Обобщенное фундаментальное решение эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами

Л. С. Парасюк

В работе [1] доказано существование фундаментального решения для эллиптических систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами для достаточно малых областей и изучены его локальные свойства.

В настоящей заметке рассматривается фундаментальное решение для таких систем в некоторой произвольной области.

Пусть $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — эллиптический дифференциальный оператор вида

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_s\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{|x|^{\alpha_1}} A_{s-1}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + \frac{1}{|x|^{\alpha_s}} A_0(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого — действительные квадратные матрицы, определенные для значений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ в некоторой области D', содержащей точку «ноль» — особенность коэффициентов оператора (1). Предполагается также, что коэффициенты оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ при производных $k \leqslant s$ порядка $(s \geqslant 2)$ дифференцируемые $k + t$ раз $(t \geqslant 0)$ и эти производные удовлетворяют условию Липшица.

Пусть D — конечная область, ограниченная достаточно гладкой границей Γ, которая лежит вместе с границей в некоторой области D' $(\bar{D} \subset D')$. Имеет место такая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала фундаментальная матрица решений оператора* $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *во всей области* D''' $(\bar{D}''' \subset D''$, $\bar{D}'' \subset D')$, *необходимо и достаточно, чтобы сопряженное уравнение*

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) V(x) = 0$$

не имело бы ненулевого решения в D'', *равного нулю в граничной полоске области* D''.

Если не выполняется условие, указанное в теореме, то фундаментальное решение для оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ существует тогда в обобщенном смысле.

Матрица $\omega(x, y)$ будет называться обобщенным фундаментальным решением оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, если имеет место следующее равенство

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x, y) = f(x)\, \Psi^{(1)}(y). \tag{2}$$

При этом предполагается, что $\Psi^{(1)}(y)$ имеет независимые столбцы и типа $V(x)$, а $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{D''} \Psi^{(1)}(x) f(x)\, dx = -I, \tag{3}$$

где I — единичная матрица.

Заметим при этом, что обобщенная фундаментальная матрица $\omega(x, y)$ имеет особенность обычного типа и по методу Леви—Лопатинского ищется в виде

$$\omega(x, y) = \omega_1(x, y) + \int_{D'''} \omega_1(x, z)\, g(z, y)\, dz, \tag{4}$$

где

$$\omega_1(x, y) = \omega_s(x, y) + a(x)\, b(y), \tag{5}$$

а матрица $\omega_s(x, y)$ — фундаментальное решение однородного оператора $A_s\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, коэффициенты которого постоянны. Матрицы $a(x)$ и $b(y)$ не имеют особенностей во всей области D'' и подбираются так, что при отсутствии решения $V(x)$ интегральное уравнение

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, y) + g(x, y) + \int_{D'''} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, z)\, g(x, y)\, dz = 0 \tag{6}$$

было бы разрешимо по первой теореме Фредгольма.

При наличии таких решений $V(x)$, которых может быть только конечное количество «r», матрицы $a(x)$ и $b(y)$ подбираются так, чтобы интегральное уравнение

$$\Psi(y) + \int\limits_{\dot{D}''} \Psi(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_1(x, y)\, dx = 0$$

имело бы только эти «r» независимых решений. Эти замечания и предполагаются при построении обобщенного фундаментального решения.

Теорема 2. *Пусть в некоторой области D'' существуют обобщенные фундаментальные матрицы $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ операторов $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Пусть коэффициенты этих операторов дифференцируемые в области $D''s$ раз и s-е производные удовлетворяют условию Липшица, тогда в любой подобласти D_1 ($D_1 \subset D''$) существует нормальная обобщенная фундаментальная матрица $\overline{\omega}(x, y)$, которая может быть представлена в виде*

$$\overline{\omega}(x, y) = \omega_2'(y, x) - \int\limits_{D_1} \omega_1(x, z) A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega_2'(y, z)\, dz \tag{7}$$

и обладает следующими свойствами:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{\omega}(x, y) = f(x)\, \Psi^{(1)}(y), \tag{8}$$

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \overline{\omega}(x, y) = g(x)\, \varphi^{(1)}(y). \tag{9}$$

При этом $\varphi^{(1)}$ — типа V для оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, а $\Psi^{(1)}$ — типа V для сопряженного по Лагранжу оператора $A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Парасюк, ДАН УРСР, № 8, 1963.
2. Я. Б. Лопатинский, УМЖ, т. III, № 3, 1951.

Поступила 11.I 1966 г.
Львов