Теоремы существования периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

В. Ф. Субботин

1. В статье рассматриваются периодические решения конечных систем интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-h)) + \int_{-H}^{0} G(t, s, x(t), x(t+s))\, ds. \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ — неизвестный вектор-столбец, зависящий от скалярного переменного t; $h \geqslant 0$, $H \geqslant 0$, причем случай $H = \infty$ также допускается; h — конечное число. Функции $F(t, u, v)$, $G(t, s, u, v)$ зависят от скалярных переменных t, s, $t \in [0, \omega]$, $s \in (-H, 0]$ и от векторных переменных u, v, изменяющихся в шаре $(|u| \leqslant a)$ конечномерного пространства E_n.

В отличие от других работ [1, 2] система (1) рассматривается при условиях Каратеодори, т. е. F, G измеримы по t, (t, s) при каждом (u, v) и непрерывны по (u, v) при почти каждом t, (t, s). Предположим также, что

$$|F(t, u, v)| \leqslant N(t), \qquad |G(t, s, u, v)| \leqslant L(t, s), \tag{2}$$

где N, L суммируемы на $[0, \omega]$, $[0, \omega] \times (-H, 0]$.

Для системы (1) задача Коши ставится следующим образом: найти функцию $x(t)$, при $t \geqslant 0$ абсолютно непрерывную и удовлетворяющую почти всюду системе (1), а при $t \leqslant 0$ — начальному условию $x_{(t \leqslant 0)} = x_0(s)$ из класса $M(-\infty, 0]$ ограниченных кусочно-непрерывных вектор-функций, имеющих не более счетного числа точек разрыва. Обозначим $\|x\| = \sup|x(s)|$, если $x(s) \in M(-\infty, 0]$.

Если $\|x_0(s)\| < a$, то при сделанных предположениях на некотором промежутке $(-\infty, \gamma]$, $\gamma > 0$, существует решение задачи Коши [3, 4]. Ниже будем записывать систему (1) в форме Н. Н. Красовского [5]

$$x'(t) = f(t, x_t, \lambda), \tag{3}$$

где $f(t, x_t, \lambda)$ — вектор-функционал от предыстории $x_t = x(t+s)$, $s \in (-\infty, 0]$, зависящий от числового параметра λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Для уравнения (3) задача Коши ставится так же, как для системы (1). Для ее разрешимости достаточно потребовать следующих условий: 1) $|f(t, x_0(s), \lambda)| \leqslant P(t)$ при $t \in [0, \omega]$, $\|x_0\| < a$, $\lambda \in [0, 1]$, $P(t) \in L_1[0, \omega]$; 2) если $x(t) \in M(-\infty, \omega]$, то $f(t, x_t, \lambda)$ измерима по t и

$$\int_0^t f(t, x_t, \lambda)\, dt \rightrightarrows \int_0^t f(t, y_t, \lambda)\, dt \tag{4}$$

равномерно при $x(t) \rightrightarrows y(t)$ (интегральная непрерывность функционала f).

Если, кроме того, функционал f интегрально непрерывен по совокупности переменных (x_0, λ), а решение задачи Коши единственно и продолжимо на $[0, \omega]$, то решение непрерывно зависит от (x_0, λ).

Доказать это утверждение можно, например, аппроксимируя решения ломаными Эйлера — Тихонова [3] (другие методы исследования аналогичных задач предложены в [4, 6—7]).

2. В этом пункте предполагается, что F и G ω-периодичны по t и удовлетворяют условиям п. 1.

Пусть $\overline{\Omega}$ — некоторая замкнутая область, лежащая в шаре $\|x^0(t)\| < a$ пространства $C(-\omega, 0]$ равномерно непрерывных вектор-функций на промежутке $(-\omega, 0]$. Через $\widetilde{x}^0(t)$ обозначим функцию, полученную периодическим продолжением функции $x^0(t) \in \overline{\Omega}$ на промежуток $(-\infty, 0]$. Совокупность таких функций образует множество $\widetilde{\Omega}$ в пространстве $M(-\infty, 0]$. Каждая функция $\widetilde{x}^0(t) \in \widetilde{\Omega}$ определяет решение $x(t, \widetilde{x}^0)$ системы (1).

Мы предположим, что эти решения продолжимы до $t = \omega$ и обладают свойством единственности.

Рассмотрим оператор сдвига [1, 2]: $\Pi_\omega x^0 = x(\omega + s, \widetilde{x}^0)$, $-\omega < s \leqslant 0$, действующий в пространстве $C(-\omega, 0]$.

Теорема 1. *Оператор Π_ω вполне непрерывен на области $\overline{\Omega}$, его неподвижные точки $x^0(s)$ определяют те начальные условия $\widetilde{x}^0(s)$, в которых начинаются ω-периодические решения системы* (1), Доказательство. Вначале покажем непрерывную зависимость оператора Π_ω от x^0. Для этого достаточно показать непрерывную зависимость решения $x(t, \widetilde{x^0})$ от $\widetilde{x^0}$.

С этой целью проверим выполнение условий п. 1. Функционал, соответствующий системе (1), имеет вид

$$f(t, x_0(s)) = F(t, x_0(0), x_0(-h)) + \int_{-H}^{0} G(t, s, x_0(0), x_0(s))\, ds.$$

Проверим свойство (4) (остальные условия очевидным образом выполняются). Операторы суперпозиции $F(t, x(t), x(t-h))$, $G(t, s, x(t), x(t+s))$ действуют из пространства $M(-H, \omega]$ в пространство $L_1[0, t]$, $t \geqslant 0$, в силу условий (2), что влечет их непрерывность в соответствующих нормах (см. [8]). Последнее эквивалентно поточечной сходимости в формуле (4). Так как интегралы в этой формуле равностепенно непрерывны (условие (2)) по t, то следует их равномерная сходимость, т. е. свойство (4).

Отсюда же вытекает и полная непрерывность оператора Π_ω.

Наконец, если x^0 — неподвижная точка оператора Π_ω, то $\widetilde{x^0}$ — непрерывная периодическая функция и, продолжив ее периодически на правую полуось, получим решение системы (1).

Теорема доказана.

В работе [1] было показано, что для доказательства существования периодических решений системы (1) можно применить принцип Ж. Лере — М. А. Красносельского [8, 9] в следующей форме: рассмотрим векторное поле $\Phi x^0 = \Pi_\omega x^0 - x^0$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω, если вращение γ поля Φ отлично от нуля, то в открытой области Ω существует неподвижная точка оператора Π_ω, а следовательно, и периодическое решение системы (1); если $y^0 \in \Omega$ — известная неподвижная точка индекса γ_0 и $\gamma_0 \neq \gamma$, то существует вторая неподвижная точка оператора Π_ω, и в этом случае система (1) имеет по крайней мере два ω-периодических решения. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений аналогичные принципы ранее использовались рядом авторов (см. [10, 14]).

Таким образом, возникает задача вычисления вращения векторного поля, порожденного оператором сдвига для системы (1). Здесь могут быть применены различные теоремы нелинейного функционального анализа.

3. Один из приемов [8] вычисления вращения векторных полей состоит в замене их близкими линейными (линеаризация).

Вычислим производную Фреше от оператора Π_ω в точке θ и асимптотическую.

Пусть F и G — функции Каратеодори, определенные при $(u, v) \in \in (-\infty, \infty)$.

Рассмотрим матрицы $A_1(t)$, $A_2(t, s)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$, $\beta_1(s)$, абсолютно суммируемые по своим переменным и ω-периодические по t. Пусть они удовлетворяют при всех (u, v) и почти всех (t, s) оценкам

$$\begin{gathered}|F(t, u, v) - A_1(t)u - B_1(t)v| \leqslant a_1(t)(|u| + |v|)^{1-\varepsilon} + b_1(t),\\ |G(t, s, u, v) - A_2(t, s)u - B_2(t)\beta_1(s)v| \leqslant a_2(s)(|u| + |v|)^{1-\varepsilon} + b_2(s),\end{gathered} \tag{5}$$

где $a_1(t)$, $b_1(t)$, $a_2(s)$, $b_2(s)$ — неотрицательные суммируемые функции, а число $\varepsilon \in (0, 1)$.

Рассмотрим линейную систему

$$y'(t) = C_1(t)y(t) + D_1(t)y(t-h) + E_1(t)\int_{-H}^{0} \beta_1(s)y(t+s)\, ds, \tag{6}$$

где

$$C_1(t) = A_1(t) + \int\limits_{-H}^{0} A_2(t, s)\, ds, \qquad D_1(t) = B_1(t), \qquad E_1(t) = B_2(t).$$

Через L_ω^1 обозначим оператор сдвига для линейной системы (6).

Заметим, что условия пункта 3 обеспечивают существование решения системы (1) и его продолжимость на $[0, \omega]$ для любого начального условия $x_0(s)$. Таким образом, если для системы (1) выполнено условие единственности, то на всем пространстве $C(-\omega, 0]$ определен оператор Π_ω и справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5). *Тогда оператор* L_ω^1 *является асимптотической производной от оператора* Π_ω.

Пусть одновременно с условиями теоремы 2 выполнены неравенства

$$\begin{gathered} |F(t, u, v) - A_3(t)u - B_3(t)v| \leqslant a_3(t)(|u| + |v|)^{1+\varepsilon}, \\ |G(t, s, u, v) - A_4(t, s)u - B_4(t)\beta_2(s)v| \leqslant a_4(s)(|u| + |v|)^{1+\varepsilon}, \end{gathered} \tag{7}$$

где A_3, B_3, A_4, B_4, β_2, a_3, a_4 — матрицы и функции того же типа, что и в (5), а число $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим линейную систему

$$y'(t) = C_2(t)y(t) + D_2(t)y(t-h) + E_2(t)\int\limits_{-H}^{0} \beta_2(s)y(t+s)\, ds, \tag{8}$$

построенную как и (6) из матриц A_3, B_3, A_4, B_4, и оператор сдвига для нее — L_ω^2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (7), (5). *Тогда оператор* L_ω^2 *является производной Фреше в нуле от оператора* Π_ω.

Доказательство этих теорем мы не приводим, так как оно производится по обычным схемам [11].

Если оператор L_ω^1 имеет только нулевую неподвижную точку, то вращение поля $\Pi_\omega x^0 - x^0$ на достаточно большой сфере совпадает с вращением линейного поля $L_\omega^1 x^0 - x^0$ (т. е. равно ± 1).

Отсюда вытекает

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и система* (6) *имеет только нулевое* ω*-периодическое решение. Тогда система* (1) *имеет* ω*-периодическое решение.*

4. Один из основных методов вычисления вращения векторного поля состоит в отыскании более простого векторного поля, гомотопного исходному.

Структура системы (1) позволяет естественным образом ввести в нее числовой параметр и построить гомотопию дифференциального уравнения и соответствующего оператора сдвига. Например, введем параметр λ следующим образом:

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-\lambda h)) + \lambda\int\limits_{-H}^{0} G(t, s, x(t), x(t+s))\, ds, \tag{9}$$

или, при конечном H,

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-\lambda h)) + \lambda\int\limits_{-\lambda H}^{0} G(t, s, x(t), x(t+s))\, ds. \tag{10}$$

При $\lambda = 0$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t)). \tag{11}$$

Будем предполагать, что выполнены условия пункта 1′, причем условие единственности и продолжимости решений сформулированы в терминах оценок на функции F и G.

Тогда уравнения (9), (10) можно интерпретировать как уравнение (3), зависящее от параметра λ, и соответствующий оператор сдвига также зависит от параметра λ: $\Pi_\omega x^0 = \Pi_\omega^\lambda x^0$. Этот оператор вполне непрерывен по совокупности (x^0, λ) на множестве $\overline{\Omega} \times [0, 1]$.

Доказывается это утверждение точно так же, как в теореме 1, с той разницей, что необходимо воспользоваться свойством оператора суперпозиции F преобразовывать последовательности из $M[-h, \omega]$, сходящиеся по норме $L_2[-h, \omega]$, в последовательности, сходящиеся по норме пространства $L_1[0, t]$, $t \geqslant 0$.

При $\lambda = 0$ значениями оператора Π_ω^0 являются решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11). Так как эти решения определяются значением $x_0 = x^0(0)$, то естественно рассмотреть классический оператор сдвига для системы (11) — оператор $U_\omega x_0$, действующий в конечномерном пространстве E_n, и ожидать, что вращения полей $\Phi^\lambda x^0 = \Pi_\omega^\lambda x^0 - x^0$, $\Phi x_0 = U_\omega x_0 - x_0$ взаимосвязаны. Ниже формулируется соответствующий результат.

Пусть открытая область Ω построена следующим образом: она состоит из всех функций пространства $C(-\omega, 0]$, равномерно непрерывных на $(-\omega, 0]$, значения которых лежат в открытой области Ω^* пространства E_n; границу области Ω^* обозначим через Γ. Будем предполагать, что $\overline{\Omega}^*$ лежит в шаре $(|x| < a)$.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что*

а) *ω-периодические решения систем* (9), (10), *лежащие в области $\overline{\Omega}^*$, не пересекают границу Γ при всех λ;*

б) *все ω-периодические решения системы* (11) *не пересекают границу Γ.*

Тогда вращение поля $\Phi^1 x^0 = \Pi_\omega x^0 - x^0$ на $\dot{\Omega}$ равно вращению поля $\Phi x_0 = U_\omega x_0 - x_0$ на границе Γ; если последнее отлично от нуля, то существует по крайней мере одно ω-периодическое решение системы (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия а) векторное поле $\Phi^\lambda x^0$ при всех λ не обращается в нуль на границе $\dot{\Omega}$. Поэтому вращения полей $\Phi^1 x^0$ и $\Phi^0 x^0$ одинаковы.

Рассмотрим оператор Q_τ деформации пространства $C(-\omega, 0]$ в конечномерное подпространство E_n

$$Q_\tau x(t) = \begin{cases} x(\tau), & -\omega < t \leqslant \tau, \\ x(t), & \tau \leqslant t \leqslant 0, \end{cases} \quad \tau \in (-\omega, 0].$$

Оператор $Q_\tau \Pi_\omega^0$ не имеет неподвижных точек на границе $\dot{\Omega}$ при всех λ. Действительно, в противном случае, можно указать неподвижную точку оператора $Q_\tau \Pi_\omega^0$ — функцию $x^0(t)$, равную $x(\tau)$ в интервале $(-\omega, \tau]$, и $x(t)$ — в интервале $[\tau, 0]$, где $x(t)$ — ω-периодическое решение системы (11), некоторое значение $x(t^*)$ которой $(t^* \geqslant \tau)$ принадлежит границе Γ. Следовательно, периодическое решение $x(t)$ пересекает границу Γ, что противоречит условию б).

Следовательно, вращение поля $\Pi_\omega x^0 - x^0$ совпадает с вращением γ поля $Q_0 \Pi_\omega^0 x^0 - x^0$. Оператор $Q_0 \Pi_\omega^0$ действует в пространство E_n, поэтому γ равно вращению конечномерного поля $Q_0 \Pi_\omega^0 x_0 - x_0$ на границе Γ области Ω^*. Так как в E_n оператор $Q_0 \Pi_\omega^0 = U_\omega$, то наша теорема доказана.

Отметим, что наш результат является развитием принципа нелокального продолжения ω-периодических решений по параметру запаздывания, сформулированного в работе [1]. Однако теорему 5 можно доказать, основываясь и на других принципах [12, 13].

5. В этом пункте мы докажем теорему о втором ω-периодическом решении, предположив, что у системы (1) существует нулевое ω-периодическое решение. Отметим, в частности, что система (1) имеет нулевое решение, если выполнено условие (7).

Применим теорему 5 к вычислению вращений, порожденных векторными полями, соответствующими линейным системам (6), (8).

Введем в системы параметр

$$y'(t) = C_k(t)\,y(t) + D_k(t)\,y(t - \lambda h) + \lambda E_k(t) \int\limits_{-H}^{0} \beta_k(s)\,y(t+s)\,ds, \qquad (12)$$

или, при $H < \infty$,

$$y'(t) = C_k(t)\,y(t) + D_k(t)\,y(t - \lambda h) + E_k(t) \int\limits_{-\lambda H}^{0} \beta_2(s)\,y(t+s)\,ds,$$

$$k = 1,\ 2. \qquad (13)$$

Как следствие пункта 5, получаем: операторы $L_\omega^k(x^0, \lambda)$ вполне непрерывны по совокупности (x^0, λ).

Предположим, что системы (12), (13) имеют при всех λ только нулевое ω-периодическое решение. Пусть, далее, системы

$$y'(t) = [C_k(t) + D_k(t)]\,y(t) \qquad (k = 1, 2), \qquad (14)$$

приводимы невырожденным вещественным преобразованием к системе с постоянными коэффициентами. Пусть все характеристические показатели систем (14) отличны от нуля, причем если $\nu = ir$, то $r \neq 2\pi\omega^{-1} j$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Обозначим через α_1, α_2 числа положительных характеристических показателей системы (14) (учитывая и их кратность); тогда вращение поля $L_\omega^k(x^0, 0) - x^0$, а значит и поля $L_\omega^k(x^0, 1) - x^0 = L_\omega^k x^0 - x^0$, вычисляется по формуле $\gamma_k = (-1)^{\alpha_k}$ $(k = 1, 2)$.

Имеет место следующая

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (7). *Пусть* α_1 *и* α_2 *имеют различную четность. Тогда система* (1), *кроме нулевого, имеет еще и отличное от нуля ω-периодическое решение.*

Пусть матрицы C_k, D_k, E_k, $(k = 1, 2)$ постоянны, тогда верна теорема 6, если характеристические уравнения

$$\left| \mu I - C_k - D_k e^{-\mu\lambda h} - \lambda E_k \int\limits_{-H}^{0} \beta_k(s)\,e^{\mu s} ds \right| = 0,$$

или, при $H < \infty$,

$$\left| \mu I - C_k - D_k e^{-\mu\lambda h} - E_k \int\limits_{-\lambda H}^{0} \beta_k(s)\,e^{\mu s}\,dz \right| = 0$$

при всех λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, не имеют корней вида $\mu = 2\pi i\omega^{-1} m$, $m = 0, \pm 1, \ldots$. Здесь α_1 и α_2 означают числа положительных собственных значений матриц $C_1 + D_1$, $C_2 + D_2$.

В заключение отметим, что если в систему (1) входят несколько параметров h, то исследование существенно не меняется.

Автор признателен Ю. Г. Борисовичу за обсуждение данной статьи. Автор благодарен также А. Д. Мышкису и М. А. Красносельскому за ряд советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Г. Борисович, О методе Пуанкаре—Андронова в задаче о периодических решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием, ДАН СССР, т. 152, № 4, 1963.
2. А. Халанай, Асимптотическая устойчивость и малые возмущения периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, УМН, т. XVII, вып. 1 (103), 1962.
3. А. Н. Тихонов, О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики, Бюлл. МГУ, I, секция А, вып. 8, 1938.
4. А. Д. Мышкис, Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН, т. IV, вып. 5 (33), 1949.
5. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
6. А. Д. Мышкис, Замечание к статье Жданова «О приближенном решении систем дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом» УМН, т. XVI, вып. 2 (98), 1961.
7. В. І. Фодчук, Деякі теореми існування та єдності для диференціальних рівнянь з запізнюючим аргументом, ДАН УРСР, № 12, 1962.
8. М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Физматгиз, М., 1956.
9. Ж. Лере, Ю. Шаудер, Топология и функциональные уравнения, УМН, т. I, № 3—4, 1946.
10. М. А. Красносельский, А. И. Перов, О некоторых признаках существования периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Тр. Междунар. симпоз. по нелин. колеб., т. 2, Изд-во АН УССР, К., 1963.
11. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
12. М. А. Красносельский, Альтернативный принцип существования периодических решений для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, ДАН СССР, т. 152, № 4, 1963.
13. В. В. Стрыгин, Вычисление вращений некоторых специальных векторных полей, Автореф. диссертации, изд-во Воронежск. гос. ун-та, 1964.
14. М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, изд-во «Наука», М., 1966.

Поступила 28.V 1965 г.
Воронеж