Аналитическое продолжение разложений по многочленам Гегенбауэра и его применение к исследованию свойств амплитуды рассеяния

О. С. Парасюк

Пусть $F(z)$ — функция, заданная своим разложением в ряд по многочленам Гегенбауэра:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z). \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $f(z)$, заданную своим разложением в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

с теми же коэффициентами.

Можно поставить интересный вопрос, в каком соответствии находятся особенности аналитических продолжений функций (1) и (2).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказанная Фабером [1, 2] для случая $\nu = \frac{1}{2}$, т. е. для разложений по многочленам Лежандра.

Теорема 1. *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

имеет радиус сходимости $r > 1$, то бесконечный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z) \tag{3}$$

определяет аналитическую функцию $F(z)$. Между особыми точками функции $F(z)$, которые обозначим через β, и особыми точками α функции $f(z)$, определяемой рядом (1), имеется такая зависимость, что каждой особой точке α функции $f(z)$ соответствует особая точка β функции $F(z)$, заданная уравнением

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \tag{4}$$

и при таком соответствии получаются все особые точки функции $F(z)$. Только в случае, когда функция $F(z)$ многозначна, точки $0, +1, -1$ (не лежащие на первом листе!) могут оказаться особыми для $F(z)$, несмотря на то, что соответствующие им точки $\alpha = \pm i, 1, -1$ не были особыми для $f(z)$. Возможна и обратная ситуация, когда точки $\pm i$ являются особыми для некоторой ветви $f(z)$, но им соответствующая точка $\beta = 0$ не обладает этим свойством. Кроме того, также точки $\alpha = 0, \infty$ и $\beta = \infty$ выпадают из соответствия, установленного теоремой.

Доказательство Фабера требует некоторых уточнений, которые следуют из работы [2], посвященной мультипликационной теореме Адамара, лежащей в основе сформулированной выше теоремы Фабера. Нетрудно видеть, что оно проходит и для $\nu \neq \frac{1}{2}$, т. е. для случая разложений по ультрасферическим многочленам.

Комбинируя теорему Фабера с одной теоремой Desainta [2] и результатом заметки [5], мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_n^{\nu}(z) \tag{5}$$

функция, заданная своим разложением в ряд, который сходится в некотором эллипсе.

Построим функцию

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(a_n)\, C_n^{\nu}(z), \tag{6}$$

где $\Phi(\omega)$ — произвольная аналитическая функция, регулярная в точке $\omega = 0$. При этих условиях функции $\Psi(z)$ не имеет, вообще говоря, других особых точек (вплоть до $z = 1$ и $z = \infty$), кроме тех, которые получаются по формуле

$$z = \cos h\,(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_n\alpha_n) = \cos h\left(\sum_i n_i\alpha_i\right), \tag{7}$$

где $\zeta_k = \cos h\alpha_k$ — *особые точки функции* $F(z)$, *а сумма* $\sum_i$ *взята по произвольному конечному множеству индексов* i, *которыми занумерованы особые точки функции* $F(z)$. *Исключение представляют только точки, которые отмечены в теореме Фабера.*

В случае разложений по многочленам Лежандра $\left(\nu = \frac{1}{2}\right)$ эта теорема получает приложение к исследованию аналитических свойств амплитуды рассеяния на втором листе ее римановой поверхности.

Пусть

$$A^{\mathrm{I}}(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l^{\mathrm{I}}(s) P_l(z) \tag{8}$$

— разложение амплитуды рассеяния на первом листе ее римановой поверхности. Тогда ее разложение на втором листе имеет при соответствующих предположениях, сформулированных в работах [3, 4], следующий вид:

$$A^{\mathrm{II}}(s, z) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{A_l^{\mathrm{I}}(s)}{1 + i \dfrac{g_s}{4\pi\sqrt{s}} A_l^{\mathrm{I}}(s)} P_l(z). \tag{9}$$

Применяя теорему 2, мы сразу получаем основной результат работы [4] об особых точках функции A^{II} (s, z) в плоскости переменной z при фиксированной переменной s. В работе [4] этот результат получен путем аналитического продолжения решения соответствующего интегрального уравнения методом, предложенным Мандельстамом.

Как видно из изложенного, указанный результат является частным случаем более общих теорем, доказанных в теории функций еще в начале XX века.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. F a b e r, Über Reihen nach Legendreschen Polynomen, Jahresber. DMV, XVI, 1907, 109—115.
2. S. S c h o t t l a e n d e r, Der Hadamardoche Multiplikationssatz und weitere Kompositionssätze der Funktiontheorie, Math. Nachrichten, **11**, № 4/5, 239—294.
3. A. O. B a r u t, On the Position of singularities of the S-Matrik in «unified theories», Triest Preprint, IC(65)73.
4. W. Z i m m e r m a n, Analytic Behavior of the Scattering Amplitude at Zero Energy, Nuovo C., Vol. XXI, № 2, 1961, 249—273.
5. О. С. П а р а с ю к, Мультипликационная теорема Адамара и аналитическое продолжение двухчастичного условия унитарности, ДАН СССР, т. 145, № 6, 1962.

Поступила 1.III 1966 г.
Киев