О нахождении областей устойчивости и неустойчивости одного дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами

Г. А. Лось

В настоящей статье рассматриваются вопросы устойчивости и неустойчивости решений дифференциального уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами Рассматривается также частный случай такого уравнения, для которого получены условия, позволяющие определить области устойчивости во втором приближении в плоскости двух параметров, от которых зависят коэффициенты уравнения. Изложенная теория иллюстрируется на примере. Впервые такая задача была поставлена и решена А. М. Ляпуновым [1] для уравнения второго порядка.

Обобщениям этих исследований А. М. Ляпунова посвящены работы М. Г. Крейна [2], И. М. Рапопорта [3, 4], В. М. Старжинского [5].

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка с периодическими периода ω коэффициентами:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + S(t)\frac{dx}{dt} + T(t)\,x = 0 \tag{1}$$

и его фундаментальную систему решений $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$x_j^{(i-1)}(0)=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j\end{cases}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Характеристическое уравнение для (1) можно записать в виде

$$\lambda^3-3A_1\lambda^2+A_2\lambda-e^{-\omega}=0, \tag{3}$$

где

$$A_1=\frac{1}{3}[x_1(\omega)+x_2'(\omega)+x_3''(\omega)], \tag{4}$$

$$A_2=x_1(\omega)\cdot x_2'(\omega)+x_1(\omega)\times\times x_3''(\omega)+x_2'(\omega)\cdot x_3''(\omega)-\\ -x_3'(\omega)\cdot x_2''(\omega)-x_1'(\omega)\cdot x_2(\omega)-\\ -x_3(\omega)\cdot x_1''(\omega). \tag{5}$$

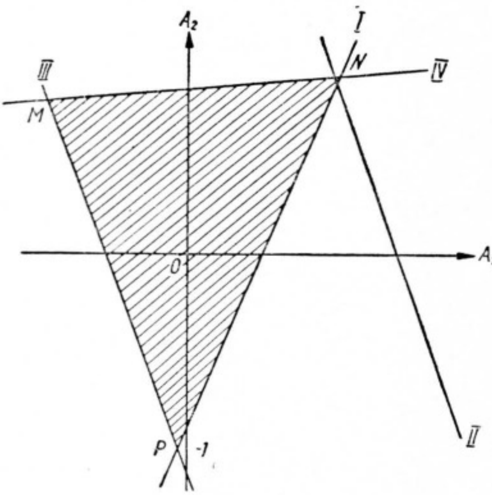

Рис. 1.

Тривиальное решение уравнения (1) устойчиво, если

$$1-3A_1+A_2-e^{-\omega}\geqslant 0,$$
$$1+3A_1+A_2+e^{-\omega}\geqslant 0, \tag{6}$$
$$1-A_2+3A_1\cdot e^{-\omega}-e^{-2\omega}\geqslant 0.$$

Это следует из условий Гурвица отрицательности действительных частей корней уравнения, получаемого из уравнения (3) после выполнения в нем подстановки $\lambda=\dfrac{\varrho+1}{1-\varrho}$.

Системе неравенств (6) соответствует в плоскости OA_1A_2 внутренняя область треугольника MNP (рис. 1), представляющая собой область асимптотической устойчивости решения данного уравнения.

На границах контура MNP, за исключением вершин N и M, движение устойчиво.

Вершинам N и M треугольника MNP соответствуют двукратные корни. Поэтому, чтобы сделать вывод об устойчивости, нужно установить, сколько групп решений соответствует каждому из двукратных корней.

Для установления условий устойчивости уравнения третьего порядка рассмотрим частный случай уравнения (1), а именно:

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha^2(1+\mu Q)\frac{dx}{dt}+\alpha^2(1+\mu R)\,x=0, \tag{7}$$

где Q и R — непрерывные, периодические периода ω функции. Согласно теореме Ляпунова коэффициенты характеристического уравнения для данного дифференциального уравнения являются аналитическими функциями параметров α и μ при всех значениях $\mu\leqslant a$, где a — некоторая постоянная.

Будем искать фундаментальную систему решений в виде ряда по степеням μ:

$$x_j=\sum_{i=0}^{\infty}x_{ij}\mu^i\quad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7) и приравнивая члены при одинаковых степенях μ, получаем:

$$\frac{d^3x_{j0}}{dt^3}+\frac{d^2x_{j0}}{dt^2}+\alpha^2\frac{dx_{j0}}{dt}+\alpha^2x_{j0}=0,$$

. . . .

$$\frac{d^3x_{jn}}{dt^3}+\frac{d^2x_{jn}}{dt^2}+\alpha^2\frac{dx_{jn}}{dt}+\alpha^2x_{jn}=-\alpha^2Q\frac{dx_{j,n-1}}{dt}-\alpha^2Rx_{j,n-1}, \tag{9}$$

. . . .

$$(j=1,2,3;\ n=1,2,3,\ldots,).$$

Во всех этих уравнениях одинаковая левая часть с постоянными коэффициентами. Поэтому все приближения, начиная с первого (при $n=0$), последовательно находятся в квадратурах. Из уравнений (9), учитывая начальные условия (2), имеем:

$$x_{10}=\frac{1}{1+\alpha^2}(\alpha^2e^{-t}+\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t),$$

$$x_{20}=\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t, \tag{10}$$

$$x_{30}=\frac{1}{1+\alpha^2}\left(e^{-t}-\cos\alpha t+\frac{1}{\alpha}\sin\alpha t\right);$$

. . . .

$$x_{jn}(t)=e^{-t}\int\limits_0^t\frac{e^tf_{jn}(t)}{\alpha^2+1}dt-\cos\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\alpha\cos\alpha t+\sin\alpha t)\,dt+$$

$$+\sin\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\cos\alpha t-\alpha\sin\alpha t)\,dt, \tag{11}$$

$$x'_{jn}(t)=-e^{-t}\int\limits_0^t\frac{e^tf_{jn}(t)}{\alpha^2+1}dt+\alpha\sin\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\alpha\cos\alpha t+\sin\alpha t)\,dt+$$

$$+\alpha\cos\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\cos\alpha t-\alpha\sin\alpha t)\,dt, \tag{12}$$

$$x''_{jn}(t)=e^{-t}\int\limits_0^t\frac{e^t\cdot f_{jn}(t)}{\alpha^2+1}dt+\alpha^2\cos\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\alpha\cos\alpha t+\sin\alpha t)\,dt-$$

$$-\alpha^2\sin\alpha t\int\limits_0^t\frac{f_{jn}(t)}{\alpha^3+\alpha}(\cos\alpha t-\alpha\sin\alpha t)\,dt. \tag{13}$$

Здесь $f_{jn}(t)$ — правая часть уравнений (9) для $n=1,2,3,\ldots$ Равенства (4) и (5) дают возможность вычислить коэффициенты характеристического уравнения A_1 и A_2:

$$A_1=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}(x_{1i}+x'_{2i}+x''_{3i})\,\mu^i=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\infty}A_{1i}\mu^i, \tag{14}$$

$$A_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \sum_{i=0}^{n} (x_{1,i} \cdot x'_{2,n-i} + x_{1,i} \cdot x''_{3,n-i} + x'_{2i} \cdot x''_{3,n-i} -$$

$$- x'_{3i} \cdot x''_{2,n-i} - x_{2i} \cdot x'_{1,n-i} - x_{3i} \cdot x''_{1,n-i}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \cdot A_{2n}. \quad (15)$$

Из (11) — (15) можно определить A_{11} и A_{21}:

$$A_{11} = x_{11}(\omega) + x'_{21}(\omega) + x''_{31}(\omega) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[e^{-\omega} \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt + \cos d\omega \int_0^{\omega} (R - Q)\, dt - \frac{\sin \alpha\omega}{\alpha} \int_0^{\omega} (Q\alpha^2 + R)\, dt \right], \quad (16)$$

$$A_{21} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \left[\alpha \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt\, (e^{-\omega} \cdot \cos \alpha\omega - 1) - e^{-\omega} \sin \alpha\omega \int_0^{\omega} (\alpha^2 Q + R)\, dt \right]. \quad (17)$$

Запишем общие выражения во втором приближении для характеристических постоянных A_1 и A_2:

$$A_1 = A_{10} + A_{11} = \frac{1}{3} (e^{-\omega} + 2 \cos \alpha\omega) + \frac{1}{3} \mu \left[\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \cdot \left(e^{-\omega} \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos \alpha\omega \int_0^{\omega} (R - Q)\, dt - \sin \alpha\omega \int_0^{\omega} \frac{Q\alpha^2 + R}{\alpha}\, dt \right) \right], \quad (18)$$

$$A_2 = A_{20} + A_{21} = 2e^{-\omega} \cos \alpha\omega + 1 + \mu \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \left(\alpha \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times (e^{-\omega} \cos \alpha\omega - 1) - e^{-\omega} \sin \alpha\omega \int_0^{\omega} (\alpha^2 Q + R)\, dt \right. \right]. \quad (19)$$

Пользуясь системой неравенств (6), находим области устойчивости во втором приближении в плоскости параметров α, μ:

$$2 \cdot (1 - e^{-\omega})(1 - \cos \alpha\omega) - \frac{\mu\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[(1 + e^{-\omega})(1 - \cos \alpha\omega) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt - \frac{\sin \alpha\omega}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\omega}) \int_0^{\omega} (Q\alpha^2 + R)\, dt \right] \geqslant 0, \quad (20)$$

$$\mu \cdot \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt \geqslant 0, \quad (21)$$

$$2(1 + e^{-\omega})(1 + \cos \alpha\omega) - \frac{\mu\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[(1 - e^{-\omega})(1 + \cos \alpha\omega) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\omega} (Q - R)\, dt + \frac{\sin \alpha\omega}{\alpha} \cdot (1 + e^{-\omega}) \int_0^{\omega} (Q\alpha^2 + R)\, dt \right] \geqslant 0. \quad (22)$$

Если эти условия выполняются только со знаком неравенства, то получим область асимптотической устойчивости. Если хотя бы одно из неравенств выполняется со знаком равенства, то получим область устойчивости (во втором приближении). Условия (20) — (22) обоснованы при малом μ. При μ близком к 1 их следует понимать условно. Вблизи резонанса ($\left|\alpha-\frac{k\pi}{\omega}\right|$ мало, k — целое число) и при резонансе $\left(\alpha=\frac{k\pi}{\omega}\right)$ для решения задачи устойчивости необходимо учесть высшие приближения для инвариантов A_1 и A_2.

Проиллюстрируем изложенную теорию примером.

Пример. Для дифференциального уравнения

$$\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha^2(1+\mu\sin^2 2t)\frac{dx}{dt}+\alpha^2(1-\mu\cos^2 2t)\,x=0 \tag{23}$$

найти области устойчивости и неустойчивости (во втором приближении) в зависимости от параметров α и μ для $\mu>0$ и двух интервалов α:

$$3\leqslant\alpha\leqslant 5;\qquad 9\leqslant\alpha\leqslant 11.$$

Решение. Пользуясь условиями устойчивости (20) — (22), получаем:

$$\mu\int\limits_0^{\pi}(\sin^2 2t+\cos^2 2t)\,dt=\mu\pi>0, \tag{24}$$

$$2(1-e^{-\pi})(1-\cos\alpha\pi)-\frac{\mu\alpha^2\pi}{\alpha^2+1}\Big[(1+e^{-\pi})(1-\cos\alpha\pi)-$$

$$-\frac{\sin\alpha\pi}{2\alpha}\cdot(1-e^{-\pi})(\alpha^2-1)\Big]\geqslant 0, \tag{25}$$

$$2(1+e^{-\pi})(1+\cos\alpha\pi)-\frac{\mu\alpha^2\pi}{\alpha^2+1}\Big[(1-e^{-\pi})(1+\cos\alpha\pi)+$$

$$+\frac{\sin\alpha\pi}{2\alpha}(1+e^{-\pi})(\alpha^2-1)\Big]\geqslant 0. \tag{26}$$

Исследуем сначала неравенство (25). Для этого запишем следующую функцию:

$$\varphi(\alpha)=\frac{2(1-e^{-\pi})(1-\cos\alpha\pi)(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[(1+e^{-\pi})(1-\cos\alpha\pi)-\frac{\sin\alpha\pi}{2\alpha}(1-e^{-\pi})(\alpha^2-1)\right]}.$$

Функция $\varphi(\alpha)$ при $\alpha=2, 4, 6, \ldots$ не определена. Но так как

$$\lim_{\alpha\to 2k+0}\varphi(\alpha)=\lim_{\alpha\to 2k-0}\varphi(\alpha)=\lim_{\alpha\to 2k}\varphi(\alpha)\qquad(k=2, 4, 6, \ldots),$$

то разрыв функции устраним, и функция будет непрерывной, если ее доопределить так:

$$\varphi(\alpha)=0\ \text{при}\ \alpha=2, 4, 6, \ldots$$

В таком случае функция $\varphi(\alpha)$ примет вид:

$$\varphi(\alpha)=\frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}-\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}. \tag{27}$$

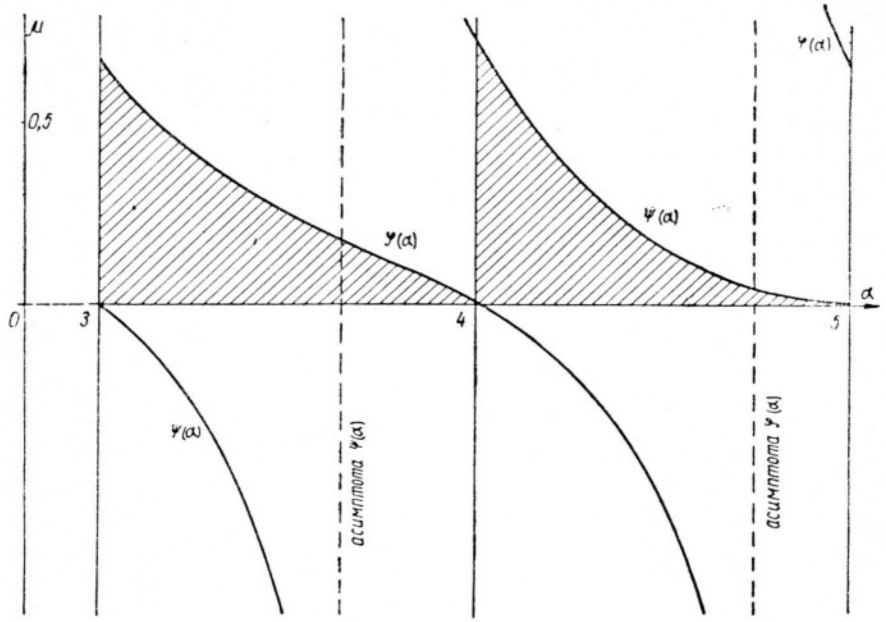

Рис. 2.

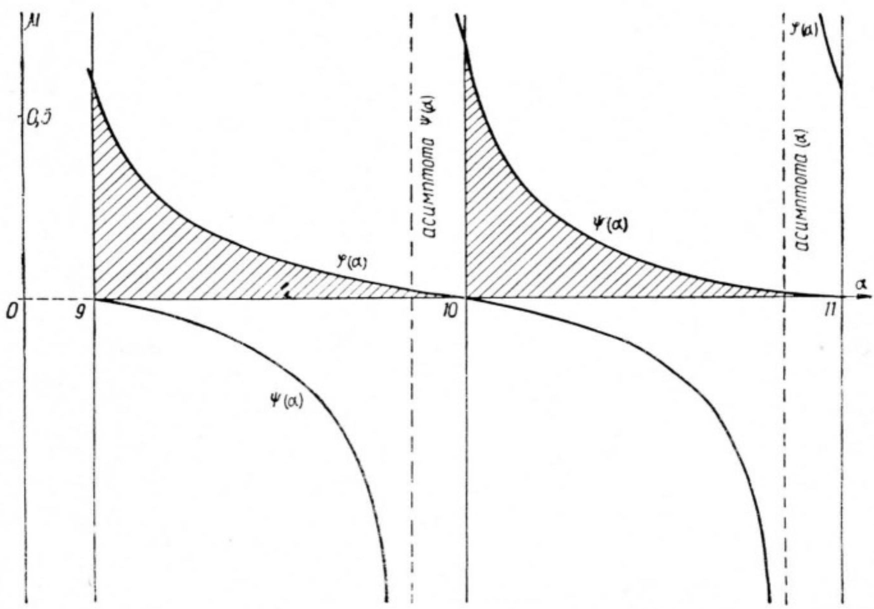

Рис. 3.

Аналогично функция

$$\psi(\alpha) = \frac{2(1+e^{-\pi})(1+\cos\alpha\pi)(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[(1-e^{-\pi})(1+\cos\alpha\pi)+\dfrac{\sin\alpha\pi}{2\alpha}(1+e^{-\pi})(\alpha^2-1)\right]}$$

может быть также доопределена в точках $1, 3, 5, \ldots$, если принять ее равной нулю в этих точках. Тогда

$$\psi(\alpha) = \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} + \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}. \tag{28}$$

Так как функция (28) непрерывна, за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль, то из неравенства (26) получаем:

$$\mu < \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}, \tag{29}$$

если знаменатель — величина положительная;

$$\mu > \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} - \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}, \tag{30}$$

если знаменатель — величина отрицательная.

Пользуясь функцией (27) и неравенствами (29) и (30), можно построить те области плоскости μ, α, которые удовлетворяют неравенству (25).

Аналогично, так как функция (28) непрерывна, за исключением тех точек, где знаменатель обращается в нуль, из неравенства (26) получаем:

$$\mu < \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} + \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}, \tag{31}$$

если знаменатель — величина положительная;

$$\mu > \frac{2(\alpha^2+1)}{\alpha^2\pi\left[\frac{1-e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}} + \frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{2}\right]}, \tag{32}$$

если знаменатель — величина отрицательная.

Далее можно построить график функции (28), а потом, пользуясь неравенствами (31) и (32), найти те области плоскости, которые удовлетворяют неравенству (25).

Если построение графиков функций $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ выполнить на одном чертеже, то можно выделить области асимптотической устойчивости и неустойчивости решений дифференциального уравнения.

На рис. 2 и 3 показаны области асимптотической устойчивости для $3 \leqslant \alpha \leqslant 5$, $9 \leqslant \alpha \leqslant 11$ и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Эти области заштрихованы (при μ малом они обоснованы, а при μ близком к 1 их следует понимать условно).

Подобным образом можно найти области асимптотической устойчивости для любого интервала изменений α.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
2. М. Г. Крейн, Обобщение некоторых исследований Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXIII, № 1, 1950.
3. И. М. Рапопорт, О линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXVI, № 6, 1951.
4. И. М. Рапопорт, К вопросу об устойчивости колебаний материальной системы, ДАН СССР, т. LXXVII, № 1, 1951.
5. В. М. Старжинский, Об устойчивости периодических движений, Buletinul institutului politecnik, т. 4, 5, 1959.

Поступила 5.VI 1964 г.
Хмельницкий