1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.44

О. Ю. Шмидт и конечные группы

Л. А. Шеметков

Математическое творчество Отто Юльевича Шмидта относится преимущественно к теории групп. Конечные группы его привлекали, как он писал в одной из своих работ, «разнообразными индивидуальными свойствами отдельных типов групп, при одновременном господстве весьма общих законов».

В первых своих работах (1912—1913 гг.) О. Ю. Шмидт нашел простое и изящное доказательство теоремы Ремака о прямых разложениях конечных групп. К этой теме он возвращается в 1929 г. и обобщает теорему Ремака на один класс операторных групп, необязательно конечных (см. [10]). Теорема, именуемая теоремой Ремака—Шмидта, сейчас входит в учебники по теории групп, являясь одной из фундаментальных теорем этой теории.

Другие работы О. Ю. Шмидта, относящиеся к конечным группам, за исключением [7] и [9], объединены одной общей идеей: исследовать группу, у которой заданные подгруппы обладают некоторым фиксированным свойством. Эта идея, как вспоминает С. А. Чунихин, выдвигалась и пропагандировалась О. Ю. Шмидтом еще в двадцатых—тридцатых годах на его лекциях, на руководимом им алгебраическом семинаре и в личных беседах с его учениками. В 1924 г. он пишет свою знаменитую работу «Группы, все подгруппы которых специальные» [5]. Через два года появляется его работа «Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп» [6], а в 1938 г. выходит в свет статья «Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп» [8]. Эти три работы оказали на развитие теории конечных групп в нашей стране и за рубежом большое влияние.

Продолжения работ О. Ю. Шмидта [6] и [8] составили целое направление. Первоначально исследования велись по пути классификации конечных групп по значениям $\rho(G)$ числа классов, содержащихся в конечной группе G сопряженных неинвариантных подгрупп. Исследования О. Ю. Шмидта были посвящены случаю $\rho(G) \leqslant 2$, в котором G всегда разрешима. П. И. Трофимов доказал [11], что при $\rho(G) < 7$ конечная группа G разрешима, а при $\rho(G) = 7$ может быть и простой. П. И. Трофимов установил также разрешимость конечной группы G, для которой $\rho(G) < \tau(G) + 2$, где $\tau(G)$ — число различных простых делителей порядка группы G. Эти исследования были продолжены в направлении П-свойств Е. Н. Тороповым и В. П. Громыко [12—14], а также Н. Ито [15], Н. Ито и Сепом [16], которые рассматривали вместо $\rho(G)$ число классов неизоморфных неинвариантных подгрупп. Еще более общий подход предпринял С. А. Сафонов [17—19], введя в рассмотрение классы изоордных подгрупп, т. е. классы подгрупп одинакового порядка. Число классов изоордных подгрупп рассматривалось уже в первых работах В. И. Сергиенко [20, 21] и Я. Г. Берковича [22]. Н. Ито установил [15], что конечная группа G, число классов неизоморфных неинвариантных подгрупп которой меньше $2\tau(G) + 2$, либо разрешима, либо изоморфна знакопеременной группе A_5. Уже эта теорема Н. Ито показала, что дальнейшее продвижение в этом направлении тесно связано с характеризациями различных типов простых конечных групп. Это нашло подтверждение в последующих работах (см., например, [23—27]).

Еще более обширное направление связано с работой О. Ю. Шмидта «Группы, все подгруппы которых специальные» [5]. В этой работе О. Ю. Шмидт исследовал строение конечной ненильпотентной группы, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группа такого типа в современной литературе называется группой Шмидта. Напомним основные свойства групп Шмидта, найденные самим О. Ю. Шмидтом в работе [5].

Пусть G — группа Шмидта. Тогда:

1) G разрешима;

2) порядок группы G равен $p^\alpha q^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, p и q — различные простые числа;

3) одна из силовских подгрупп (пусть это будет Q порядка q^β) инвариантна в G;

4) силовская p-подгруппа P группы G является неинвариантной и циклической;

5) если x — элемент порядка p^α, то x^p принадлежит центру группы G;

6) если F — наибольшая инвариантная подгруппа группы G, собственно содержащаяся в Q, то $|Q:F| = q^b$, где b — показатель числа q по модулю p;

7) если Q абелева, то $F = 1$.

Дальнейшим исследованием групп Шмидта занимался Ю. А. Гольфанд [28]. Наиболее полно результаты о группах Шмидта изложены в работе Л. Редеи [29].

Первый, кто заметил возможности больших приложений теоремы О. Ю. Шмидта, был С. А. Чунихин. Он обнаружил, что группы Шмидта могут быть применены для нахождения признаков нильпотентности и обобщенной нильпотентности, а также для нахождения ненильпотентных подгрупп у конечных групп [30—34]. С. А. Чунихин впервые стал рассматривать также различные обобщения групп Шмидта. В работе [35] С. А. Чунихин изучает конечную ненильпотентную pd-группу (т. е. группу, порядок которой делится на простое число p), все собственные pd-подгруппы которой нильпотентны; эта группа (типа S_p, как ее назвал С. А. Чунихин) оказалась либо группой Шмидта, либо прямым произведением группы порядка p на группу Шмидта порядка, не делящегося на p. В работе [36] исследуются Z_p-группы — не p-разложимые pd-группы, все собственные подгруппы которых p-разложимы; оказалось, что класс Z_p-групп совпадает с классом pd-групп Шмидта.

Группы Шмидта обобщались также Р. Бэром [37], С. А. Русаковым [38], Г. Паздерским [39], Са [40], Я. Г. Берковичем [41], М. И. Кравчуком [42]. В. М. Бусаркин и А. И. Старостин [43] рассматривали конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают нильпотентным расщеплением. Группы, близкие к группам Шмидта, изучали еще В. А. Белоногов [44], А. И. Старостин [45], Т. Хоукес [46]. «Похожими» на группы Шмидта оказались и несверхразрешимые конечные группы, все собственные подгруппы которых сверхразрешимы (Б. Хупперт [47] и К. Дёрк [48]; см. также обобщение Л. Я. Полякова [49]). Общие соображения по поводу изучения конечных разрешимых групп, все собственные подгруппы которых обладают некоторым свойством, рассматривались в работе [50].

На теореме О. Ю. Шмидта основывается доказательство классической теоремы Г. Виландта [51] о вложении подгрупп. Приложения теоремы О. Ю. Шмидта обусловлены тем, что каждая конечная ненильпотентная группа обладает по крайней мере одной подгруппой Шмидта. Таким образом, свойства конечной группы оказываются в тесной связи с наличием у нее той или иной системы шмидтовских подгрупп. Например, если все собственные ненильпотентные подгруппы конечной неразрешимой группы G являются группами Шмидта, то G изоморфна либо $SL(2,5)$, либо $PSL(2,5)$ (З. Янко [52]; см. также [53, 54]). Конечные разрешимые группы, у которых все вторые максимальные подгруппы нильпотентны, изучены В. А. Белоноговым [55]. Влияние свойств подгрупп Шмидта на свойства конечной группы исследовалось, например, в работах Э. М. Пальчика [56], Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [57], Л. А. Шеметкова [58], В. А. Ведерникова [59] и др.

Много работ было посвящено установлению нижней границы для числа неизоморфных подгрупп Шмидта (или близких к ним) в конечной группе. Этой проблеме посвящен цикл работ С. А. Чунихина (см. литературу в [60]), работы В. И. Сергиенко [61, 62] и др.

В 1926 г. О. Ю. Шмидт доказал, что конечная группа нильпотентна, если все ее максимальные подгруппы инвариантны. К настоящему времени накопилась уже солидная литература по изучению конечных групп с определенной насыщенностью их максимальных рядов инвариантными или обобщенно инвариантными подгруппами (Б. Хупперт [47], Я. Г. Беркович [63], В. Дескинс [64], Л. Я. Поляков [65], В. Д. Черток [66, 67], В. А. Ведерников и А. П. Кохно [68], Н. Г. Дука [69] и др.).

Нелегко сейчас представить себе О. Ю. Шмидта, склонившегося над математической рукописью в тесной каюте ледокола, пробивающегося через арктические льды. О. Ю. Шмидту приходилось работать и в таких условиях. Работа «Новое доказательство теоремы А. Кулакова в теории групп» [7] была им выполнена во время экспедиции на ледоколе «Г. Седов». Во время экспедиции на ледоколе «Челюскин» О. Ю. Шмидт работал над статьей «Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп» и готовил к переизданию свою книгу «Абстрактная теория групп».

В 1940 г. выходит последняя работа О. Ю. Шмидта, посвященная конечным группам [9]; в ней он устанавливает ошибочность одного утверждения Л. Вейснера о группах Фробениуса.

Громадная государственная и общественная деятельность оставляла О. Ю. Шмидту мало времени для занятия математикой. Тем не менее его работы, как видно из нашего небольшого обзора, оказали большое и активное воздействие на развитие теории конечных групп. Если же учесть, что О. Ю. Шмидт был основателем московской алгебраической школы и что многие советские алгебраисты являются либо его учениками, либо учениками его учеников, то мы поймем все величие его вклада в развитие советской алгебры.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ю. Шмидт, Абстрактная теория групп, Изд. 2-е, Гостехиздат, М.—Л., 1933.
2. O. U. Schmidt, Abstract theory of groups, Translated from the Russian, San Francisco, Calif.— London, 1966.
3. O. Schmidt, Über die Zerlerung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, Протоколы физ.-матем. об-ва при Киевском университете, 1912.
4. O. Schmidt, Sur les produits directs, Bull. Soc. Math. de France, **XLI**, 1913, 161—164.
5. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные, Матем. сб., т. 31, 1924.
6. О. Ю. Шмидт, Группы, имеющие только один класс неинвариантных подгрупп, Матем. сб., т. 33, 1926.
7. О. Ю. Шмидт, Новое доказательство теоремы А. Кулакова в теории групп, Матем. сб., т. 39, 1932.
8. О. Ю. Шмидт, Группы с двумя классами неинвариантных подгрупп, Труды семинара по теории групп, ГОНТИ, М.—Л., 1938.
9. О. Ю. Шмидт, О группах Frobenius'а, ДАН СССР, т. 26, 1940.
10. О. Ю. Шмидт, О бесконечных группах с конечной цепью, Math. Z., **29**, 1929, 34—41 (русский перевод в кн. «Труды семинара по теории групп», 1938).
11. П. И. Трофимов, О влиянии числа всех классов неинвариантных сопряженных подгрупп на свойства конечной неспециальной группы, Матем. сб., т. 33(75) : 1, 1953.
12. Е. Н. Торопов, Группы с заданным числом классов неинвариантных Пd-подгрупп, Уч. зап. Белорусск. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 2, 1958.
13. В. П. Громыко, Группы, порядки которых содержат максимально возможное число различных простых П-делителей при данном числе классов неинвариантных Пd-подгрупп, Уч. зап. Белорусск. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 2, 1958.

14. В. П. Громыко, Конечные группы, у которых число различных простых П-делителей порядка на единицу меньше числа классов неинвариантных сопряженных Пd-подгрупп, Уч. зап. Белорусск. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 8, 1958.
15. N. Itô, On the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in a finite group, Acta Sci. Math., **16**, N 1—2, 1955, 9—11.
16. N. Itô und J. Szep, Über nichtauflösbare endliche Gruppen, Acta Sci. Math., **17**, N 1—2, 1956, 76—82.
17. С. А. Сафонов, Группы с данным числом классов недостижимых изоордных Пd-подгрупп, Уч. зап. Белорусск. ин-та инж. ж.-д. трансп., вып. 8, 1958.
18. С. А. Сафонов, Группы с одним классом недостижимых изоордных Пd-подгрупп, ДАН СССР, т. 130, № 1, 1960.
19. С. А. Сафонов, Строение групп с малым числом классов недостижимых подгрупп, Конечные группы, «Наука и техника», Минск, 1966.
20. В. И. Сергиенко, О числе классов изоордных разрешимых неспециальных подгрупп конечных групп, ДАН БССР, т. 6, № 6, 1962.
21. В. И. Сергиенко, О насыщенности конечных групп разрешимыми неспециальными подгруппами, Сиб. матем. ж., т. 4, № 4, 1963.
22. Я. Г. Беркович, Некоторые критерии разрешимости конечных групп, Сиб. матем. ж., т. 4, № 4, 1963.
23. Я. Г. Беркович, Характеризация некоторых классов конечных групп, ДАН СССР, т. 151, № 5, 1963.
24. Я. Г. Беркович, О существовании неинвариантных разрешимых подгрупп у конечной неразрешимой группы, Матем. сб., т. 66, № 3, 1965.
25. Я. Г. Беркович, Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы, Конечные группы, «Наука и техника», Минск, 1966.
26. М. П. Лельчук, Конечные группы с «малым» числом классов изоордных разрешимых нерадикальных подгрупп, Сиб. матем. ж., т. 6, № 5, 1965.
27. М. П. Лельчук, О неразрешимых группах, близких по строению к разрешимым, Конечные группы, «Наука и техника», Минск, 1966.
28. Ю. А. Гольфанд, О группах, все подгруппы которых специальные, ДАН СССР, т. 60, № 8, 1948.
29. L. Rédei, Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen, Publ. Math. Debrecen, **4**, 1956, 303—324.
30. С. А. Чунихин, О специальных группах, Матем. сб., т. 36:2, 1929.
31. С. А. Чунихин, О специальных группах. II, Матем. сб., т. 40:1, 1933.
32. С. А. Чунихин, О существовании подгрупп у конечной группы, Труды семинара по теории групп, ГОНТИ, М.—Л., 1938.
33. С. А. Чунихин, О разложении π-разрешимых групп в прямое произведение подгрупп, ДАН СССР, т. 147, № 5, 1962.
34. С. А. Чунихин, О комплектах неспециальных подгрупп и p-нильпотентности конечных групп, Матем. сб., т. 62(104):1, 1963.
35. С. А. Чунихин, Über Gruppen mit vorgegebenen Untergruppen, Матем. сб., т. 4 (46):3, 1938.
36. И. К. Чунихина, С. А. Чунихин, О p-разложимых группах, Матем. сб., т. 15(57):2, 1944.
37. R. Baer, Classes of finite groups and their properties, Illinois J. Math., **1**, N 2, 1957, 115—187.
38. С. А. Русаков, О группах с максимальными подгруппами данного вида, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 1968.
39. G. Pazderski, Über maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Nachr., **26**, № 6, 1964, 307—319.
40. Chih-Han Sah, On a generalization of finite nilpotent groups, Math. Z., **68**, 1957, 189—204.
41. Я. Г. Беркович, Квазинильпотентные группы, Сиб. матем. ж., т. 5, № 2, 1964.
42. М. И. Кравчук, Γ^p-квазинильпотентные группы, Сиб. матем. ж., т. 6, № 5, 1965.
43. В. М. Бусаркин, А. И. Старостин, Конечные группы, все собственные подгруппы которых обладают нильпотентным расщеплением, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 1, 1965.
44. В. А. Белоногов, Конечные группы с единственным классом ненильпотентных максимальных подгрупп, Сиб. матем. ж., т. 5, № 5, 1964.
45. А. И. Старостин, О минимальных группах, не обладающих данным свойством, Матем. заметки, т. 3, № 1, 1968.
46. T. O. Hawkes, On the class of Sylow tower groups, Math. Z., **105**, № 5, 1968, 393—398.
47. B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Z., **60**, 1954, 409—434.
48. K. Doerk, Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen, Math. Z., **91**, N 3, 1966, 198—205.
49. Л. Я. Поляков, Аналог групп О. Ю. Шмидта, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем., № 4, 1970.
50. R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes, Extreme classes of finite soluble groups, J. Algebra, **9**, N 3, 1968, 285—313.

51. H. Wielandt, Zum Satz von Sylow, Math. Z., 60, 1954, 407—408.
52. Z. Janko, Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen, Math. Z., **79**, N 5, 1962, 422—424.
53. Я. Г. Беркович, О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 3, 1964.
54. Я. Г. Беркович, К теореме Р. Бэра о максимальных подгруппах конечных групп, Сиб. матем. ж., т. 6, № 4, 1965.
55. В. А. Белоногов, Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами, Матем. заметки, т. 3, № 1, 1968.
56. Э. М. Пальчик, О конечных группах с перестановочными подгруппами, ДАН БССР, т. 11, № 5, 1967.
57. Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик, О перестановочности подгрупп конечной группы, Сиб. матем. ж., т. 8, № 4, 1967.
58. Л. А. Шеметков, Подгруппы сильно π-разрешимых групп, ДАН БССР, т. 8, № 8, 1964.
59. В. А. Ведерников, О конечных факторизуемых группах, Матем. заметки, т. 3, № 2, 1968.
60. С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, «Наука и техника», Минск, 1964.
61. В. И. Сергиенко, Классы и комплекты подгрупп конечных групп, ДАН СССР, т. 146, № 6, 1962.
62. В. И. Сергиенко, Ненильпотентные подгруппы и их комплекты, Конечные группы, «Наука и техника», Минск, 1966.
63. Я. Г. Беркович, Подгрупповая характеризация некоторых конечных групп, ДАН СССР, т. 169, № 3, 1966.
64. W. E. Deskins, A condition for the solvability of a finite group, Illinois J. Math., 5, N 2, 1961, 306—313.
65. Л. Я. Поляков, Конечные группы с перестановочными подгруппами, Конечные группы, «Наука и техника», Минск, 1966.
66. В. Д. Черток, Конечные группы с достижимыми подгруппами, Тр. II Респ. конференции математиков Белоруссии, Изд. Белорусск. ун-та, Минск, 1969.
67. В. Д. Черток, Недостижимые подгруппы и нормальное строение конечных групп, ДАН СССР, т. 173, № 2, 1967.
68. В. А. Ведерников, А. П. Кохно, О влиянии цепей подгрупп на свойства конечных групп, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем., № 3, 1967.
69. Н. Г. Дука, О p-субнормальных подгруппах конечных групп, ДАН БССР, т. 14, № 10, 1970.

Поступила 4.V 1971 г.
Гомельская лаборатория Института математики АН БССР