очевидно, не меньше $3n$. Таким образом, ранг $A^{(3)}_{3n+1} = 3n$.

Если $m \neq 3n + 1$, то, как легко видеть, ни один из диагональных элементов p_k и q_k матрицы $A^{(3)}_m$ не обращается в нуль, следовательно, ранг матрицы $A^{(3)}_m$, где $m \neq 3n + 1$, максимально возможный (т. е. равен числу строк).

Таким образом, при каждом $m \neq 3n + 1$ соответствующая система последовательности уравнений (5) разрешима относительно коэффициентов формы $z^{(m)}$, $m \neq 3n + 1$. При каждом $m = 3n + 1$ левые части соответствующей системы (5) удовлетворяют линейной зависимости с коэффициентами λ_k. Поэтому при $m = 3n + 1$ система (5) разрешима в том и только в том случае, если правые части ее удовлетворяют линейной зависимости с теми же коэффициентами λ_k, т. е. при условии

$$\sum_{k=0}^{3n} \lambda_k (\mu_k a_k^{(3n)} + \ldots) = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{3n} \lambda_k \mu_k a_k^{(3n)} = \Lambda, \tag{6}$$

где через Λ обозначены члены, содержащие коэффициенты только таких форм $z^{(i)}$, степени которых ниже, чем $3n$.

Условию (6), оказывается можно удовлетворить. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим рекуррентную систему уравнений относительно коэффициентов $a_k^{(3n)}$ и $a_k^{(3n+1)}$ форм $z^{(3n)}$ и $z^{(3n+1)}$:

$$\begin{aligned} -h_k^{3,3n} &= h_k^{4,3n-1} + \ldots \quad (k = 0, 1, \ldots, 3n-1), \\ -h_k^{3,3n+1} &= h_k^{4,3n} + \ldots \quad (k = 0, 1, \ldots, 3n). \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, условие (6) будет выполнено, если совместна следующая система уравнений, относительно $a_k^{(3n)}$:

$$-h_k^{3,3n} = h_k^{4,3n-1} + \ldots \quad (k = 0, 1, \ldots, 3n-1),$$

$$\sum_{k=0}^{3n} \lambda_k \mu_k a_k^{(3n)} = \Lambda \tag{8}$$

с определителем Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_0 q_0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & p_{n-1}q_{n-1} & & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} p_n q_n & & \\ & \ddots & \\ & & p_{2n-1}q_{2n-1} \end{matrix}} & & & & & \\ & & & & p_{2n}q_{2n} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & p_{3n-1}q_{3n-1} & & \\ 0 \ldots & 0 & \lambda_n \mu_n & \ldots & \lambda_{2n}\mu_{2n} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$p_k = 2\binom{3n-2}{k-1} - \binom{3n-2}{k}, \quad q_k = 2\binom{3n-2}{k} - \binom{3n-2}{k-1},$$
$$k = 0, 1, \ldots, 3n-1.$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$, следовательно, система (8) совместна.

Допустим, что строки определителя Δ линейно зависимы. Тогда, очевидно, будут линейно зависимы строки минора

$$M = \begin{vmatrix} p_n q_n & & \\ & \ddots & \\ & & p_{2n-1}q_{2n-1} \\ \lambda_n \mu_n & \ldots & \lambda_{2n}\mu_{2n} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, определитель $\Delta \neq 0$, если только минор M отличен от нуля.

Рассмотрим этот минор.

1. Элементы p_k и q_k при $k = n, \ldots, 2n-1$ положительны. Действительно, $p_k = 3k - 3n + 1$. Отсюда, при $k \geqslant n$, следует: $p_k > 0$. Далее, $q_k = 6n - 3k - 2$. Следовательно, при $k \leqslant 2n - 1$ $q_k > 0$.

Вместе с тем усматривается, что адъюнкты элементов последней строки минора M имеют *чередующиеся* знаки (адъюнкты элементов, занимающих нечетные места, и адъюнкты элементов, занимающих четные места, имеют противоположные знаки).

2. Аналогичным образом (как и в п. 1), рассматривая матрицу $A_{3n+1}^{(3)}$, можно установить, что знаки $\lambda_n = A_n, \ldots, \lambda_{2n} = A_{2n}$ *чередуются*.

3. Наконец, исследуем знаки $\mu_n, \ldots, \mu_{2n}$:

$$\mu_k = \binom{3n-2}{k} - 4\binom{3n-2}{k-1} + \binom{3n-2}{k-2}, \quad n \leqslant k \leqslant 2n,$$

или

$$\mu_k = \binom{3n-2}{k-2} \frac{1}{(k-1)k} (3n^2 - n - 6nk - 2k^2), \quad n \leqslant k \leqslant 2n.$$

Рассмотрим на сегменте $n \leqslant x \leqslant 2n$ функцию

$$\mu(x) = 3n^2 - n - 6nx + 2x^2.$$

Очевидно,

$$\mu(n) = \mu(2n) = -n^2 - n < 0,$$

при этом

$$\mu'\left(\frac{3}{2}n\right) = 0, \quad \mu\left(\frac{3}{2}n\right) = -\frac{3n^2 - n}{2} < 0.$$

Таким образом, на всем сегменте $n \leqslant x \leqslant 2n$ функция $\mu(x)$ отрицательна, и, вместе с тем, $\mu_n, \ldots, \mu_{2n}$ имеют один и тот же знак.

Из 1, 2 и 3 ясно, что минор M действительно отличен от нуля.

Следовательно, система (8) и, значит, система (7) разрешимы (для каждого значения n).

Очевидно, первому уравнению рекуррентной системы (2) удовлетворяет однопараметрическое семейство форм $z^{(5)}(u, v, t)$, причем $z^{(5)}(u, v, 0) \equiv f^{(5)}(u, v)$. Вследствие рекуррентной разрешимости рассматриваемой системы можно найти формы $z^{(m)}(u, v, t)$, где $m \geqslant 6$, такие, что $z^{(m)}(u, v, 0) \equiv f^{(m)}(u, v)$. Тем самым предложение статьи доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов, Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом», Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, вып. 30, 1949.
2. В. А. Тартаковский, Об N-инвариантах Н. В. Ефимова из теории изгибания поверхностей, Матем. сб., т. 32 (74), № 1, 1953.
3. А. Г. Дорфман, Исследование возможностей варьирования решений некоторых классов дифференциальных уравнений, Успехи матем. наук, т. IX, вып. 4 (62), 1954.
4. А. Г. Дорфман, Решение уравнения изгибаний для некоторых классов поверхностей, Успехи матем. наук, т. XII, вып. 2 (74), 1957.

Поступила 12.VII 1965 г.

Днепропетровск