Асимптотическое интегрирование квазилинейных автономных систем с запаздыванием

Д. И. Мартынюк, В. И. Фодчук

В работе [1]. Н. Н. Боголюбов предложил метод построения асимптотических решений квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы для случая, когда характеристическое уравнение порождающей системы имеет одну пару критических (чисто мнимых) корней. Н. Г. Булгаков [2] обобщил этот метод на случай произвольного числа критических корней. В данной заметке результаты работ [1, 2] обобщаются на квазилинейные автономные системы со многими степенями свободы и с запаздыванием по времени.

1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1(t) + \ldots + a_{sn}x_n(t) + b_{s1}x_1(t-\Delta) + \ldots + b_{sn}x_n(t-\Delta) +$$
$$+ \mu f_s(x_1(t),\ x_2(t), \ldots, x_n(t),\ x_1(t-\Delta), \ldots, x_n(t-\Delta), \mu) \tag{1}$$
$$(s = 1,\ 2, \ldots, n),$$

где a_{si}, $b_{si}(s, i=1, 2,\ldots, n)$—постоянные, μ—малый параметр, $f_s(s=1, 2,\ldots, n)$—аналитические функции переменных

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ x'_1, \ldots, x'_n, \quad \mu\ (x'_1 = x_1(t-\Delta), \ldots, x'_n = x_n(t-\Delta)$$

для x_i, $x'_i \in D$ — некоторая область эвклидова пространства E^n, $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$, Δ — постоянная, характеризующая запаздывание в системе.

Рассмотрим, далее, характеристическое уравнение

$$D(\lambda) \equiv |\, a_{sj} + b_{sj}e^{-\lambda\Delta} - \delta_{sj}\lambda \,| = 0 \tag{2}$$

порождающей системы

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1(t) + \ldots + a_{sn}x_n(t) + b_{s1}x_1(t-\Delta) + \ldots + b_{sn}x_n(t-\Delta)$$
$$(s = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Система (3) тогда и только тогда имеет периодические решения, когда характеристическое уравнение (2) имеет либо нулевой корень, либо чисто мнимые корни. Предположим, что характеристическое уравнение (2) имеет группу корней, состоящую из нулевого корня, кратность которого равна l_0, и r пар чисто мнимых корней вида $\pm p_j\lambda\sqrt{-1}$ $(j=1,\ 2, \ldots, r)$, где λ — произвольное положительное число, p_j — целые числа, и кратности этих корней равны соответственно $l_1,\ l_2, \ldots, l_r$. Обозначим число групп решений уравнения (3), которое соответствует рассматриваемым корням, через $k_0,\ k_1, \ldots, k_r$. Мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда число групп решений уравнения (3), отвечающих каждому корню, равно его кратности $l_j = k_j$ $(j=0,\ 1, \ldots, r)$.

Обозначим через m величину $k_0 + 2k_1 + \ldots + 2k_r = m$. Тогда система (3) будет иметь m и только m периодических решений, имеющих общий период $\omega = \dfrac{2\pi}{\lambda}$. Обозначим эти решения через

$$\varphi_{s1}(t),\ \varphi_{s2}(t), \ldots, \varphi_{sm}(t).$$

Кроме того, система

$$\frac{dy_s}{dt} = -a_{1s}x_1(t) - \ldots - a_{ns}x_n(t) - b_{1s}x_1(t+\Delta) - \ldots - b_{ns}x_n(t+\Delta), \tag{4}$$

сопряженная к системе (3), также будет иметь m независимых периодических решений (того же периода ω), которые обозначим через

$$\psi_{s1}(t),\ \psi_{s2}(t), \ldots, \psi_{sm}(t).$$

Таким образом, рассматриваемой группе корней уравнения (2) соответствует семейство периодических решений периода ω, зависящее от m произвольных постоянных $M_1, M_2, \ldots, M_m$,

$$x_s^{(0)} = M_1\varphi_{s1}(t) + M_2\varphi_{s2}(t) + \ldots + M_m\varphi_{sm}(t). \tag{5}$$

Следуя работе [1], будем искать частное решение системы (1) в виде формального ряда

$$x_s(\tau, \mu) = \sum_{k=1}^{m-1} M_k\varphi_{sk}(\tau) + \mu U_{s1}(\tau, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}) + \ldots, \tag{6}$$

где U_{sj} $(j = 1, 2, \ldots)$ — периодические (периода ω) функции по отношению к τ, подлежащие определению, а $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$, τ являются решениями уравнений

$$\frac{dM_k}{dt} = \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l E_{kl}(M_1, \ldots, M_{m-1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{7}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \sum_{l=1}^{\infty} \mu^l \alpha_l(M_1, \ldots, M_{m-1}). \tag{8}$$

Подставляя (6), (7) и (8) в (1), имеем:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{m-1}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\mu^l\frac{\partial U_{sl}}{\partial M_k}\sum_{l=1}^{\infty}\mu^l E_{kl}\right) + \sum_{l=0}^{\infty}\mu^l\frac{\partial U_{sl}}{\partial\tau}\left(1 - \sum_{l=1}^{\infty}\mu^l\alpha_l\right) = \\
= \sum_{q=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\mu^l a_{sq}U_{ql} + \sum_{q=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\mu^l b_{sq}u'_{ql} + \\
+ \mu f_s(U_{10} + \mu U_{11} + \ldots, U_{n0} + \mu U_{n1} + \ldots, U'_{10} + \mu U'_{11} + \ldots, \\
\ldots, U'_{n0} + \mu U'_{n1} + \ldots, \mu),
\end{gathered} \tag{9}$$

где обозначено

$$U_{s0} = \sum_{k=1}^{m-1} M_k\varphi_{sk}(t), \quad U'_{s0} = \sum_{k=1}^{m-1} M_k\varphi_{sk}(t-\Delta).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$\frac{\partial U_{s0}}{\partial\tau} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq}U_{q0} + \sum_{q=1}^{n} b_{sq}U'_{q0}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial U_{s1}}{\partial \tau} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} U_{q1} + \sum_{q=1}^{n} b_{sq} U'_{q1} + \alpha_1 \frac{\partial U_{s0}}{\partial \tau} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial U_{s0}}{\partial M_k} E_{k1} + f_s (U_{10}, \ldots, U_{n0}, U'_{10}, \ldots, U'_{n0}, 0), \tag{11}$$

. . . .

$$\frac{\partial U_{sp}}{\partial \tau} = \sum_{q=1}^{n} a_{sq} U_{qp} + \sum_{q=1}^{n} b_{sq} U'_{qp} + \alpha_p \frac{\partial U_{s0}}{\partial \tau} -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial U_{s0}}{\partial M_k} E_{kp} + R_{sp}, \tag{12}$$

где функции R_{sp} зависят только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$, $E_{k1}, \ldots, E_{k,p-1}$, $U_{s0}, \ldots$, $, \ldots, U_{s,p-1}$, $U'_{s0}, \ldots, U'_{s,p-1}$. Уравнение (10) удовлетворяется согласно выбору величин U_{s0}.

Для того чтобы система (11) допускала периодические решения периода ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} f_s (U_{10}, \ldots, U_{n0}, \ldots, U'_{10}, \ldots, U'_{n0}, 0) \psi_{sj} d\tau +$$

$$+ \alpha_1 \int_0^{\omega} d\tau \sum_{k=1}^{m-1} M_k \sum_{s=1}^{n} \frac{d\varphi_{sk}}{d\tau} \psi_{sj} - \int_0^{\omega} d\tau \sum_{k=1}^{m-1} E_{k1} \sum_{s=1}^{n} \varphi_{sk} \psi_{sj} = 0 \tag{13}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Уравнения (13) запишем в виде

$$P_j (M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, \alpha_1) - E_{j1} = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m-1), \tag{14}$$

$$P_m (M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, \alpha_1) = 0,$$

где

$$P_j (M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, \alpha_1) = \int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} f_s (U_{10}, \ldots, U_{n0}, \ldots, U'_{10}, \ldots, U'_{n0}, 0) \times$$

$$\times \psi_{sj} d\tau + \alpha_1 \int_0^{\omega} d\tau \sum_{k=1}^{m-1} M_k \sum_{s=1}^{n} \frac{d\varphi_{sk}}{d\tau} \psi_{sj} \; (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Из уравнений (14) функции

$$\alpha_1 = \alpha_1 (M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}),$$

$$E_{j1} = E_{j1} (M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}) \;\; (j = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{15}$$

могут быть всегда однозначно определены.

Подставив (15) в (11), получим неоднородное уравнение, решая которое находим

$$U_{s1} = C_{11}\varphi_{s1}(\tau) + \ldots + C_{m-1,1}\varphi_{s,m-1}(\tau) + \omega_{s1}(\tau),$$

где C_{j1} $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ — произвольные функции от $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$, не зависящие от τ, $\omega_{s1}(\tau)$ — частное периодическое решение.

Предположим, что величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$, $E_{k1}, \ldots, E_{k,p-1}$, $U_{s1}, \ldots, U_{s,p-1}$ уже определены. Рассмотрим уравнение (12). Чтобы эти уравнения допускали периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} R_{sp}\psi_{sj}d\tau + \alpha_p \int_0^{\omega} d\tau \sum_{k=1}^{m-1} M_k \sum_{s=1}^{n} \frac{d\varphi_{sk}}{d\tau}\psi_{sj} - E_{jp} = 0,$$

$$\int_0^{\omega} \sum_{s=1}^{n} R_{sp}\psi_{sm}d\tau + \alpha_p \int_0^{\omega} d\tau \sum_{k=1}^{m-1} M_k \sum_{s=1}^{n} \frac{d\varphi_{sk}}{d\tau}\psi_{sm} = 0, \tag{16}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Аналогично предыдущему, найдем величины α_p, E_{sp} и функции U_{sp}, каждая из которых содержит $m-1$ произвольную функцию от $M_1, M_2, \ldots, \ldots, M_{m-1}$, и т. д.

Таким образом, в p-м приближении получим

$$x_s = \sum_{k=1}^{m-1} M_k\varphi_{sk} + \mu U_{s1} + \ldots + \mu^{p-1}U_{s,p-1}, \tag{17}$$

где

$$\frac{Md_j}{dt} = \mu E_{j1} + \ldots + \mu^p E_{jp},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \mu\alpha_1 - \ldots - \mu^p\alpha_p.$$

2. Указанный метод можно применить для нахождения периодических решений системы (1). (Существование периодических решений для систем вида (1) в критическом случае доказано в работах [3—5].)

Для этого необходимо найти квазистатическое решение

$$M_j = M_j(\mu), \ M_j(0) = M_j^* \tag{18}$$

уравнений (7). С этой целью, приравнивая правые части уравнения (7) нулю, получим систему для определения квазистатического решения

$$E_{j1}(M_1, \ldots, M_{m-1}) + \mu E_{j2}(M_1, \ldots, M_{m-1}) + \ldots = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{19}$$

Чтобы эти уравнения имели решения вида (18), необходимо, чтобы M_j^* были корнями уравнений

$$E_{j1}(M_1^*, M_2^*, \ldots, M_{m-1}^*) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{20}$$

Полагая в (14) $E_{j1} = 0$, получим

$$P_j(M_1^*, M_2^*, \ldots, M_{m-1}^*, \alpha_1) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{21}$$

Условия (21) являются необходимыми условиями существования периодических решений системы (1). Эти условия были получены в работе [3] несколько другим путем.

Если, кроме того,

$$\frac{\partial(P_1, \ldots, P_m)}{\partial(M_1^*, \ldots, M_{m-1}^*, \alpha_1)} \neq 0,$$

то уравнения (19) имеют единственное решение

$$M_j = M_j^* + \mu M_{j1} + \ldots, \tag{22}$$

где M_{jp} — постоянные.

Подставляя (22) в (6), получим единственное периодическое решение системы (1) в виде ряда по степеням параметра μ, которое при $\mu = 0$ обращается в периодическое решение (5) порождающей системы (3). Сходимость ряда (6) в этом случае следует из того, что в силу аналитичности функции f относительно всех своих аргументов периодическое решение $x(t, \mu)$ системы (1) будет также аналитической функцией относительно μ.

В общем случае ряд (6) является формальным, однако, взяв в нем конечное число членов, мы можем пользоваться им для приближенного вычисления частных решений возмущенной системы (1), близких для достаточно малых значений параметра μ к порождающему решению (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы, Сб. тр. ин-та строительной механикии АН УССР, т. 10, 1949.
2. Н. Г. Булгаков, К вопросу об асимптотическом интегрировании нелинейных систем со многими степенями свободы, Изв. высш. уч. завед., Математика, № 4, 1958.
3. С. Н. Шиманов, Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием. Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, т. 3, № 3, 1960.
4. Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, Гостехиздат, М., 1955.
5. А. Халанай, Периодические решения систем с запаздыванием с малым параметром в критическом случае, Rev. math. pures et appl. Acad. RPR, **6**, № 3, 1961.

Поступила 17.VIII 1965 г.
Киев