О существовании однозначных квазиконформных отображений на замкнутых римановых поверхностях

В. Г. Михальчук

В настоящей статье даются обобщения некоторых теорем существования, доказанных Радойчичем (Radojčič) в работе [1] для аналитических функций, на случай решений уравнений

$$\partial_{\bar z} w = h_1(z)\, \partial_{\bar z} \bar w, \quad h_1(z) = \frac{p_1 - 1}{p_1 + 1} e^{2i\theta}, \tag{1}$$

и уравнений

$$\begin{gathered} \partial_{\bar z} w = q(z)\, \partial_z w + q_1(z)\, \partial_{\bar z} \bar w, \\ q(z) = -\frac{p_1(p^2 - 1)}{(pp_1 + 1)(p + p_1)} e^{2i\theta}, \quad q_1(z) = \frac{p(p_1^2 - 1)}{(pp_1 + 1)(p + p_1)} e^{2i\theta_1}, \end{gathered} \tag{2}$$

где p, θ и p_1, θ_1 — характеристики квазиконформного отображения $w(z)$ [2, 3]. Теоремы дают условия существования однозначных функций с заданными нулями и полюсами, а также с существенно особыми точками на замкнутых римановых поверхностях.

1. Определим на замкнутой римановой поверхности R рода g гомологический базис путей $K_1, K_2, \ldots, K_{2g}$, который является системой канонических сечений поверхности. Пусть на этой поверхности задано некоторое решение уравнения (1) с нулями в точках q_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, l$) порядка r_μ и с полюсами только в точках p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) порядка s_ν. Для операций, производимых в дальнейших выкладках, следует потребовать принадлежности характеристических коэффициентов $h_1(z)$, $q(z)$, $q_1(z)$ в окрестности точек q_μ и p_ν соответственно классам C^{r_μ} и C^{s_ν}, а в остальных точках поверхности — классу C^1. Предположим далее, что в некотором локальном параметре число заданных действительных коэффициентов в главной части полюса p_ν равно $2\sigma_\nu$ ($0 \leqslant \sigma_\nu \leqslant s_\nu$). Для удобства записи введем обозначения

$$\sum_{\mu=1}^{l} r_\mu = r, \quad \sum_{\nu=1}^{k} s_\nu = s, \quad \sum_{\nu=1}^{k} \sigma_\nu = \sigma.$$

Определим функцию $t(z)$ с помощью дифференциала следующим образом:

$$dt = \sum_{\nu=1}^{k} \left[\sum_{j=1}^{s_\nu} \left(a_j^{(\nu)} dt^{(1)}_{p_\nu^j} + b_j^{(\nu)} dt^{(2)}_{p_\nu^j} \right) \right],$$

где $a_j^{(\nu)}$, $b_j^{(\nu)}$ — действительные коэффициенты, подлежащие выбору в дальнейшем, $dt^{(1)}_{p_\nu^j}$ и $dt^{(2)}_{p_\nu^j}$ — нормальные квазианалитические дифференциалы с полюсами в точках p_ν порядка j, в окрестности которых они ведут себя как $dZ_{x_\nu^{j-1}}$ и $idZ^1_{x_\nu^{j-1}}$, принадлежат уравнению (1) и имеют нулевые периоды относительно путей K_{2n-1} (см. [3]). Тогда если $s < g$, то из обобщения теоремы Римана—Роха, приведенного в статье [3], следует, что функция $t(z)$ выбором коэффициентов $a_j^{(\nu)}$, $b_j^{(\nu)}$ может быть сделана однозначной. При этом не меньше чем $2(s-g+1)$ коэффициентов можно задать произвольно. Так как каждый нуль функции дает два действительных уравнения для определения коэффициентов, то нулей и действительных коэффициентов в главных частях полюсов можно произвольно задать в следующем количестве

$$2(r+\sigma) \leqslant 2(s-g+1).$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода g, q_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, l$) и p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) — точки на R и r_μ, s_ν, σ_ν ($0 \leqslant \sigma_\nu \leqslant s_\nu$) — заданные натуральные числа, такие что*

$$s - \sigma - r \geqslant g - 1.$$

Тогда на поверхности R существует однозначное решение уравнения (1), *имеющее нули в точках q_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, l$) кратности r_μ, полюсы только в точках p_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, k$) кратности s_ν с заданными $2\sigma_\nu$ действительными коэффициентами главных частей.*

Следствие. *Достаточное условие существования однозначного решения уравнения (1) можно сформулировать следующим образом: разность* *между числами* $s - \sigma$ *и* r *должна быть не меньше* $g - 1$. *Поэтому если задать, кроме нулей, в точках* q_μ *все главные части в полюсах* p_ν *и прибавить один полюс в точке* p_{k+1} *кратности* s_{k+1}, *то* $s - \sigma = s_{k+1}$. *Тогда достаточное условие теоремы* 1 *выразится неравенством*

$$s_{k+1} \geqslant g + r - 1$$

Следовательно, нули q_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, l)$ *и полюсы* p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ *с главными частями в них можно заранее задать произвольно, если дополнительно задать еще в одной точке полюс достаточно высокого порядка* $s_{k+1} \geqslant g + r - 1$.

2. Предположим, что в окрестности точки z_0 характеристический коэффициент $h_1(z)$ уравнения (1) является аналитической функцией от z и $\bar{z}$. Тогда в окрестности этой точки всякое регулярное решение уравнения (1) тоже будет аналитической функцией от z и $\bar{z}$, а ядерные функции $Z(z, t)$, $Z^1(z, t)$ в окрестности этой точки—аналитические по z, $\bar{z}$ и t, $\bar{t}$.

Точку z_0 назовем существенно особой точкой решения $w(z)$ уравнения (1), если в ее окрестности функция $w(z)$ допускает разложение вида

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k Z_{x_0^k} + i\beta_k Z^1_{x_0^k}) + \text{ рег. часть},$$

где α_k, β_k — действительные коэффициенты. Существование решений уравнения (1) (вообще говоря, многозначных) с существенно особыми точками на замкнутой римановой поверхности (или на поверхности с краем) можно доказать аналогично случаю решений с полюсами.

Теорема 2. *Пусть* $q_\mu(\mu = 1, 2, \ldots, l)$, $p_\nu(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ *и* $\varrho_\lambda(\lambda = 1, 2, \ldots, m)$ *заданные точки на замкнутой римановой поверхности* R. *Существует однозначное решение уравнения* (1) *на поверхности* R, *имеющее нули по меньшей мере в точках* q_μ, *полюсы в точках* p_ν, *существенно особые точки в точках* ϱ_λ *и регулярное в остальных точках поверхности.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать ее для случая $m = 1$. Докажем сначала, что существует бесчисленное множество линейно независимых решений уравнения (1), имеющих единственную существенно особую точку в $z_1 = z/\varrho_1$), и обладающих наперед заданными периодами. С этой целью построим систему решений $f_j(z)$ уравнения (1) на поверхности R с существенной особенностью в точке z_1 и с главными частями вида

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k Z_{x_1^k} + \beta_k Z^1_{x_1^k}) + \text{ рег. часть},$$

где $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$. Прибавлением к функции $f_j(z)$ решения $\varphi_j(z)$ уравнения (1) с полюсом достаточно высокого порядка в точке z_1 и с главной частью в ней, содержащей лишь члены порядка $Z_{x_1^k}$ $(k \geqslant j)$, можно достичь наперед заданных периодов функций

$$F_j(z) = f_j(z) + \varphi_j(z).$$

Кроме этого из особенностей функций $F_j(z)$ видно, что они линейно независимы.

Рассмотрим решение $\Phi(z)$ уравнения (1) с полюсами в точках p_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$. Периоды функции $\Phi(z)$ можно уничтожить прибавлением $F_1(z)$ с периодами, противоположными по знаку периодам функции

$\Phi(z)$. Прибавим к сумме $\Phi(z)+F_1(z)$ конечную линейную комбинацию

$$\sum_{(j)} a_j F_j^*(z)$$

с однозначными функциями $F_j^*(z)$ и такими действительными коэффициентами a_j, чтобы сумма

$$f(z)=\Phi(z)+F_1(z)+\sum_{(j)} a_j F_j^*(z)$$

имела нули в точках q_μ ($\mu=1, 2,\ldots, l$).

Построенная функция $f(z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.

3. Рассмотренные в настоящей статье теоремы 1 и 2 имеют место не только для решений уравнения (1), но и для решений уравнения (2). Это нетрудно усмотреть, исходя из связи между решениями указанных уравнений, установленной в теореме 2 статьи [3]. Действительно, если на римановой поверхности задано решение $w=F(z)$ дифференциального уравнения (2), то выбором нового локального параметра $\zeta=\zeta(z)$, который в каждом параметрическом круге $|z|<1$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar z} w = h(z)\,\partial_z w,\ \ h(z)=-\frac{p-1}{p+1}e^{2i\theta},$$

производится переход к функции $w=f(\zeta)$, которая является решением уравнения вида (1) относительно нового локального параметра ζ на поверхности R_1, полученной из R изменением локальных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Radojčič, Sur les series de fonctions algebriques et les produits infinis analogues definissant des fonctions analytiques multiformes dans leurs domaines d'existance queleonques, Publs inst. math. Acad. serbe, sci., 7, 1954, 95—118.
2. Л. И. Волковыский, Квазиконформные отображения, изд-во Львовск. ун-та, 1954.
3. В. Г. Михальчук, Интеграл типа Коши и теорема Римана — Роха для квазианалитических функций на римановых поверхностях, Сб. «Исследования по совр. пробл. теор. функц. комплексн. перем., Физматгиз М., 1960, 425—436.

Поступила 24.IX 1964 г.
Киев