Об оболочках голоморфности одного класса областей

М. Ширинбеков

1. В работе [1] (без доказательства) используется следующее утверждение: пусть D_1 и D_2 — две области (однолистные) пространства C^n n комплексных переменных. Если сумма (объединение) $G = D_1 \bigcup D_2$ область голоморфности, то оболочка голоморфности $H(D_1 \bigcap D_2)$ равна пересечению оболочек голоморфности областей D_1 и D_2, т. е.

$$H(D_1 \bigcap D_2) = H(D_1) \bigcap H(D_2).$$

2. В этой заметке мы докажем не только приведенное выше утверждение, но даже несколько более общее. Именно, имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть D_1 и D_2 — области (однолистные) пространства C^n и $D = D_1 \bigcap D_2$, $\partial' D_1$ — часть границы ∂D_1 области D_1, лежащая вне D_2, $\partial' D_2$ — часть границы ∂D_2 области D_2, лежащая вне D_1. Если для каждой точки $\zeta \in \partial' D_1$ в области D_1 и для каждой точки $\zeta \in \partial' D_2$*

в области D_2 существует барьер, то*

$$H(D) = H(D_1) \cap H(D_2).$$

3. Для доказательства сформулированной теоремы приведем некоторые предварительные результаты.

Теорема непрерывности (ср. [2]). Область D тогда и только тогда является областью голоморфности, когда справедливо следующее утверждение: пусть $\{S_\alpha\}$ — последовательность областей, лежащих вместе со своими границами ∂S_α на двумерных аналитических поверхностях* F_α, такова, что

$$S_\alpha \cup \partial S_\alpha \subset\subset D, \quad \lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha = S_0, \quad \lim_{\alpha\to\infty} \partial S_\alpha = T_0 \subset\subset D.$$

Тогда, если S_0 ограничено, то $S_0 \subset\subset D$.

Лемма. *Пусть D — область (однолистная), граница которой представляется в виде суммы (объединения) двух множеств Γ_1 и Γ_2 таких, что для каждой точки $\zeta \in \Gamma_1$ в области D существует барьер, для каждой точки $\zeta \in \Gamma_2$ существует шар σ_ζ с центром в ζ такой, что пересечение $O_\zeta = \sigma_\zeta \cap D$ состоит из областей голоморфности. Тогда D является областью голоморфности.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что D не является областью голоморфности. Тогда нарушается теорема непрерывности, т. е. существует последовательность двумерных областей S_α вместе с границами ∂S_α, лежащими в D, и лежащих на двумерных аналитических поверхностях F_α такая, что $S_\alpha \to S_0$, $\partial S_\alpha \to T_0$, $T_0 \subset\subset D$ и S_0 ограничено, но S_0 не содержится в D вместе со своим замыканием. Стало быть S_0 содержит некоторое множество μ точек границы ∂D. Ясно, что $\mu \subset H(D)$. Пусть d — расстояние множества μ до границы области $H(D)$ $(d = \inf_{z\in\mu} d(z)$, где $d(z)$ — расстояние от точки $z \in \mu$ до границы области $H(D))$. Поскольку μ содержится в компакте $\overline{S}_0 \cap \partial D \subset\subset H(D)$, где $\overline{S}_0$ — замыкание S_0, то $d > 0$. Кроме того, μ не может содержать ни одной точки множества Γ_1, ибо для каждой точки $\zeta \in \Gamma_1$, по условию, в области D существует барьер. Но так как $\mu \subset \partial D$, то $\mu \subset \Gamma_2$. Пусть, далее, $\widetilde{T}_0$ — некоторая окрестность компакта T_0, которая вместе со своим замыканием лежит внутри D и такая, что при $\alpha \geqslant \alpha_0$ содержит все ∂S_α. Окрестность $\widetilde{T}_0$ существует, ибо $T_0 \subset\subset D$ и $\partial S_\alpha \to T_0$. Пусть d' — расстояние области $\widetilde{T}_0$ до ∂D (которое больше нуля), ϱ — некоторое положительное число меньше, чем $\varrho' = \min(d, d') > 0$, и $B = H_\varrho(D) \cap D$, где

$$H_\varrho(D) = [z : d(z) > \varrho, \quad z \in H(D)]$$

— область (открытое множество) голоморфности. В силу выбора числа ϱ область $\widetilde{T}_0$ содержится в B вместе со своим замыканием и $\mu \subset\subset H_\varrho(D)$. Поскольку $\mu \subset \Gamma_2$, то $\mu \subset \partial B$. Так как $S_\alpha \cup \partial S_\alpha \subset F_\alpha$, $S_\alpha \cup \partial S_\alpha \subset\subset B$, $S_\alpha \to S_0$, $\partial S_\alpha \to S_0$, S_0 ограничено, и S_0 не лежит внутри B, то B не является областью голоморфности (нарушается теорема непрерывности). Покажем, с другой стороны, что B — псевдовыпуклая область (в смысле Картана), а значит, область голоморфности. Из полученного противоречия будет следовать справедливость доказываемой леммы. Ясно, что $\partial B = \gamma_1 \cup \Gamma_2'$, где Γ_2' — часть множества Γ_2, лежащая в замыкании $H_\varrho(D)$, а γ_1 — часть границы области $H_\varrho(D)$, лежащая в замыкании области D. Пусть l_1 — часть

---

* Будем говорить, что для точки $\zeta \in \partial D$ в области D существует барьер, если в D существует голоморфная функция, имеющая в ζ особенность.

** Размерность понимается в смысле вещественных переменных. Запись $S \subset\subset T$ означает, что S содержится в T вместе со своим замыканием.

множества γ_1, лежащая в области D, $\gamma = \gamma_1 \cap \Gamma_2$, а l_2 — множество тех точек Γ_2', которые лежат внутри $H_\varrho(D)$. Ясно, что $\partial B = l_1 \cup l_2 \cup \gamma$.

Предположим, $\zeta \in l_1$. Так как ζ — внутренняя точка области D, то найдется такой шар σ_ζ с центром в точке ζ, который лежит внутри D. Тогда $O_\zeta' = \sigma_\zeta \cap H_\varrho(D) \subset B$ и, следовательно, $O_\zeta' = O_\zeta = \sigma_\zeta \cap B$. Поскольку O_ζ' — область голоморфности (как пересечение областей голоморфности), то O_ζ — тоже область голоморфности.

Пусть $\zeta \in l_2$. Так как ζ — внутренняя точка $H_\varrho(D)$, то существует такой шар σ_ζ с центром в ζ, что $\sigma_\zeta \subset H_\varrho(D)$. Отсюда вытекает, что $O_\zeta'' = \sigma_\zeta \cap D = O_\zeta = \sigma_\zeta \cap B$. Выберем шар σ_ζ таким, чтобы O_ζ'' было областью голоморфности. Это возможно по условию ($\zeta \in \Gamma_2$). Следовательно, O_ζ — область голоморфности.

Наконец, пусть $\zeta \in \gamma$. Это значит, что $\zeta \in \Gamma_2$ и $\zeta \in \gamma_1$. Пусть σ_ζ — некоторый шар с центром в точке ζ такой, что $O_\zeta'' = \sigma_\zeta \cap D$ — область (открытое множество) голоморфности. Зафиксируем шар σ_ζ и рассмотрим $O_\zeta' = \sigma_\zeta \cap H_\varrho(D)$. Так как $H_\varrho(D)$ — область голоморфности, то $O_\zeta' = \sigma_\zeta \cap H_\varrho(D)$ — тоже область (открытое множество) голоморфности. Поскольку $O_\zeta = \sigma_\zeta \cap B = \sigma_\zeta \cap H_\varrho(D) \cap D = \sigma_\zeta \cap H_\varrho(D) \cap \sigma_\zeta \cap D = O_\zeta' \cap O_\zeta'' = O$ и O — область голоморфности (как пересечение областей голоморфности [3]), то O_ζ — область голоморфности.

Таким образом, какова бы ни была точка $\zeta \in \partial B$, существует такой шар σ_ζ с центром в ζ, что $O_\zeta = \sigma_\zeta \cap B$ — область голоморфности, т. е. B — псевдовыпукла, а значит, — область голоморфности. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Как видно из доказательства леммы, она будет справедливой и для неоднолистных областей, если пересечение неоднолистных областей определить как пересечение областей наложения (ср. [3], стр. 146).

4. Доказательство теоремы 1. Ясно, что всякая функция голоморфности в D_1 (в D_2) голоморфна в $D_1 \cup H(D)$ (в $D_2 \cup H(D)$). Так как

$$[D_1 \cup H(D)] \cap [D_2 \cap H(D)] = H(D),$$

то для доказательства теоремы осталось показать, что $D_1 \cup H(D)$ и $D_2 \cup H(D)$ — области голоморфности (отсюда будет следовать, что $H(D_1) = D_1 \cup H(D)$ и $H(D_2) = D_2 \cup H(D)$). Покажем, что $D_1 \cup H(D)$ — область голоморфности. Аналогично можно будет установить, что $D_2 \cup H(D)$ — область голоморфности.

Пусть Γ — граница области $D_1 \cup H(D)$, $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \partial D_1$, Γ_1^0 — та часть Γ^0, которая лежит внутри D_2 и $\Gamma_2^0 = \Gamma^0 \setminus \Gamma_1^0$. Покажем, что для каждой точки $\zeta \in \Gamma^0$ выполняется одно из условий: 1) либо для точки ζ существует шар σ_ζ (с центром в ζ) такой, что $O_\zeta = \sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)]$ — область (открытое множество) голоморфности, 2) либо для точки ζ в области $D_1 \cup H(D)$ существует барьер.

Пусть $\zeta \in \Gamma_1^0$. Так как $\zeta \in \Gamma_1^0 \subset D_2$, то шар σ_ζ можно выбрать таким, чтобы $\sigma_\zeta \subset D_2$. Отсюда, если $z \in \sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)]$, то $z \in \sigma_\zeta \subset D_2$ и либо $z \in H(D)$ (и потому $z \in \sigma_\zeta \cap H(D)$), либо $z \in D_1$. Тогда $z \in D_1 \cap D_2 = D$ и опять $z \in \sigma_\zeta \cap H(D)$. Следовательно, справедливо включение

$$\sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)] \subset \sigma_\zeta \cap H(D).$$

Поскольку обратное включение очевидно, то доказано равенство

$$\sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)] = \sigma_\zeta \cap H(D).$$

Отсюда, так как $\sigma_\zeta \cap H(D)$ — область (открытое множество) голоморфности, то $\sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)]$ — тоже область голоморфности.

Таким образом, доказано, что любая точка $\zeta \in \Gamma_1^0$ удовлетворяет условию 1).

Пусть $\zeta \in \Gamma_2^0$. Ясно, что $\zeta \in \Gamma_2^0 \subset \partial D_2$. Возможны два случая: а) либо существует шар σ_ζ с центром в ζ такой, что множество $\sigma_\zeta \cap D_1$ пустое. Тогда, очевидно,

$$O_\zeta = \sigma_\zeta \cap [D_1 \cup H(D)] = \sigma_\zeta \cap H(D) = O'_\zeta$$

и O_ζ — область (открытое множество) голоморфности (для точки ζ выполняется условие 1)), б) либо для любого шара σ_ζ с центром в ζ множество $\sigma_\zeta \cap D_1$ не пустое. Тогда точка ζ оказывается предельной точкой области D_1. Поскольку $\zeta \in \partial D_2 \subset \Gamma$, то $\zeta \in \partial D_1$. Следовательно, $\zeta \in \partial D_1 \cap \partial D_2$. Отсюда вытекает, что $\zeta \in \partial' D_1$ и поэтому для точки ζ в области D_1 существует барьер. Тогда для точки ζ будет существовать барьер в области $D_1 \cup H(D)$, ибо $D_1 \cup H(D)$ — аналитическое расширение области D_1.

Таким образом, доказано, что для любой точки $\zeta \in \Gamma^0$ выполняется либо условие 1), либо условие 2).

Пусть Γ'_1 — множество тех точек $\zeta \in \Gamma$, для которых выполняется условие 1) и Γ'_2 — множество тех точек $\zeta \in \Gamma$, для которых выполняется условие 2). Из доказанного выше следует, что $\Gamma = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$. Поэтому $D_1 \cup H(D)$ — область голоморфности согласно лемме.

Теорема доказана.

5. Доказанная теорема 1 может быть перенесена на случай бесконечного числа областей D_t, $t \in I$ — некоторое множество вещественных чисел, в виде следующей теоремы:

Теорема 1′. *Пусть* $D = \bigcap_{t \in I} D_t$ *и* Γ_{t_0} — *часть* ∂D_{t_0}, $t_0 \in I$, *находящаяся вне области* $\bigcap_{t \neq t_0,\, t \in I} D_t$. *Если для каждой точки* $\zeta \in \Gamma_{t_0}$ *в области* D_{t_0} *(для любой* $t_0 \in I$*) существует барьер, то*

$$H(D) = \bigcap_{t \in I} H(D_t).$$

Доказательство этой теоремы можно провести по аналогии с доказательством теоремы 1.

Действительно, поскольку область $D_t \cup H(D)$ является аналитическим расширением области D_t, $t \in I$, и

$$\bigcap_{t \in I} \{D_t \cup H(D)\} = H(D),$$

то для доказательства теоремы 1′ осталось показать, что $D_t \cup H(D)$ — область голоморфности для каждой $t \in I$. Но это устанавливается так же как в теореме 1.

Искренне благодарю В. С. Владимирова за внимание и помощь при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Bros, Les problemes de construction d'enveloppes d'holomorphie en theorie quantique des champs (CERN. Geneva), 1962.
2. H. I. Bremermann, Complex convexity, Trans. amer Math. Soc., 82, 1956, 17—51.
3. Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.

Поступила 20.X 1964 г.
Душанбе