1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.41/47

Исследования О. Ю. Шмидта в теории бесконечных групп

С. Н. Черников

Результаты исследований О. Ю. Шмидта в теории бесконечных групп представлены его работами: «О бесконечных группах с конечной цепью», «О бесконечных специальных группах», «Бесконечные разрешимые группы» и «Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп» [1—4]. В первой из этих работ свое отношение к бесконечным группам О. Ю. Шмидт определяет следующим образом.

«Теория конечных групп разработана вплоть до деталей. Именно эти детали, разнообразные индивидуальные свойства отдельных типов групп, при одновременном господстве весьма общих законов, как раз и делают эту теорию особенно привлекательной. Но в широко разветвленных применениях понятия группы часто приходится встречаться с бесконечными группами, и потому возникает вопрос, в какой мере законы, установленные для конечных групп, могут быть перенесены на те или иные бесконечные группы. Нужно конечно отказаться от перенесения частностей; речь должна идти главным образом о самых общих основных теоремах. Задача состоит в том, чтобы из всех бесконечных групп с помощью соответствующего определения выделить такие классы, чтобы, с одной стороны, для них еще сохранялись основные теоремы теории конечных групп, с другой стороны, область применимости их была бы достаточно обширной».

Таким образом, в работе [1] задачу изучения бесконечных групп О. Ю. Шмидт рассматривает как задачу выделения достаточно широких классов бесконечных групп, на которое могут быть перенесены самые общие основные теоремы теории конечных групп. В своих дальнейших работах [2 и 3] задачу изучения бесконечных групп О. Ю. Шмидт рассматривает преимущественно как задачу выделения и исследования достаточно широких классов бесконечных групп на основе обобщений известных определений для тех или иных классов конечных групп. В работе [2] в качестве обобщения конечных нильпотентных групп рассматриваются бесконечные группы с нормализаторным условием. В работе [3] на основе понятия разрешимого множества [5] выделяются достаточно широкие классы бесконечных обобщенно разрешимых групп. Естественность подхода О. Ю. Шмидта к изучению бесконечных групп в работах [1—3] и удачное сочетание широты и естественности обобщений в этих работах с предельной простотой и прозрачностью изложения придают им особую яркость и привлекательность.

В работе [1] в качестве основной теоремы для перенесения на бесконечные группы взята известная теорема об изоморфизме разложений конечной группы в прямые произведения неразложимых множителей. Класс бесконечных групп, для которых сохраняется эта теорема, выделяется с помощью следующего определения. Группами с конечной цепью называются группы, в которых ни от какой инвариантной подгруппы не может исходить ни убывающая, ни возрастающая бесконечная нормальная цепь подгрупп. Ясно, что в этом определении достаточно рассматривать лишь убывающие нормальные цепи подгрупп, исходящие от самой группы, и возрастающие нормальные цепи, исходящие от единицы. Если группа $\mathfrak{G}$ не имеет исходящих от нее бесконечных убывающих нормальных цепей подгрупп, то говорят, что она удовлетворяет условию минимальности для ее убывающих нормальных цепей подгрупп. Если группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных возрастающих нормальных цепей подгрупп, то говорят, что она удовлетворяет условию максимальности для нормальных цепей подгрупп. Таким образом, группа с конечной цепью — это группа, удовлетворяющая одновременно двум сформулированным условиям.

Изложение в статье [1] ведется в предположении, что рассматриваемые в ней группы имеют некоторую область операторов, а все выделяемые в них подгруппы допустимы относительно операторов; рассматриваемые в статье [1] изоморфизмы предполагаются также допустимыми (операторными). В частном случае, когда область операторов состоит из одного только тождественного оператора, это изложение дает соответствующие результаты для групп без операторов. В этом случае рассматриваемые условия минимальности и максимальности становятся более ограничительными чем в общем случае. Например, в отличие от общего случая, абелевы группы, удовлетворяющие им одновременно, обязательно конечны. Как широк класс безоператорных бесконечных групп, удовлетворяющих одновременно двум рассматриваемым условиям, пока не выяснено. Вопрос этот нелегок. Например, в этом классе групп должны содержаться бесконечные неабелевы группы, все истинные подгруппы которых конечны. Однако, пока не известно даже, существуют ли такие группы (проблема Шмидта)?

Из определения группы с конечной цепью вытекает, что каждый ее композиционный ряд конечен. В статье [1] доказывается (для операторных групп), что все композиционные ряды одной и той же группы с конечной цепью содержат одно и то же число членов и отмечается при этом, что на группы с конечной цепью переносится теорема Жордана — Гельдера о композиционных рядах: теорема об изоморфизме факторов любых двух композиционных рядов с точностью до порядка расположения факторов.

Основной результат статьи [1] — это следующая теорема.

Если операторная группа $\mathfrak{G}$ с конечной цепью может быть представлена двумя способами в виде прямого произведения неразложимых множителей

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2 \times \ldots \times \mathfrak{H}_k = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \times \ldots \times \mathfrak{F}_l,$$

то $k = l$, множители попарно центрально изоморфны, и в каждом произведении каждый множитель может быть заменен некоторым центрально изоморфным множителем из другого разложения.

Если в область операторов группы $\mathfrak{G}$ включить группу ее внутренних автоморфизмов, то неинвариантные допустимые подгруппы перестанут быть допустимыми и потому условия минимальности и максимальности из определения групп с конечной цепью превращаются соответственно в условие минимальности и в условие максимальности для допустимых нормальных делителей (для цепей допустимых нормальных делителей). Понятно, что класс безоператорных групп, удовлетворяющих условию минимальности и условию максимальности для нормальных делителей, шире класса безоператорных групп с конечной цепью.

В качестве весьма частных случаев из основного результата статьи [1] вытекает теорема Ремака о прямых произведениях конечных групп (с известным добавлением О. Ю. Шмидта о взаимной заменяемости центрально изоморфных факторов двух разложений, полученным им еще в студенческие годы) и аналогичная теорема Круля для одного класса бесконечных коммутативных групп. По-видимому, этого оказалось достаточным для того, чтобы замечательный результат О. Ю. Шмидта не вошел в литературу под названием теоремы Шмидта, что было бы справедливым; он называется то теоремой Ремака — Шмидта, то теоремой Круля — Шмидта и даже теоремой Ремака — Круля — Шмидта.

Теорема Шмидта вошла в золотой фонд теории групп. Вот что пишет о ней академик П. С. Александров в своих «Воспоминаниях об О. Ю. Шмидте» [6].

«Эта теорема такого ранга и значения, которые в каждой области математики насчитываются только единицами. Математика состоит из многих различных областей; в каждой из них имеется несколько фундаментальных фактов, вокруг которых концентрируются дальнейшие исследования. Теорема О. Ю. Шмидта в теории групп принадлежит именно к фундаментальным, большим открытиям, которые навсегда останутся в науке».

«Я помню заседание Геттингенского математического общества под председательством Гильберта, на котором О. Ю. Шмидт излагал свою теорему. Гильберт присутствовал не на всех заседаниях, ему было 64 года, уже начался последний период его деятельности, когда он берег свои силы, но на доклад О. Ю. Шмидта он пришел».

«Я помню впечатление, которое произвел этот доклад, блестящий не только по содержанию, но и по языку, по всей своей внешней форме. Впечатление было огромным, несмотря на то, что делался он в таком месте, где люди были избалованы и знали цену хорошим докладам; выступать перед ними было делом ответственным».

«Доклад О. Ю. Шмидта был одним из самых блестящих событий математической жизни Геттингена в летнем сезоне 1927 г., багатом большими научными открытиями (в этом сезоне в Геттингене впервые излагались, например, теории Биригофа, Винера и др.)».

Теорема Шмидта вызвала большое оживление в теории групп. Ее передоказывали и обобщали, ее применяли в теории колец, ее переносили в теорию структур (см. [7]). В цепи исследований, посвященных обобщениям теоремы Шмидта, сложилось целое направление общей теории групп, имеющее своей целью изучение прямых разложений групп (см. [7]).

Значение работы [1] далеко не исчерпывается установленной в ней теоремой Шмидта. Работа [1] является ярким примером использования условий конечности при изучении бесконечных групп. Под условием конечности в общей теории групп понимается любое такое свойство, присущее всем конечным группам, что существует хотя бы одна бесконечная группа, которая этим свойством не обладает. Используемые в работе [1] условия конечности — это ограничения, которые налагаются на бесконечные группы предположением о конечности цепей тех или иных подгрупп. Такого рода ограничения получили позднее название условий минимальности и максимальности. Систематическое исследование групп с условиями минимальности и максимальности для всех подгрупп, для нормальных делителей, для абелевых подгрупп, начавшееся в конце тридцатых годов, почти через десять лет после появления работы О. Ю. Шмидта [1], обогатило общую теорию групп понятиями и результатами фундаментального значения. По существу в ней открылись новые области исследования, и в связи с этим появилась новая проблематика (см. [8]).

Изучение произвольных групп с условиями минимальности и максимальности с первых же шагов натолкнулось на значительные трудности. В частности, для бесконечных групп с условием минимальности для любых подгрупп возникли два весьма трудных вопроса: 1) являются ли они счетными? и 2) являются ли они локально конечными? В общем случае эти вопросы все еще не решены; при некоторых дополнительных предложениях они были решены уже в 1939—1940 гг. в работах С. Н. Черникова [9—11]. В работе [9] бесконечные группы с условием минимальности для подгрупп рассматривались при дополнительном требовании несовпадения истинных подгрупп с их нормализаторами (нормализаторное условие). В ней было показано, что класс таких групп (бесконечные специальные группы) исчерпывается бесконечными локально конечными p-группами (p — любое простое число) с условием минимальности для подгрупп и их прямыми произведениями с конечным числом множителей. В работах [10 и 11] рассматривался более широкий класс групп с условием минимальности для подгрупп — класс локально разрешимых групп с этим условием. Для изучавшихся в работах [9—11] классов бесконечных групп с условием минимальности для подгрупп оба вопроса (1) и 2)) решались положительно. Однако в общем случае произвольных групп с условием минимальности для подгрупп никаких подходов к этим вопросам в работах [9—11] не намечалось. Впрочем, ввиду содержащихся в них результатов, положительное решение вопроса 2) в случае p-групп давало бы также и положительное решение вопроса 1) в этом случае.

Вопросу 2) посвящена упомянутая выше работа О. Ю. Шмидта [4]; этот вопрос решается в ней положительно для бесконечных p-групп с условием минимальности для подгрупп в предположении, что $p = 2$. В ней указываются также некоторые подходы к решению вопроса 2) и в случае p-групп с $p \neq 2$. Тематика, возникшая при исследовании групп с условием минимальности для подгрупп, и полученные при ее разработке результаты привлекли внимание О. Ю. Шмидта, и он уже в 1939 г. активно включился в ее разработку. Вот что пишет по этому поводу А. Г. Курош в своей статье об О. Ю. Шмидте: «Основоположник советской алгебраической школы» [12].

«Интересна история возникновения весьма значительной работы Отто Юльевича «О бесконечных специальных группах», опубликованной в 1940 г.

Однажды, зимой 1938/39 учебного года, я получил от своего бывшего ученика, свердловчанина С. Н. Черникова, рукописи двух его новых работ по бесконечным локально разрешимым группам. Понимая, что этими работами открывается новое направление в общей теории групп, и учитывая, что возникающая здесь проблематика будет близка сердцу каждого теоретико-групповика и что Отто Юльевич в свое время занимался специальными группами, хотя и конечными, я однажды очень подробно пересказал Отто Юльевичу содержание этих работ. Мне показалось, что он заинтересовался. Это подтвердилось на состоявшемся в ноябре 1939 г. Всесоюзном совещании по алгебре, когда Отто Юльевич в прениях по докладу С. Н. Черникова сказал, обращаясь к докладчику: «Иду на вы!» В результате появилась названная выше работа. Выполненная с обычным для Отто Юльевича мастерством, она содержала интересные результаты и остроумные примеры и сыграла существенную роль в дальнейшем развитии теории обобщенных нильпотентных и разрешимых групп».

Эта работа (цитируемая ниже под [2]) была выполнена за довольно короткий срок и уже весной 1940 г. О. Ю. Шмидт выступил с докладом о ней на одном из заседаний руководимого им семинара при МГУ. С большой радостью я принял приглашение О. Ю. Шмидта участвовать в этом заседании. В докладе подробно излагалось (с доказательствами) содержание законченной, но пока еще не опубликованной, его работы [2], посвященной бесконечным специальным группам. Интересные результаты работы и удивительная логичность и прозрачность их изложения в докладе произвели на меня, да, по-видимому, и на всех слушателей сильное впечатление.

Рассматривая в работе [2] произвольные бесконечные группы с нормализаторным условием, О. Ю. Шмидт получает для них ряд результатов и, в частности, теорему о том, что элементы конечного порядка в группе с нормализаторным условием составляют подгруппу. Рассматривая в [2] группы с нормализаторным условием, удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп, О. Ю. Шмидт дает новое изложение результатов, относящихся к бесконечным специальным группам, из работ [9—11], придавая им другую систему и более простые доказательства. Отмечая, что ввиду этих результатов всякая разрешимая p-группа с условием минимальности для подгрупп удовлетворяет нормализаторному условию, он ставит естественный вопрос, не является ли разрешимость здесь достаточной для существования нормализаторного условия и без условия минимальности? С помощью построения остроумного примера этот вопрос решается им отрицательно. При построении примера использована по существу конструкция сплетения групп, получившая со временем широкие применения в общей теории групп. В примере О. Ю. Шмидта циклическая группа простого порядка p сплетается с квазициклической p-группой. Группа, построенная О. Ю. Шмидтом, интересна во многих отношениях и, несомненно, заслуживает самого детального изучения.

В работе [2] впервые вводится в рассмотрение условие минимальности для абелевых подгрупп и вместе с ним в общую теорию групп приходит интересный вопрос, будет ли оно эквивалентно условию минимальности для всех подгрупп. В работе [2] условие минимальности для абелевых подгрупп налагается на фактор-группы всех подгрупп в рассматриваемых группах; в работе [2] показано, что для групп с нормализаторным условием такое ограничение оказывается эквивалентным условию минимальности для всех подгрупп. Позднее в работе [13] было установлено, что как в случае групп с нормализаторным условием, так и в более общем случае локально разрешимых групп, условие минимальности для абелевых подгрупп равносильно без каких бы то ни было дополнительных ограничений условию минимальности для всех подгрупп. В действительности в работе [13] было доказано, что бесконечная локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп, является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Так как ранее в работах [10, 11] аналогичное предложение было получено для бесконечных локально разрешимых групп при условии минимальности для всех подгрупп, то вместе с этим и получилась интересующая нас эквивалентность. Вопрос об эквивалентности рассматриваемых условий минимальности в общем случае решен (отрицательно) лишь совсем недавно [14].

Как уже отмечалось, в связи с изучением бесконечных групп с условиями минимальности и максимальности в общей теории групп появились новые понятия; в частности, в связи с изучением бесконечных групп с нормализаторным условием, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, появилось понятие локальной разрешимости (в начале для периодических групп, см. [10]). Локально разрешимой называется группа, в которой каждое конечное множество элементов порождает разрешимую группу. При изучении локально разрешимых групп возник вопрос о нахождении такого глобального свойства группы, которое было бы необходимым и достаточным условием ее локальной разрешимости. В связи с этим вопросом появилось понятие разрешимого множества [5], обобщающее понятие главного ряда конечной группы. Разрешимым множеством произвольной группы $\mathfrak{G}$ называется упорядоченное (по включению) множество ее нормальных делителей, включающее группу $\mathfrak{G}$ и ее единичную подгруппу, если оно содержит вместе с любыми своими членами и их объединение и пересечение и если его члены, между которыми не содержится других его членов (соседние члены), определяют абелевы фактор-группы. В работе [5] было показано, что для локально конечных групп существование разрешимого множества является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости. Каков в общем случае объем максимального класса групп, для которых существование разрешимого множества является глобальным свойством, равносильным свойству локальной разрешимости, осталось невыясненным. С другой стороны, никакого глобального свойства группы, эквивалентного свойству локальной разрешимости во всех случаях, найдено не было. При этих условиях естественно возникает мысль так изменить (ослабить) определение локальной разрешимости, чтобы интересующим нас глобальным свойством группы оказалось существование у нее разрешимого множества. В силу известных результатов А. И. Мальцева [15] для этого локально разрешимой группой достаточно считать группу, у которой каждая конечнопорожденная подгруппа обладает разрешимым множеством; разрешимость при этом становитя свойством группы иметь произвольное разрешимое множество (необязательно конечное). Однако при таком определении свойства разрешимости оно в отличие от свойства обычной разрешимости, вообще говоря, уже не переносится на фактор-группы. Достаточно сослаться здесь на случай свободных групп. Как известно, свободная группа имеет разрешимое множество, определяемое убывающим рядом ее последовательных коммутантов, и потому разрешима в смысле ослабленного определения разрешимости. Однако известно также, что среди фактор-групп свободных групп встречаются любые группы и, в частности, простые группы, не обладающие разрешимым множеством.

Таким образом, класс групп с разрешимым множеством (класс RI-групп [8]) не сохраняет одно из основных свойств класса разрешимых групп. Рассматривая в работе [3] класс групп с разрешимым множеством, О. Ю. Шмидт отмечает, что поэтому вряд ли этот класс групп можно считать таким расширением класса конечных разрешимых групп, которое сохраняет с ним достаточно общих свойств, чтобы распространить на него название разрешимых групп. Имея цельно определить наиболее широкий класс бесконечных групп, которые еще можно было бы считать разрешимыми в смысле некоторого рационального обобщения разрешимости конечных групп, О. Ю. Шмидт дает в работе [3] следующее определение разрешимости. Разрешимой называется группа, все фактор-группы любой подгруппы которой обладают разрешимыми множествами. Для таких групп О. Ю. Шмидт доказывает «локальную теорему»: если каждая конечнопорожденная подгруппа разрешима, то и сама группа разрешима. В работе [3] доказывается, что если группа $\mathfrak{G}$ имеет разрешимое множество, вполне упорядоченное по возрастанию, то она разрешима в указанном смысле.

В работе [3] предлагается классифицировать разрешимые группы по типу упорядоченности тех разрешимых множеств, которыми они обладают.

Разрешимыми A называются все разрешимые группы в смысле приведенного здесь определения разрешимости.

Разрешимыми B называются те разрешимые A группы, которые обладают хотя бы одним вполне упорядоченным по возрастанию разрешимым множеством.

Разрешимыми C называются те разрешимые A группы, которые обладают хотя бы одним вполне упорядоченным по убыванию разрешимым множеством.

Разрешимыми D называются группы одновременно разрешимые B и C.

Свойство B обобщает, очевидно, свойство конечных разрешимых групп иметь отличный от единицы абелев нормальный делитель; свойство C обобщает другое свойство конечных разрешимых групп — быть отличными от своего коммутанта.

В работе [3] построен пример p-группы, разрешимой B, которая совпадает со своим коммутантом, и пример p-группы, разрешимой C, которая не имеет отличных от единицы абелевых нормальных делителей. Первый пример показывает, что существуют группы разрешимые B, но не C, а второй — что существуют группы разрешимые C, но не B.

Выделенные О. Ю. Шмидтом классы групп имеют весьма большой объем. Достаточно отметить здесь, что разрешимыми A являются все локально разрешимые группы (т. е. группы, все конечнопорожденные подгруппы которых разрешимы в обычном смысле), а разрешимыми D — все группы, обладающие возрастающим центральным рядом. Разрешимыми A являются, в частности, и все локально конечные p-группы; однако этого сказать нельзя о p-группах, которые не удовлетворяют условию локальной конечности, так как среди них встречаются даже и простые группы (см. [16]). В связи с вопросом относительно объема класса групп разрешимых A возникает вопрос о том, какие группы помимо локально разрешимых он содержит.

В основу определения обобщенно разрешимых групп в работе [3] положено понятие разрешимого множества. Это понятие обобщается в ней до понятия слабо разрешимого множества. Если в определении разрешимого множества требования инвариантности его членов во всей группе заменить требованием инвариантности меньшего члена в большем, когда между ними не содержится других членов множества, то получается определение слабо разрешимого множества. Слабо разрешимое множество можно, очевидно, уплотнить до такого слабо разрешимого множества, в котором все факторы, определяемые соседними членами, будут циклическими группами простых порядков (периодическое множество [5]). Периодическое множество является, очевидно, обобщением композиционного ряда конечной разрешимой группы. Свойство группы иметь слабо разрешимое множество было принято позднее за определение обобщенной разрешимости в самом широком смысле (см. RN-группы в [8]).

При изучении обобщенно разрешимых групп в работе [3] выделяется случай группы с условием минимальности. Пользуясь условием минимальности для абелевых подгрупп, О. Ю. Шмидт получает в ней следующее обобщение теоремы о разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп, установленной в работах [10, 11].

Группа, имеющая разрешимое множество, вполне упорядоченное по возрастанию, и подчиненная условию минимальности для абелевых подгрупп самой группы и ее фактор-групп, является конечным расширением абелевой группы.

Как и работа [2], работа [3] играла существенную роль в развитии теории обобщенных нильпотентных и разрешимых групп. Возникающие в ней проблемы, несомненно, будут и далее привлекать к ней внимание исследователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ю. Шмидт, О бесконечных группах с конечной цепью, Избр. тр., Математика, Изд-во АН СССР, М., 1959.
2. О. Ю. Шмидт, О бесконечных специальных группах, Избр. тр., Математика, Изд-во АН СССР, М., 1959.
3. О. Ю. Шмидт, Бесконечные разрешимые группы, Избр. тр., Математика, Изд-во АН СССР, М., 1959.
4. О. Ю. Шмидт, Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, Избр. тр., Математика, Изд-во АН СССР, М., 1959.
5. С. Н. Черников, К теории локально разрешимых групп, Матем. сб., т. 13(55), 2—3, 1943.
6. П. С. Александров, Воспоминания об О. Ю. Шмидте, сб. Отто Юльевич Шмидт, Изд-во АН СССР, М., 1959.
7. А. Г. Курош, Алгебра II (группы кольца и структуры), Математика в СССР за тридцать лет, ОГИЗ, М.—Л., 1948.
8. А. Г. Курош, С. Н. Черников, Разрешимые и нильпотечтные группы, УМН, 2:3 (19), 1947.
9. С. Н. Черников, Бесконечные специальные группы, Матем. сб., т. 6(48):2, 1939.
10. С. Н. Черников, Бесконечные локально разрешимые группы, Матем. сб., т. 7 (49):1, 1940.
11. С. Н. Черников, К теории бесконечных специальных групп, Матем. сб., т. 7 (49):3, 1940.
12. А. Г. Курош, Основоположник советской алгебраической школы, сб. Отто Юльевич Шмидт, Изд-во АН СССР, М., 1959.
13. С. Н. Черников, О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб., т. 28 (70):1, 1951.
14. П. С. Новиков, С. И. Адян, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., т 32, № 5, 1968.
15. А. И. Мальцев, Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Учен. зап. Ивановского педагогического института. т. 1, 1941.
16. С. Н. Черников, Условия локальной конечности однослойных p-групп, ДАН СССР, т. 147, № 1, 1962.

Поступила 4.V 1971 г.
Институт математики АН УССР