1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.41/47

О проблеме Шмидта

С. Н. Черников

С именем О. Ю. Шмидта связан вопрос:

существует ли некоммутативная бесконечная группа, все истинные (собственные) подгруппы которой конечны? Именно этот вопрос и называют теперь проблемой Шмидта. Коммутативные (абелевы) бесконечные группы с отмеченным здесь свойством подгрупп, как известно, исчерпываются примарными абелевыми группами типа p^∞ по всевозможным простым числам p (квазициклические группы). Поэтому сформулированный вопрос равносилен вопросу: не будет ли квазициклической всякая бесконечная группа, все истинные подгруппы которой конечны? В общем случае, когда на бесконечные группы не налагается никаких дополнительных условий, кроме конечности всех истинных подгрупп, проблема Шмидта пока не решена. В частных же случаях, т. е. при наложении тех или иных дополнительных условий на бесконечную группу, все истинные подгруппы которой конечны, она неизменно оказывалась абелевой и, значит, квазициклической. Ниже отмечается ряд исследований, давших результаты такого рода. Ниже отмечаются также исследования, связанные с некоторыми расширениями проблемы Шмидта. Однако, прежде чем перейти к этим вопросам, коснемся несколько вопроса о возникновении проблемы Шмидта и приведем ее первоначальную формулировку, принадлежащую самому О. Ю. Шмидту.

1. Весной 1938 г. О. Ю. Шмидт передал мне через А. Г. Куроша приглашение выступить на его семинаре с докладом о результатах, полученных мною при перенесении на бесконечные группы известной теоремы Фробениуса о числе решений уравнения $X^n = A$ в конечных группах. Эти результаты опубликованы мною в статье [1]. С радостью и большим волнением я принял приглашение Отто Юльевича. Заседание, на котором слушался мой доклад, проводилось на квартире О. Ю. Шмидта; для меня это было первое из заседаний знаменитого шмидтовского семинара, в которых мне довелось участвовать. На заседании, кроме О. Ю. Шмидта и меня, присутствовали А. П. Дицман, П. Е. Дюбюк, А. Г. Курош, Л. Я. Окунев и еще 3—4 человека.

Первая часть доклада была посвящена доказательству установленной мною теоремы о конечности группы, удовлетворяющей следующим условиям:

1) все убывающие цепочки подгрупп конечны (условие минимальности для подгрупп);

2) порядок центра конечен;

3) множество элементов любого порядка конечно.

Считая такие группы бесконечными, А. И. Узков [2] перенес на них отмеченную здесь теорему Фробениуса.

Отмечая, что каждая бесконечная группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию 1), содержит бесконечную группу, все истинные подгруппы которой конечны, докладчик показал, что при дополнительном условии 3) такая подгруппа содержится в центре группы $\mathfrak{G}$; однако это несовместимо с условием 2). Таким образом, группы, рассматривавшиеся А. И. Узковым как бесконечные, в действительности оказались конечными.

Во второй части доклада рассматривалось некоторое (предлагаемое докладчиком) обобщение теоремы Фробениуса, справедливое для любых бесконечных групп.

При обсуждении доклада кто-то из слушателей (кажется, это был С. А. Чунихин), обращаясь к О. Ю. Шмидту и как бы продолжая начатый ранее разговор, отметил, что всякое обобщение дает, вообще говоря, начало новым обобщениям и что если, налагая те или иные ограничения на рассматриваемые группы, не исследовать при этом объем получаемых классов групп, то можно прийти к необобщающим обобщениям, подобным обобщению А. И. Узкова.

Выступивший затем О. Ю. Шмидт согласился с этим мнением и отметил при этом, что в доказательстве докладчика основную роль играло выделение в рассматриваемой группе бесконечной группы, все истинные подгруппы которой конечны и что известен, по-видимому, только один пример таких групп (что подтвердил присутствовавший на докладе А. Г. Курош) — силовские подгруппы мультипликативной группы всевозможных (комплексных) корней из единицы, так называемые примарные абелевы группы типа p^∞; О. Ю. Шмидт обратил при этом внимание на то, что и у докладчика бесконечная группа, все истинные подгруппы которой конечны, оказалась абелевой и, значит, примарной абелевой группой типа p^∞. Далее О. Ю. Шмидт, обращаясь к А. Г. Курошу, выразил удивление, что бесконечные группы, все истинные подгруппы которых конечны,— группы, находящиеся на стыке между конечными и бесконечными группами, выпали из поля зрения при изучении бесконечных групп и предложил считать одним из первоочередных вопросов для бесконечных групп «установление (выражение О. Ю. Шмидта) всех бесконечных групп, все собственные подгруппы которых конечны». Таким образом, сам О. Ю. Шмидт сформулировал свою проблему как проблему установления (описания) всех бесконечных групп, все истинные подгруппы которых конечны, а вовсе не как проблему существования бесконечной неабелевой группы с этим свойством. По-видимому, в то время он не сомневался в существовании неабелевых групп такого рода. Мне казалось тогда, что такие группы встретятся среди бесконечных p-групп и даже быть может уже среди бесконечных локально конечных p-групп.

У меня сложилось впечатление, что поставленный О. Ю. Шмидтом вопрос не вызвал особого интереса у участников семинара. И, по-видимому, не случайно А. Г. Курош, принимавший участие в заседании семинара, не включил этот вопрос в свой доклад «Обзор некоторых проблем о бесконечных группах», сделанный им 15 ноября 1939 г. на Всесоюзном совещании по алгебре Отделения физико-математических наук АН СССР [3].

2. Внимание алгебраистов проблема Шмидта начала привлекать несколько позднее в связи с изучением бесконечных неабелевых групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. Совокупность таких групп охватывает, очевидно, и все бесконечные неабелевы группы, все собственные подгруппы которых конечны. Еще в 1932 г. А. Г. Курошем было доказано, что произвольная бесконечная абелева группа с условием минимальности для подгрупп разлагается в прямое произведение конечной абелевой группы и конечного числа квазициклических групп; впрочем, этот факт непосредственно усматривается и из ранее известных результатов Прюфера об абелевых группах. В то время вопрос о строении неабелевых групп с условием минимальности не ставился и никаких гипотез об их строении не высказывалось.

Несколько позднее был поставлен вопрос об их счетности. А. Г. Курошем он был рекомендован в качестве одной из основных проблем теории бесконечных групп (см. [3]).

Изучение неабелевых групп с условием минимальности для подгрупп началось в 1938 г. в связи с предпринятой мною попыткой построить для бесконечных групп теорию, аналогичную теории конечных специальных (нильпотентных) групп, изложенной в книге О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп». Для построения теории такого рода потребовался класс таких бесконечных групп, в которых нормализаторное условие обеспечивает существование нетривиального центра. Оказалось, что этим свойством обладают все группы с условием минимальности для подгрупп. Так были выделены бесконечные специальные группы, т. е. бесконечные группы с условием минимальности для подгрупп, удовлетворяющие нормализаторному условию. При построении теории бесконечных специальных групп обнаружилось, что каждая бесконечная локально конечная p-группа с условием минимальности для подгрупп содержит квазициклическую подгруппу [4]. В силу этого результата бесконечная локально конечная p-группа, все собственные подгруппы которой конечны, не может быть отличной от квазициклической группы. Таким образом, среди локально конечных p-групп бесконечные неабелевы группы, все истинные подгруппы которых были бы конечными, не встречаются. Так как локально нильпотентные группы с условием минимальности для подгрупп являются прямыми произведениями локально конечных p-групп, удовлетворяющих этому условию, то отсюда вытекает, что интересующие нас группы не встречаются и среди локально нильпотентных групп.

В 1940 г. было установлено [5, 6], что любая бесконечная локально разрешимая группа с условием минимальности для подгрупп содержит абелев нормальный делитель конечного индекса, разлагающийся в прямое произведение конечного числа квазициклических групп (экстремальна). В силу этого предложения бесконечная локально разрешимая группа, все собственные подгруппы которой конечны, является квазициклической группой. Таким образом, оказалось, что при переходе от локально нильпотентных групп к локально разрешимым группам положение дел не меняется; кроме квазициклических групп никаких других бесконечных локально разрешимых групп с условием конечности для всех собственных подгрупп не существует. Позднее в 1951 г. было установлено, что бесконечная локально разрешимая группа является квазициклической даже при более слабом условии конечности одних только абелевых собственных подгрупп. В связи с этим возник вопрос о существовании бесконечной неабелевой группы, все абелевы подгруппы которой конечны, или, иначе говоря, вопрос о существовании бесконечной периодической группы, не содержащей бесконечных абелевых подгрупп. Так как для локально разрешимых групп этот вопрос был решен отрицательно, то естественно появилась мысль решать его для периодических групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами; известно, что класс таких групп значительно шире класса периодических локально разрешимых групп. В 1960 г. было установлено, что при дополнительном условии локальной конечности бесконечная группа, обладающая нормальной системой с конечными факторами, имеет бесконечную абелеву подгруппу [7]. Пользуясь этим результатом С. Н. Черникова, а также и ранее установленным его же результатом об экстремальности локально разрешимой группы с условием минимальности для абелевых подгрупп [8] и, кроме того, разрешимостью конечных групп нечетного порядка, М. И. Каргаполов [9] показал, что любая бесконечная локально конечная группа обладает бесконечными абелевыми подгруппами. Этот результат получили также Ф. Холл и Кулатилака [10]. Вместе с этим было доказано, что бесконечные неабелевы группы, все истинные подгруппы которых конечны, среди локально конечных групп не встречаются. Таким образом, проблема Шмидта была решена отрицательно (в приведенной в начале данной статьи ее формулировке) для локально конечных групп.

Поэтому вопрос о локальной конечности бесконечных групп, все собственные подгруппы которых конечны, приобретает важное значение. Проблему Шмидта можно формулировать теперь как вопрос о существовании таких бесконечных групп с конечным множеством образующих элементов, все собственные подгруппы которых конечны. Для p-групп проблему Шмидта можно было формулировать в таком виде уже в 1939 г. (после работы [4]). И, по-видимому, именно в связи с этим О. Ю. Шмидт в своей замечательной работе «Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп» ставит вопрос о существовании бесконечной группы с условием минимальности для подгрупп, которая не была бы локально конечной, расширяющий в определенном смысле вопрос о существовании бесконечной группы с конечным множеством образующих элементов, все собственные подгруппы которой конечны. Рукопись этой работы была найдена при разборе математических рукописей Отто Юльевича, она датирована сентябрем 1947 г. и впервые была опубликована в 1959 г. [11]. В 1962 г. работа была переведена на немецкий язык и вышла в сборнике [12] вместе с работами П. С. Новикова [13] и С. Н. Черникова [14]. Поставленный О. Ю. Шмидтом вопрос рассматривается в ней по существу для p-групп. Предполагая существование группы с условием минимальности, не обладающей свойством локальной конечности, О. Ю. Шмидт показывает, что тогда существует такая группа с условием минимальности, которая обладает следующими свойствами: 1) группа простая; 2) все подгруппы локально конечны; 3) любая подгруппа входит в какую-то максимальную. В работе доказывается, что если такая группа H является p-группой, то в ней все максимальные подгруппы попарно взаимно просты. При $p = 2$ это предложение ведет к противоречию, доказывающему, что произвольная 2-группа с условием минимальности для подгрупп локально конечна. Из рассматриваемой работы видно, что дальнейшие усилия ее автора были направлены на доказательство теоремы о локальной конечности p-группы с условием минимальности для подгрупп при любом p и что, по-видимому, он не сомневался в ее справедливости. Однако получить доказательство такой теоремы не удалось. Из доказанного же частного случая теоремы вытекает (ввиду отмечавшегося уже результата С. Н. Черникова) отрицательное решение проблемы Шмидта для $p = 2$.

Как уже отмечалось, для проблемы Шмидта было получено отрицательное решение в классе локально конечных групп в силу доказанной М. И. Каргаполовым теоремы о существовании бесконечной абелевой подгруппы у любой бесконечной локальной конечной группы. Эта теорема давала некоторые основания надеяться, что бесконечная абелева подгруппа существует в произвольной (не только в локально конечной) бесконечной периодической группе. Однако П. С. Новиков и С. И. Адян [15] показали, что у найденных ими бесконечных периодических групп с конечным множеством образующих элементов все абелевы подгруппы конечны. Таким образом, обобщенная проблема Шмидта — вопрос о существовании бесконечных неабелевых групп, все собственные абелевы подгруппы которых конечны, решается положительно. Однако группы Новикова и Адяна не являются теми бесконечными неабелевыми группами, в которых конечны все собственные подгруппы, и потому проблема Шмидта о существовании бесконечных неабелевых групп с этим свойством становится теперь особенно интересной.

3. Коснемся некоторых вопросов, охватывающих предложенный О. Ю. Шмидтом вопрос установления (описания) всех бесконечных групп, все истинные подгруппы которых конечны, и некоторых возникающих при этом проблем, определенным образом связанных с проблемой Шмидта, как проблемой существования бесконечной неабелевой группы, все собственные подгруппы которых конечны. Бесконечные группы, все собственные подгруппы которых конечны, входят в класс групп с условием минимальности для подгрупп и составляют в нем истинную часть и потому во-

прос описания всех бесконечных групп с условием минимальности для подгрупп охватывает вопрос, предложенный О. Ю. Шмидтом. Выше отмечалось, что при изучении бесконечных локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп еще в 1940 г. было установлено, что они содержат абелевы подгруппы конечного индекса, а значит, и абелевы нормальные делители конечного индекса. В связи с этим уже тогда возникло предположение о существовании абелевой подгруппы конечного индекса у любой группы, удовлетворяющей условию минимальности для подгрупп, и было сформулировано в виде проблемы (получившей название проблемы Черникова [16]): не будет ли всякая бесконечная группа с условием минимальности для подгрупп обладать абелевым нормальным делителем конечного индекса? Иначе говоря, существует ли группа с условием минимальности для подгрупп, не имеющая абелевых подгрупп конечного индекса? Если эта проблема решается отрицательно, то отрицательно решается и проблема Шмидта. Если проблема Шмидта решается положительно, то положительно решается и эта проблема.

Если бесконечные неабелевы группы, все истинные подгруппы которых конечны, существуют, то они составляют истинную часть класса INH-групп — бесконечных неабелевых групп, все бесконечные подгруппы которых являются нормальными делителями. Ясно, что вопрос описания всех INH-групп включает в себя, в частности, и вопрос, предложенный О. Ю. Шмидтом. В работе [17] дано полное описание INH-групп при дополнительном условии существования у них бесконечных абелевых подгрупп. В ней показано, что класс INH-групп, обладающих бесконечными абелевыми подгруппами, исчерпывается бесконечными гамильтоновыми группами и такими неабелевыми негамильтоновыми группами, которые являются конечными расширениями квазициклических групп с помощью конечных абелевых и конечных гамильтоновых групп. В связи с этим результатом возникает вопрос: существуют ли INH-группы, не имеющие бесконечных абелевых подгрупп? Если он решается отрицательно, то отрицательно решается и проблема Шмидта о существовании бесконечных неабелевых групп, все собственные подгруппы которых конечны. Положительное решение проблемы Шмидта означает, что положительно решается и поставленный вопрос.

Более широким, чем класс INH-групп, является класс $\overline{IH}$-групп — класс бесконечных неабелевых групп, все бесконечные неабелевы подгруппы которых являются нормальными делителями. Исследование $\overline{IH}$-групп при дополнительном условии существования у них нормальной системы с конечными факторами и даже при более общем условии локальной ступенчатости показало, в частности, что если при этих ограничениях коммутант $\overline{IH}$-группы бесконечен, то она имеет абелев нормальный делитель конечного индекса, удовлетворяющий условию минимальности для подгрупп (экстремальна) (см. [18, 19], а также соответствующую статью в данном номере журнала). Возникает вопрос: существует ли неэкстремальная $\overline{IH}$-группа с бесконечным коммутантом? Если он решается отрицательно, то отрицательно решается и проблема Шмидта о существовании бесконечных неабелевых групп, все собственные подгруппы которых конечны. Положительное решение проблемы Шмидта означает, что положительно решается и поставленный вопрос. Нетрудно было бы продолжить изложение вопросов, которые так или иначе связаны с проблемой Шмидта. Однако, нам кажется, что одних только изложенных выше вопросов достаточно для того чтобы вполне оценить влияние проблемы Шмидта на современные теоретико-групповые исследования. Теперь, когда уже решены две знаменитые проблемы Бернсайда: проблема о существовании бесконечных периодических групп с конечным множеством образующих элементов и проблема о разрешимости конечных групп нечетного порядка, проблема Шмидта становится ближайшей целью теоретико-групповых исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Перенесение одной теоремы Фробениуса на бесконечные группы, Матем. сб., т. 3(45):2, 1938.
2. A. I. Uzkow, Über ein Theorem von Frobenius, Матем. сб., т. 1(43), 1936.
3. Всесоюзное совещание по алгебре, Изв. АН СССР, сер. матем., № 4, 1940.
4. С. Н. Черников, Бесконечные специальные группы, Матем. сб., т. 6(48):2, 1939.
5. С. Н. Черников, Бесконечные локально разрешимые группы, Матем. сб., т. 7(49):1, 1940.
6. С. Н. Черников, К теории бесконечных специальных групп, Матем. сб., т. 7(49):3, 1940.
7. С. Н. Черников, О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами, Матем. сб., т. 52(94):1, 1960.
8. С. Н. Черников, О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб., т. 52(94):1, 1951.
9. М. И. Каргаполов, О проблеме О. Ю. Шмидта, Сиб. матем. ж., т. 4, № 1, 1963.
10. Ph. Hall, C. R. Kulatilaka, A property of lokally finite groups, J. London Math. Soc., **39**, 1964, 235—239.
11. О. Ю. Шмидт, Избранные труды, Математика, Изд-во АН СССР, М., 1959.
12. S. N. Tschernikow, O. J. Schmidt, P. S. Nowikow, Endlichkeitsbedingungen in der Gruppentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
13. Н. С. Новиков, О периодических группах, ДАН СССР, т. 127, 1959.
14. С. Н. Черников, Условия конечности в общей теории групп, УМН, т. XIV, № 5 (89), 1959.
15. П. С. Новиков, С. И. Адян, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, № 5, 1968.
16. А. Г. Курош, Теория групп, ОГИЗ, М.—Л., 1944.
17. С. Н. Черников, Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп, УМЖ, т. 19, № 6, 1967.
18. С. М. Черніков, Групи з умовою інваріантності для нескінченних неабелевих підгруп, ДАН УРСР, сер. А, № 6, 1970.
19. С. Н. Черников, Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп, ДАН СССР, т. 194, № 6, 1970.

Поступила 4.V 1971 г.

Институт математики АН УССР