УДК 519.41./47

Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы

С. Н. Черников

Бесконечные неабелевы группы, все бесконечные неабелевы подгруппы которых являются нормальными делителями (инвариантны), будем называть $\overline{IH}$-*группами*, учитывая название IH-групп, введенное в статье [1] для бесконечных неабелевых групп, в которых инвариантны бесконечные абелевы подгруппы. Класс $\overline{IH}$-групп содержит, в частности, бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все неабелевы подгруппы; произвольные неабелевы группы (как бесконечные, так и конечные) с этим условием изучались в работах [2 и 3] и получили там название *метагамильтоновых* групп. Класс $\overline{IH}$-групп содержит, в частности, и бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для всех бесконечных подгрупп, изучавшиеся в статье [4] (и получившие там название INH-групп), а также бесконечные неабелевы группы, не имеющие собственных бесконечных неабелевых подгрупп, рассматривавшиеся в статье [5]. Содержит он, очевидно, и бесконечные неабелевы группы, не имеющие собственных бесконечных подгрупп; определяемые так группы называются ниже группами Шмидта. Группы, выделяемые предлагаемым здесь определением $\overline{IH}$-групп, разумеется, можно рассматривать как одно из возможных обобщений групп Шмидта.

Как известно, вопрос о существовании групп Шмидта все еще не решен; он является основным вопросом выдвинутой О. Ю. Шмидтом в 1938 г. проблемы установления (описания) бесконечных групп, все собственные подгруппы которых конечны. Как известно, этот вопрос решился отрицательно сначала в классе локально конечных p-групп [6], а затем в более широком классе локально разрешимых групп [7]. Отрицательно решился он и в некоторых других классах групп (см. [8 и 9]). С другой стороны, нетрудно убедиться, что при ослаблении условия конечности всех собственных подгрупп в определении групп Шмидта до условия конечности одних только неабелевых собственных подгрупп бесконечные неабелевы группы с так ослабленным определением появляются уже среди локально конечных p-групп. В работе [5] дано описание локально разрешимых (а также локально конечных) групп такого рода. Однако выделенный так класс обобщенных групп Шмидта оказался весьма узким. Предлагаемое здесь определение $\overline{IH}$-групп существенно расширяет этот класс, что видно из получаемых ниже результатов.

В данной статье $\overline{IH}$-группы рассматриваются при дополнительном условии локальной ступенчатости, обобщающем как условие локальной разрешимости, так и условие локальной конечности. *Локально ступенчатой* называется в ней группа, в которой любая отличная от единицы конечнопорожденная подгруппа имеет подгруппу отличного от единицы конечного индекса. Локально ступенчатыми являются, очевидно, локально конечные группы, локально разрешимые (и, в частности, разрешимые) группы, а также группы, обладающие упорядоченной по включению полной системой подгрупп с конечными скачками и, в частности, группы, обладающие нормальной системой с конечными факторами. Ниже в § 1 доказывается предложение о разрешимости локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп, в силу которого для $\overline{IH}$-групп условие локальной ступенчатости оказывается равносильным как условию существования у них упорядоченной по включению полной системы подгрупп с конечными скачками, так и условию их локальной разрешимости.

Основной целью предлагаемой статьи является описание той части класса локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп, которую составляют содержащиеся в нем неметагамильтоновы группы. Эту его часть естественно рассматривать как приращение класса бесконечных локально ступенчатых метагамильтоновых групп, которое он получает при ослаблении определяющего его условия инвариантности всех неабелевых подгрупп до условия инвариантности одних только бесконечных неабелевых подгрупп.

Строение локально ступенчатых неметагамильтоновых $\overline{IH}$-групп определяется по существу двумя следующими результатами этой статьи.

Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не является метагамильтоновой группой, то она экстремальна, т. е. является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп (*следствие* 3.3).

Локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа с бесконечным коммутантом не является метагамильтоновой группой (*следствие* 3.1).

§ 1. Разрешимость локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп

Лемма 1.1. *Непериодическая локально ступенчатая неабелева группа $\mathfrak{G}$ имеет бесконечную убывающую цепочку неабелевых подгрупп, а значит, и собственную бесконечную неабелеву подгруппу.*

Доказательство. Пусть A и B — какие-нибудь неперестановочные элементы группы $\mathfrak{G}$. Присоединим к ним какой-нибудь элемент C бесконечного порядка. Подгруппа $\mathfrak{A}$, порожденная элементами A, B и C, является бесконечной неабелевой группой. Ввиду предположения о локальной ступенчатости группы $\mathfrak{G}$ и теоремы Пуанкаре эта подгруппа имеет отличный от нее нормальный делитель $\mathfrak{A}_1$ конечного индекса. Подгруппа $\mathfrak{A}_1$ имеет конечное множество образующих элементов [10, стр. 208] и потому ввиду того же предположения и теоремы Пуанкаре в ней существует отличный от нее нормальный делитель $\mathfrak{A}_2$ конечного индекса и т. д. Если все члены бесконечной убывающей цепочки

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \supset \ldots$$

являются неабелевыми группами, то доказываемое утверждение справедливо. Поэтому будем предполагать, что некоторый отличный от $\mathfrak{A}$ член этой цепочки является абелевой группой. Но тогда непериодическая неабелева группа $\mathfrak{A}$ обладает нормальной системой с конечными факторами. В силу одного из результатов работы [5] отсюда вытекает существование в группе $\mathfrak{A}$ бесконечной убывающей цепочки неабелевых подгрупп, что доказывает интересующее нас утверждение и при сделанном предположении. Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Если бесконечная локально ступенчатая неабелева группа $\mathfrak{G}$ не содержит ни одной отличной от нее бесконечной неабелевой подгруппы, то она является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп* (*экстремальна*).

Доказательство. Ввиду леммы 1.1 группа $\mathfrak{G}$ при этих условиях периодична. Периодическая локально ступенчатая бесконечная неабелева группа, не имеющая отличных от нее бесконечных неабелевых подгрупп, либо локально конечна, либо имеет конечное множество образующих элементов. В первом случае лемма справедлива ввиду соответствующего предложения статьи [5]. Во втором случае ввиду локальной ступенчатости группы $\mathfrak{G}$ в ней существует отличная от нее подгруппа конечного индекса. Так как по условию леммы последняя абелева, то группа $\mathfrak{G}$ конечна, как конечнопорожденная периодическая группа, являющаяся конечным расширением абелевой группы. Получается противоречие. Следовательно, второй случай невозможен и лемма доказана.

Теорема 1.1. *Локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ разрешима.*

Доказательство. В самом деле, если $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ обладает бесконечной неабелевой подгруппой $\mathfrak{H}$, не имеющей собственных бесконечных неабелевых подгрупп, то последняя инвариантна в $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ абелева или гамильтонова. Фактор-группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{R}$ подгруппы $\mathfrak{H}$ по ее максимальной полной абелевой подгруппе $\mathfrak{R}$ конечна (ввиду леммы 1.2) и является либо конечной абелевой группой, либо такой конечной неабелевой группой, все собственные подгруппы которой абелевы. В обоих случаях группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{R}$, а значит и группа $\mathfrak{H}$, разрешима. Но тогда ввиду разрешимости группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ разрешима и группа $\mathfrak{G}$.

Пусть теперь группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных неабелевых подгрупп, которые не содержали бы собственных бесконечных неабелевых подгрупп. Тогда пересечение $\mathfrak{N}$ всех ее бесконечных неабелевых подгрупп либо конечная неабелева группа, либо конечная или бесконечная абелева группа. Так как фактор-группа группы $\mathfrak{G}$ по любой бесконечной неабелевой подгруппе абелева или гамильтонова, то второй коммутант группы $\mathfrak{G}$ содержится в подгруппе $\mathfrak{N}$. Поэтому фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ (подгруппа $\mathfrak{N}$, очевидно, инвариантна в группе $\mathfrak{G}$) разрешима. Если подгруппа $\mathfrak{N}$ абелева, то разрешимость группы $\mathfrak{G}$ вытекает уже отсюда. Пусть $\mathfrak{N}$ — неабелева группа и, значит, конечная неабелева группа. Централизатор $Z(\mathfrak{N})$ подгруппы $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{G}$ бесконечен и инвариантен в $\mathfrak{G}$. Из разрешимости группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ вытекает разрешимость группы

$$\mathfrak{N}Z(\mathfrak{N})/\mathfrak{N} \simeq Z(\mathfrak{N})/\mathfrak{N} \cap Z(\mathfrak{N})$$

и далее разрешимость группы $Z(\mathfrak{N})$, так как $\mathfrak{N} \cap Z(\mathfrak{N})$ — абелева группа. Но тогда в группе $Z(\mathfrak{N})$ ввиду ее разрешимости и бесконечности существует бесконечная абелева подгруппа $\mathfrak{A}$ (см. [11]). Рассмотрим бесконечную неабелеву подгруппу $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{S}$ — минимальная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{N}$; так как подгруппа $\mathfrak{S}$ разрешима, то разрешима и группа $\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_1$ — абелев нормальный делитель конечного индекса группы $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Группа $\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1$ ввиду ее неабелевости и бесконечности инвариантна в $\mathfrak{G}$, а значит, и в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Так как фактор-группа $\mathfrak{N}\mathfrak{A}/\mathfrak{S}\mathfrak{A}_1$ абелева или гамильтонова, то отсюда вытекает разрешимость группы $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, а значит и разрешимость подгруппы $\mathfrak{N}$. Но тогда ввиду отмеченной уже разрешимости группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ получаем разрешимость группы $\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

В силу результатов [5] из доказанной теоремы вытекают следующие предложения.

Следствие 1.1. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не имеет бесконечных убывающих цепочек неабелевых подгрупп (удовлетворяет условию минимальности для неабелевых подгрупп), то она экстремальна.*

Следствие 1.2. *Любая фактор-группа локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы локально ступенчата.*

Следствие 1.3. *Периодическая локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа локально конечна.*

§ 2. Конечность коммутанта локально ступенчатой непериодической $\overline{IH}$-группы

Лемма 2.1. *Коммутант $\mathfrak{G}'$ непериодической локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ не может быть бесконечной неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}'$ — бесконечная неабелева группа. Ввиду теоремы 1.1 группа $\mathfrak{G}$ разрешима. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ не содержит элементов бесконечного порядка, то их содержит коммутант $\mathfrak{G}'$. Но тогда ввиду леммы 1.1 он либо абелев, либо содержит бесконечную убывающую цепочку бесконечных неабелевых подгрупп. Так как члены этой цепочки не содержат коммутант $\mathfrak{G}'$, то определяемые ими фактор-группы группы $\mathfrak{G}$ не могут быть абелевыми и, значит, гамильтоновы. Но тогда в группе $\mathfrak{G}'$ существует бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{R}$ как угодно большого (и быть может бесконечного) индекса с гамильтоновой фактор-группой $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Так как коммутант гамильтоновой группы имеет порядок 2 и так как коммутант $\mathfrak{P}/\mathfrak{R}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ содержится, очевидно, в группе $\mathfrak{G}'/\mathfrak{R}$, то отсюда вытекает, что он отличен от $\mathfrak{G}'/\mathfrak{R}$. Однако это невозможно, потому что ввиду абелевости группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ справедливо соотношение $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}$. Следовательно, в рассматриваемом случае коммутант $\mathfrak{G}'$ не может быть бесконечной неабелевой группой, что доказывает утверждение леммы в этом случае.

Пусть теперь фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ содержит элементы бесконечного порядка. В этом случае фактор-группы группы $\mathfrak{G}$ по бесконечным неабелевым подгруппам из $\mathfrak{G}'$ не могут быть гамильтоновыми (известно, что гамильтонова группа не содержит элементов бесконечного порядка) и, значит, абелевы. Отсюда вытекает, что подгруппа $\mathfrak{G}'$ не содержит отличных от нее бесконечных неабелевых подгрупп. Так как по предположению $\mathfrak{G}'$ бесконечная неабелева группа, то ввиду леммы 1.2 она является конечным расширением прямого произведения $\mathfrak{K}$ конечного числа квазициклических групп.

Покажем, что подгруппа $\mathfrak{K}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$. В самом деле, пусть R — элемент бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$, K — элемент группы $\mathfrak{K}$, не перестановочный с элементом R, и $\mathfrak{K}_1$ — инвариантная в $\mathfrak{G}$ конечная подгруппа из $\mathfrak{K}$, содержащая элемент K. Тогда $\mathfrak{K}_1\{R\}$ — бесконечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}_1\{R\}$ абелева или гамильтонова. Однако абелевой она быть не может, так как иначе $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{K}_1\{R\}$, что, очевидно, невозможно. Если же она гамильтонова, то в $\mathfrak{G}$ существует такая подгруппа $\mathfrak{D}$, в которой подгруппа $\mathfrak{K}_1\{R\}$ имеет индекс 2 и для которой фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ абелева. Но это невозможно, так как $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{D}$ и так как подгруппа $\mathfrak{D}$, очевидно, не имеет бесконечных периодических подгрупп. Следовательно, каждый элемент R бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$ перестановочен с каждым элементом из $\mathfrak{K}$. Пусть теперь S — какой-нибудь элемент конечного порядка группы $\mathfrak{G}$ и R_1 — фиксированный ее элемент бесконечного порядка. Тогда элемент SR_1 имеет бесконечный порядок (так как в рассматриваемом случае все элементы конечного порядка из группы $\mathfrak{G}$ составляют, очевидно, ее нормальный делитель) и, значит, перестановочен с каждым элементом из $\mathfrak{K}$. Так как с каждым элементом из $\mathfrak{K}$ перестановочен и элемент R_1, то отсюда вытекает, что с каждым элементом из $\mathfrak{K}$ перестановочен и элемент $S = (SR_1)R_1^{-1}$. Вместе с этим доказано, что подгруппа $\mathfrak{K}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$. Но тогда, пользуясь разложением $\mathfrak{G}' = \mathfrak{K}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — конечная неабелева подгруппа, получаем, что группа $\mathfrak{G}'$ слойно конечна (т. е. имеет лишь конечное множество элементов каждого порядка). Отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{G}'$ содержит конечное множество подгрупп, изоморфных подгруппе $\mathfrak{S}$. Поэтому в группе $\mathfrak{G}$ существует лишь конечное множество подгрупп, сопряженных с подгруппой $\mathfrak{S}$; ввиду инвариантности подгруппы $\mathfrak{G}'$, содержащей $\mathfrak{S}$, все они содержатся в $\mathfrak{G}'$. Порожденная ими подгруппа $\overline{\mathfrak{S}}$ является конечной неабелевой группой, инвариантной в $\mathfrak{G}$.

Пусть далее R — произвольный элемент бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$. Рассмотрим бесконечную неабелеву группу $\overline{\mathfrak{S}}\{R\}$; она инвариантна в $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{S}}\{R\}$ не может быть абелевой, так как иначе $\mathfrak{G}' \subset \overline{\mathfrak{S}}\{R\}$ что невозможно ввиду очевидной конечности периодических подгрупп группы $\overline{\mathfrak{S}}\{R\}$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{S}}\{R\}$ гамильтонова. Однако, как и выше, можно убедиться, что это невозможно. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен. Следовательно, коммутант $\mathfrak{G}'$ не может быть бесконечной неабелевой группой. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если коммутант бесконечной группы $\mathfrak{G}$ без кручения, не имеющей неинвариантных* (*бесконечных*) *неабелевых подгрупп, содержится в ее центре, то она абелева.*

Доказательство. Ясно, что это предложение достаточно доказать для частного случая, когда группа $\mathfrak{G}$ имеет два образующих элемента. Пусть H и K — ее образующие элементы и

$$[H, K] = H^{-1}K^{-1}HK = C$$

— их коммутатор. Предположим, что $C \neq 1$. Так как по предположению элемент C содержится в центре группы $\mathfrak{G}$, то из соотношения $K^{-1}HK = HC$ вытекает, что $K^{-1}H^nK = H^nC^n$ при любом натуральном числе n. Но тогда при любом натуральном n получаем, что $K^{-1}H^nK \neq H^n$ и потому при любом натуральном n группа $\{H^n, K\}$, порожденная элементами H^n и K, неабелева и в силу условия леммы инвариантна в $\mathfrak{G}$. Однако при $n > 1$ это невозможно, так как при $n > 1$ она не содержит элемент C, а значит не содержит и элемент $HKH^{-1} = KC$, что противоречит ее инвариантности. В том, что группа $\{H^n, K\}$ с $n > 1$ не содержит элемент C, нетрудно убедиться, пользуясь тем, что центры групп $\{H^n, K\}$ и $\{H, K\}$ совпадают соответственно с циклическими группами $\{C^n\}$ и $\{C\}$ и тем, что фактор-группа нильпотентной группы без кручения по ее центру не содержит отличных от единицы элементов конечного порядка. Полученное противоречие показывает, что $C = 1$. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ абелева, что и требовалось доказать.

Доказанное предложение содержится в [3].

Лемма 2.3. *Если бесконечная локально ступенчатая группа $\mathfrak{G}$ без кручения не имеет неинвариантных* (*бесконечных*) *неабелевых подгрупп, то она абелева.*

Доказательство. Ясно, что теорему достаточно доказать для частного случая, когда группа $\mathfrak{G}$ имеет два образующих элемента. Итак, пусть $\mathfrak{G}$ — группа с двумя образующими элементами, удовлетворяющая условиям леммы. Предположим, что она неабелева. Тогда она является $\overline{IH}$-группой и ввиду леммы 2.1 ее коммутант $\mathfrak{G}'$ абелев. Ввиду леммы 1.1 группа $\mathfrak{G}$ имеет бесконечную убывающую цепочку (бесконечных) неабелевых подгрупп. В силу условия доказываемого предложения последние инвариантны в $\mathfrak{G}$. Пользуясь тем, что определяемые ими фактор-группы абелевы или гамильтоновы, получаем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ бесконечна. Так как группа $\mathfrak{G}$ имеет конечное множество образующих элементов (два образующих элемента), то отсюда вытекает, что в фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ существуют элементы бесконечного порядка. Но тогда в группе $\mathfrak{G}$ должны существовать отличные от единицы циклические подгруппы, пересекающиеся по единице с подгруппой $\mathfrak{G}'$.

Если централизатор $Z(\mathfrak{G}')$ подгруппы $\mathfrak{G}'$ в группе $\mathfrak{G}$ содержит каждый элемент X, для которого $\{X\} \cap \mathfrak{G}' = 1$, то он совпадает с $\mathfrak{G}$. В самом деле, пусть $\{A\}$ — бесконечная циклическая подгруппа, для которой $\{A\} \cap \mathfrak{G}' = 1$, и R — любой элемент из $\mathfrak{G}$, для которого $\{R\} \cap \mathfrak{G}' \neq 1$. Тогда, очевидно, $\{AR\} \cap \mathfrak{G}' = 1$ и потому $\{AR\} \subset Z(\mathfrak{G}')$. Так как $\{A\} \subset Z(\mathfrak{G}')$, то отсюда получаем, что $R \in Z(\mathfrak{G}')$. Следовательно, подгруппа $Z(\mathfrak{G}')$ содержит любой элемент из $\mathfrak{G}$ и, значит, $Z(\mathfrak{G}') = \mathfrak{G}$. Но тогда ввиду леммы 2.2 группа $\mathfrak{G}$ должна быть абелевой, что противоречит исходному предположению о ней. Следовательно, в группе $\mathfrak{G}$ существует элемент B, для которого $\{B\} \cap \mathfrak{G}' = 1$ и $B \not\subset Z(\mathfrak{G}')$.

Известно, что разрешимая группа с абелевым коммутантом, имеющая конечное число образующих элементов, финитно аппроксимируема [12].

Пользуясь этим свойством группы $\mathfrak{G}$, нетрудно убедиться, что в ее коммутанте $\mathfrak{G}'$ содержится нормальный делитель $\mathfrak{N}$ группы $\mathfrak{G}$, имеющий как угодно большой конечный индекс в $\mathfrak{G}'$. Пусть индекс $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{G}'$ превосходит число 2. Рассмотрим бесконечную подгруппу $\mathfrak{N}\{B\}$, где B — отмеченный выше элемент. Если эта подгруппа неабелева, то она инвариантна в $\mathfrak{G}$ и тогда фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\{B\}$ абелева или гамильтонова. Однако абелевой она быть не может, так как, очевидно, $\mathfrak{G}' \not\subset \mathfrak{N}\{B\}$ и, значит, гамильтонова. Но тогда ее коммутант $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}\{B\}$ должен иметь порядок, равный двум. Пользуясь тем, что $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{K}$ и $\{B\} \cap \mathfrak{G}' = 1$, а также и тем, что индекс подгруппы $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{G}'$ превосходит 2, без труда приходим к противоречию. Следовательно, группа $\mathfrak{N}\{B\}$ абелева.

Рассмотрим далее подгруппу $\mathfrak{G}'\{B\}$. В ее фактор-группе $\mathfrak{G}'\{B\}/\mathfrak{N}$, очевидно, существует абелева подгруппа $\mathfrak{G}'\{B^n\}/\mathfrak{N}$, где n — некоторое натуральное число. Но тогда группа $\mathfrak{G}'\{B^n\}$, очевидно, удовлетворяет условию леммы 2.2 (так как подгруппа $\mathfrak{N}$ содержится в ее центре) и, значит, абелева и потому подгруппа $\mathfrak{N}\{B^n\}$ должна содержаться в центре группы $\mathfrak{G}'\{B\}$. Так как индекс подгруппы $\mathfrak{N}\{B^n\}$ в группе $\mathfrak{G}'\{B\}$, очевидно, конечен, то отсюда вытекает, что в группе $\mathfrak{G}'\{B\}$ не существует бесконечных классов сопряженных элементов. Но тогда ввиду отсутствия в группе $\mathfrak{G}'\{B\}$ отличных от единицы элементов конечного порядка она должна быть абелевой (см. [13]). Так как $B \not\in Z(\mathfrak{G}')$, то получается противоречие. Следовательно, рассматриваемая группа $\mathfrak{G}$ не может быть неабелевой. Лемма доказана.

Для частного случая локально разрешимых групп утверждение леммы дается в [3]; однако приведенное там его доказательство содержит некорректности.

Лемма 2.4. *Коммутант локально ступенчатой непериодической $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ не может быть абелевой группой без кручения.*

Доказательство. В самом деле, пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условию леммы, — абелева группа без кручения. Тогда ввиду неабелевости группы $\mathfrak{G}$ фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ не может быть группой без кручения (см. лемму 2.3). Следовательно, периодическая часть $\mathfrak{P}/\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ отлична от единицы. Подгруппа $\mathfrak{P}$ не может быть группой без кручения, иначе группой без кручения была бы и группа $\mathfrak{G}$ (так как $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ — группа без кручения), что ввиду леммы 2.3 противоречит предположению о ее неабелевости. Следовательно, в группе $\mathfrak{P}$ содержатся отличные от единицы элементы конечного порядка; пусть P любой из них. Рассмотрим бесконечную группу $\mathfrak{G}'\{P\}$. Если она неабелева, то ввиду леммы 1.1 в ней содержится бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{C}$ как угодно большого и быть может бесконечного индекса. Но тогда пересечение $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{G}'$ имеет как угодно большой и быть может даже бесконечный индекс в $\mathfrak{G}'$. С другой стороны, так как фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ абелева или гамильтонова, то ее коммутант $\mathfrak{K}/\mathfrak{C}$ имеет порядок не больший числа 2. Но тогда ввиду соотношения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{K}$ пересечение $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{G}'$ имеет в $\mathfrak{G}'$ индекс, не превосходящий числа 2. Получилось противоречие. Следовательно, группа $\mathfrak{G}'\{P\}$ абелева. Ввиду произвольности элемента P конечного порядка это означает, что все элементы конечного порядка из группы $\mathfrak{P}$ содержатся в централизаторе подгруппы $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{P}$. Так как этот централизатор является, очевидно, нильпотентной группой, то они составляют в нем, а значит и в группе $\mathfrak{G}$ инвариантную подгруппу $\mathfrak{H}$. Группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ является, очевидно, группой без кручения и потому в силу леммы 2.3 не может быть неабелевой. Но тогда $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{H}$, что ввиду периодичности подгруппы $\mathfrak{H}$ противоречит исходному предположению о коммутанте $\mathfrak{G}'$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. *Коммутант локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечного порядка.*

Доказательство. Если коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ содержит элементы бесконечного порядка, то ввиду леммы 2.1 он должен быть абелевым.

Пусть $\mathfrak{A}$ — периодическая часть группы $\mathfrak{G}'$. Тогда коммутант $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ является абелевой группой без кручения, что, однако, ввиду леммы 2,4 невозможно. Следовательно, коммутант $\mathfrak{G}'$ не содержит элементов бесконечного порядка.

Лемма 2.5. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ непериодической $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ конечен, то он абелев.*

Доказательство. Ввиду конечности инвариантной подгруппы $\mathfrak{G}'$ ее централизатор имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}$ и потому содержит элемент R бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$. Пусть подгруппа $\mathfrak{G}'$ неабелева и $\mathfrak{A}$ — некоторая ее минимальная неабелева подгруппа. Тогда $\mathfrak{A}\{R^8\}$ — бесконечная неабелева (и, значит, инвариантная) подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\{R^8\}$ не может быть гамильтоновой (так как содержит элемент порядка 8) и, значит, абелева и потому $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{A}\{R^8\}$, что, очевидно, невозможно, если $\mathfrak{A}\neq\mathfrak{G}'$. Следовательно, $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}'$ и, значит, $\mathfrak{G}'$ — минимальная конечная неабелева подгруппа. Но тогда группа $\mathfrak{G}'$ имеет такую инвариантную абелеву подгруппу $\mathfrak{D}$ и такие элементы A и B, что $\mathfrak{D}$ — минимальная инвариантная подгруппа из $\mathfrak{G}'$, содержащая элемент A, и $\mathfrak{G}'=\mathfrak{D}\{B\}$ (см. [14]). Возьмем группу $\mathfrak{B}=\mathfrak{D}\{BR^8\}$. Она является бесконечной неабелевой группой и, очевидно, не содержит подгруппу $\mathfrak{G}'$. Поэтому фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ не может быть абелевой. Однако не может быть она и гамильтоновой, так как содержит элемент $R\mathfrak{B}$ с порядком, делящимся на 8. Так как группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ должна быть либо абелевой, либо гамильтоновой, то получается противоречие. Лемма доказана.

Следствие 2.2. *Если коммутант $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ является конечной неабелевой группой, то группа $\mathfrak{G}$ — периодическая.*

Лемма 2.6. *Коммутант локально ступенчатой непериодической $\overline{IH}$-группы является конечной группой.*

Доказательство. Пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям леммы, бесконечен. Ввиду леммы 2.1 и следствия леммы 2.4 $\mathfrak{G}'$ — периодическая абелева группа. Пользуясь этим, доказательство леммы можно свести к рассмотрению следующих случаев.

1) Подгруппа $\mathfrak{G}'$ содержится в центре $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$. Пользуясь неабелевостью группы $\mathfrak{G}$, нетрудно убедиться, что в группе $\mathfrak{G}$ существует элемент бесконечного порядка, не содержащийся в центре $\mathfrak{Z}$. Пусть R — такой элемент и H — какой-нибудь элемент, не перестановочный с R. Группа $\mathfrak{R}=\{R,H\}$, порожденная элементами R и H, очевидно, нильпотентна (так как в рассматриваемом случае нильпотентна группа $\mathfrak{G}$). Так как она имеет при этом конечное множество образующих элементов, то конечное множество образующих элементов имеет и каждая ее подгруппа [15]. Но тогда ее коммутант $\mathfrak{R}'$ конечен (как подгруппа с конечным множеством образующих элементов из периодической абелевой группы $\mathfrak{G}'$). Группа $\mathfrak{R}$ как бесконечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Так как подгруппа $\mathfrak{G}'$ имеет бесконечное множество образующих элементов (как бесконечная периодическая абелева группа), то $\mathfrak{G}'\not\subset\mathfrak{R}$. Поэтому фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$ не может быть абелевой и, значит, должна быть гамильтоновой. Но тогда ее коммутант $\mathfrak{K}/\mathfrak{R}$ имеет порядок 2. Однако это невозможно, так как $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{K}$ и так как подгруппа $\mathfrak{K}$, очевидно, не содержит бесконечных периодических подгрупп. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен.

Пользуясь этим, нетрудно убедиться, что в группе $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям леммы и имеющей бесконечный коммутант $\mathfrak{G}'$, существуют элементы бесконечного порядка, не входящие в централизатор $Z(\mathfrak{G}')$ коммутанта $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}$.

2) Подгруппа $\mathfrak{G}'$ непримарна. Пусть $\mathfrak{A}$ — ее силовская p-подгруппа с $p\neq 2$ и $\mathfrak{B}$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}'$ ($\mathfrak{G}'=\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$). Обозначим через H некоторый элемент бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$, не содержащийся в централизаторе $Z(\mathfrak{G}')$; существование такого элемента установлено в п. 1).

Ясно, что элемент H не содержится хотя бы в одном из двух централизаторов $Z(\mathfrak{A})$ и $Z(\mathfrak{B})$ подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{G}$. Пусть $H \overline{\in} Z(\mathfrak{A})$. В этом случае бесконечная подгруппа $\mathfrak{A}\{H\}$ неабелева и, значит, инвариантна в $\mathfrak{G}$. Если порядок группы $\mathfrak{B}$ отличен от двух, то, сравнивая индекс пересечения $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{A}\{H\}$ в $\mathfrak{G}'$ с индексом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}'$ и пользуясь при этом тем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\{H\}$ гамильтонова (так как $\mathfrak{G}' \not\subset \mathfrak{A}\{H\}$, то абелевой она быть не может), без труда приходим к противоречию. Если $H \overline{\in} Z(\mathfrak{B})$, то при любом порядке группы $\mathfrak{B}$ противоречие получается при сравнении индекса пересечения $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{B}\{H\}$ в $\mathfrak{G}'$ с индексом $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{G}'$. Таким образом, если подгруппа $\mathfrak{G}'$ непримарна, то она разлагается в прямое произведение p-группы $\mathfrak{A}$ с $p \neq 2$ и группы $\mathfrak{B}$ второго порядка и тогда коммутант $\mathfrak{G}'/\mathfrak{B}$ $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ — бесконечная примарная абелева группа. Поэтому доказательство леммы сводится к рассмотрению случая, когда коммутант группы, удовлетворяющей условию леммы, является бесконечной примарной абелевой группой.

3) Подгруппа $\mathfrak{G}'$ примарна и содержит элементы как угодно больших порядков. В этом случае подгруппа $\mathfrak{G}'$ представима в виде суммы возрастающей цепочки подгрупп

$$\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_k \subset \ldots,$$

где $\mathfrak{G}_k$ — подгруппа элементов из $\mathfrak{G}'$ с порядками, не превосходящими p^k. Ввиду предложения, сформулированного в конце п. 1), в группе $\mathfrak{G}$ существует элемент H бесконечного порядка, не содержащийся в централизаторе $Z(\mathfrak{G}')$. Но тогда существует такой номер n, что элемент H не содержится в централизаторе подгруппы $\mathfrak{G}_n$ в $\mathfrak{G}$. Бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{G}_n\{H\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_n\{H\}$ гамильтонова (так как $\mathfrak{G}' \not\subset \mathfrak{G}_n\{H\}$, то абелевой она быть не может) и потому коммутант $\mathfrak{K}/\mathfrak{G}_n\{H\}$ последней имеет порядок 2. Так как $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{K}$, то отсюда вытекает, что порядки элементов группы $\mathfrak{G}'$ ограничены в совокупности вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемый случай невозможен.

4) Подгруппа $\mathfrak{G}'$ является бесконечной примарной абелевой группой с ограниченными в совокупности порядками элементов; пусть она является p-группой. Покажем, что максимальная элементарная абелева подгруппа $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{G}'$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$. Пусть H — элемент бесконечного порядка, не содержащийся в централизаторе $Z(\mathfrak{A})$ подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$; если все элементы бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$ содержатся в $Z(\mathfrak{A})$, то, очевидно, подгруппа $\mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$. Пусть A — элемент из $\mathfrak{A}$, не перестановочный с элементом H. Бесконечная неабелева подгруппа $\{A, H\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и определяет абелеву или гамильтонову фактор-группу $\mathfrak{G}/\{A, H\}$. Но тогда пересечение $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}' \cap \{A, H\}$ должно иметь конечный индекс в $\mathfrak{G}'$ и, значит, является бесконечной группой. Так как группа $\mathfrak{B}$ порождается элементами $B_k = H^{-k}AH^k$, где k — любое целое число, то отсюда вытекает, что эти элементы линейно независимы над полем вычетов по модулю p (в смысле аддитивной записи групповой операции в $\mathfrak{A}$). Но тогда

$$\mathfrak{B} = \ldots \times \{B_{-2}\} \times \{B_{-1}\} \times \{B_0\} \times \{B_1\} \times \{B_2\} \times \ldots$$

Подгруппа

$$\overline{\mathfrak{B}} = \ldots \times \{B_{-2}\} \times \{B_0\} \times \{B_2\} \times \ldots$$

группы $\mathfrak{B}$, очевидно, инвариантна относительно подгруппы $\{H^2\}$ и потому произведение $\overline{\mathfrak{B}}\{H^2\}$ является группой. Последняя, очевидно, бесконечна и неабелева и потому инвариантна в $\mathfrak{G}$. Но это невозможно, так как она не содержит, например, сопряженный с B_0 элемент $B_1 = H^{-1} B_0 H = H^{-1}AH$. Полученное противоречие показывает, что все элементы бесконечного порядка из $\mathfrak{G}$ содержатся в централизаторе $Z(\mathfrak{A})$. Но тогда, как уже отмечалось, подгруппа $\mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$.

Ввиду п. 1) отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{A}$, т. е. что коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ не может быть бесконечной элементарной абелевой группой. Поэтому фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ является $\overline{IH}$-группой; $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ — ее коммутант. Если последний бесконечен и $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}$ — его максимальная элементарная абелева подгруппа, то по предыдущему подгруппа $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ и отлична от $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_2$ является, очевидно, $\overline{IH}$-группой. Продолжая эти рассуждения, получим возрастающую цепь инвариантных подгрупп

$$\mathfrak{A}_0 = 1 \subset \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{G}' = \mathfrak{A}_{n+1} \subset \mathfrak{G},$$

любой фактор $\mathfrak{A}_{k+1}/\mathfrak{A}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ которой бесконечен и содержится в центре группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_k$, а фактор $\mathfrak{A}_{n+1}/\mathfrak{A}_n = \mathfrak{G}'/\mathfrak{A}_n$ конечен и отличен от единицы.

Пусть $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}_n$ — централизатор подгруппы $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_n$. Тогда ряд

$$\mathfrak{A}_0 = 1 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{G}' = \mathfrak{A}_{n+1} \subset \mathfrak{C}$$

будет центральным рядом группы $\mathfrak{C}$ и, значит, группа $\mathfrak{C}$ нильпотентна. Покажем, что группа $\mathfrak{C}$ абелева. В самом деле, в ином случае хотя бы один ее элемент H' бесконечного порядка не содержится в ее центре; так как группа $\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}_n$ конечна и инвариантна в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}_n$, содержащей элементы бесконечного порядка, то элементы бесконечного порядка содержит и группа $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}_n$, а значит, и группа $\mathfrak{C}$. Пусть A' — какой-нибудь не перестановочный с H' элемент из $\mathfrak{C}$. Тогда $\{A', H'\}$ — бесконечная неабелева группа и потому инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Так как $\{A', H'\}$ — нильпотентная группа с конечным множеством образующих элементов, то конечное множество образующих элементов имеет и каждая ее подгруппа. Но тогда ее максимальная периодическая подгруппа конечна. Пользуясь далее тем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\{A', H'\}$ абелева или гамильтонова, получаем, что индекс пересечения $\mathfrak{G}' \cap \{A', H'\}$ в $\mathfrak{G}'$ конечен, что не совместимо с бесконечностью группы $\mathfrak{G}'$ и конечностью максимальной периодической подгруппы из $\{A', H'\}$. Следовательно, группа $\mathfrak{C}$ абелева.

Пусть далее в $\mathfrak{C}$ существует элемент R бесконечного порядка, не содержащийся в центре группы $\mathfrak{G}$. Подгруппа $\mathfrak{R}$, порожденная в $\mathfrak{C}$ элементом R и сопряженными с ним элементами (число их конечно, так как $\mathfrak{C}$ — инвариантная абелева подгруппа конечного индекса в $\mathfrak{G}$), инвариантна в $\mathfrak{G}$ и имеет конечную максимальную периодическую подгруппу. Пусть S — элемент из $\mathfrak{G}$, не входящий в централизатор подгруппы $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{G}$. Тогда максимальная периодическая подгруппа из $\mathfrak{R}\{S\}$ конечна. Рассматривая далее фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}\{S\}$ и пользуясь тем, что она абелева либо гамильтонова, приходим, как и выше, к противоречию с предположением о бесконечности коммутанта $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, все элементы бесконечного порядка из $\mathfrak{C}$ содержатся в центре группы $\mathfrak{G}$. Отсюда вытекает, что в центре группы $\mathfrak{G}$ содержатся и все элементы из $\mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{C}$, то получается, что подгруппа $\mathfrak{G}'$ содержится в центре группы $\mathfrak{G}$. Однако, как показано в п. 1), это невозможно. Полученное противоречие показывает, что группа $\mathfrak{G}'$ не может быть бесконечной примарной абелевой группой с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Сопоставляя утверждения, доказанные в пп. 2) — 4), приходим к выводу, что коммутант группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей условиям доказываемой леммы, конечен, что и требовалось доказать.

Пользуясь этим результатом и леммой 2.5, получаем, наконец, следующую теорему.

Т е о р е м а 2.1. *Коммутант локально ступенчатой непериодической $\overline{IH}$-группы является конечной абелевой группой.*

Следствие 2.3. *Непериодическая локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа метагамильтонова.*

Доказательство. В самом деле, ввиду теоремы 2.1 непериодическая локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных классов сопряженных элементов и потому ее центр является группой непериодической [13]. Пусть X — элемент бесконечного порядка, содержащийся в ее центре. Если $\mathfrak{A}$ — конечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{A}\{X\}$ — бесконечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$ и потому инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Но тогда инвариантна в $\mathfrak{G}$ и подгруппа $\mathfrak{A}$, являющаяся, очевидно, характеристической подгруппой в $\mathfrak{A}\{X\}$.

§ 3. Неметагамильтоновы $\overline{IH}$-группы

Ввиду следствия 2.3 теоремы 2.1 и следствия 1.3 теоремы 1.1 справедливо следующее утверждение.

Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не является метагамильтоновой группой, то она локально конечна.

Вопрос о строении локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп, не являющихся метагамильтоновыми группами, решается торемами 3.1—3.3.

Теорема 3.1. *Всякая локально ступенчатая метагамильтонова группа имеет конечный коммутант. Если (локально ступенчатая) $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ с конечным коммутантом $\mathfrak{G}'$ не является метагамильтоновой группой, то она имеет квазициклическую подгруппу конечного индекса, содержащуюся в ее центре (иначе, является центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной группы).*

Доказательство. Для непериодических локально ступенчатых метагамильтоновых групп первое утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.1. Ввиду следствия 1.3 периодическая локально ступенчатая метагамильтонова группа локально конечна и потому имеет конечную неабелеву подгруппу. Так как последняя инвариантна в ней и определяет абелеву или гамильтонову фактор-группу, то конечность коммутанта метагамильтоновой группы в рассматриваемом случае очевидна.

Переходя к доказательству второго утверждения теоремы, заметим сперва, что $\overline{IH}$-группа с конечным коммутантом является, очевидно, локально ступенчатой и потому к ней применимо предложение, сформулированное в самом начале настоящего параграфа. Таким образом, в силу этого предложения группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию второй части теоремы, локально конечна. Пусть $\mathfrak{D}$—какая-нибудь ее конечная неабелева подгруппа. Рассмотрим сперва случай, когда группа $\mathfrak{G}$ не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. При этом предположении централизатор $Z(\mathfrak{G}'\mathfrak{D})$ подгруппы $\mathfrak{G}'\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$, имеющий, очевидно, конечный индекс в $\mathfrak{G}$, не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Но тогда ввиду разрешимости группы $Z(\mathfrak{G}'\mathfrak{D})$, вытекающей из разрешимости $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ (см. теорему 1.1), она имеет бесконечную абелеву подгруппу $\mathfrak{R}$, разлагающуюся в прямое произведение циклических групп простых порядков [11]. В последней, очевидно, можно выделить бесконечную подгруппу $\mathfrak{A}$, пересекающуюся с $\mathfrak{D}$ по единице. Пусть далее $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ — разложение подгруппы $\mathfrak{A}$ в прямое произведение двух бесконечных подгрупп $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Тогда бесконечные неабелевы подгруппы $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{D}\mathfrak{A}_2$ инвариантны в $\mathfrak{G}$, а потому инвариантно в $\mathfrak{G}$ и их пересечение $\mathfrak{D}$. Таким образом, в рассматриваемом случае любая конечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и, значит, последняя является метагамильтоновой группой.

Рассмотрим теперь случай, когда группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. В этом случае условию минимальности для подгрупп удовлетворяет и централизатор $Z(\mathfrak{G}')$ подгруппы $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}$. Так как централизатор $Z(\mathfrak{G}')$—бесконечная разрешимая группа, то отсюда вытекает, что он является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп (экстремален) [11]; обозначим последнее через $\mathfrak{K}$. Так как группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных классов сопряженных элементов (ввиду конечности ее коммутанта $\mathfrak{G}'$), то подгруппа $\mathfrak{K}$ содержится в ее центре.

Выделим случай, когда группа $\mathfrak{K}$ содержит подгруппу $\mathfrak{R}$, разлагающуюся в прямое произведение двух квазициклических подгрупп $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$. Пусть $\mathfrak{D}$ — произвольная конечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{D}_{12}=\mathfrak{D}\cap\mathfrak{R}$. Бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{D}\mathfrak{R}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и потому

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R}/\mathfrak{D}_{12}=\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{R}/\mathfrak{D}_{12}$$

— инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_{12}$. Группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{D}_{12}$ — полная абелева группа; ее можно представить в виде прямого произведения

$$\mathfrak{K}_1^*/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{K}_2^*/\mathfrak{D}_{12}$$

двух квазициклических подгрупп. Но тогда справедливо соотношение

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R}/\mathfrak{D}_{12}=\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{K}_1^*/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{K}_2^*/\mathfrak{D}_{12}.$$

Так как $\mathfrak{D}\mathfrak{K}_1^*$ и $\mathfrak{D}\mathfrak{K}_2^*$ — бесконечные неабелевы подгруппы группы $\mathfrak{G}$, то они инвариантны в $\mathfrak{G}$; но тогда инвариантны в $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}_{12}$ обе подгруппы

$$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{K}_1^*/\mathfrak{D}_{12}\quad\text{и}\quad\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{12}\times\mathfrak{K}_2^*/\mathfrak{D}_{12}.$$

и, значит, их пересечение $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{12}$. Переходя к группе $\mathfrak{G}$, получаем, что $\mathfrak{D}$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Таким образом, и в случае, когда группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, но ее максимальная полная подгруппа $\mathfrak{K}$ не является квазициклической группой, любая ее конечная неабелева подгруппа инвариантна в ней.

Следовательно, группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям второй части теоремы, может иметь неинвариантные конечные неабелевы подгруппы только в том случае, когда она является центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной группы. Теорема доказана.

В связи с теоремой 3.1 возникает вопрос о существовании такой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ с конечным коммутантом, которая не была бы метагамильтоновой. Примером группы такого рода может служить группа $\mathfrak{G}$, разлагающаяся в прямое произведение группы кватернионов и неабелевой p-группы с $p\neq 2$, являющейся центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной абелевой группы.

Из теоремы 3.1 вытекает такое следствие.

Следствие 3.1. *Локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа с бесконечным коммутантом не является метагамильтоновой группой.*

Свойствам $\overline{IH}$-групп с бесконечным коммутантом и посвящается дальнейшая часть этого параграфа.

Лемма 3.1. *Локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа с бесконечным коммутантом локально конечна.*

Лемма вытекает из теоремы 2.1 и следствия 1.3.

Лемма 3.2. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально конечной $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен, то он не может содержаться в ее центре.*

Доказательство. Пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ содержится в центре $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{A}$—какая-нибудь конечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и пусть в $\mathfrak{G}'$ существует бесконечная подгруппа $\mathfrak{G}_1'$ бесконечного индекса. Тогда $\mathfrak{A}\mathfrak{G}_1'$ — бесконечная неабелева группа, для которой пересечение $\mathfrak{A}\mathfrak{G}_1'\cap\mathfrak{G}'$ имеет, очевидно, бесконечный индекс в $\mathfrak{G}'$. С другой стороны, факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\mathfrak{G}_1'$ абелева или гамильтонова и потому пересечение $\mathfrak{A}\mathfrak{G}_1'\cap\mathfrak{G}'$ должно иметь конечный индекс в $\mathfrak{G}'$. Полученное противоречие означает, что абелева группа $\mathfrak{G}'$ (абелевость ее вытекает из соотношения $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{Z}$) не имеет бесконечных подгрупп бесконечного индекса и потому ввиду своей периодичности является прямым произведением квазициклической группы (обозначим ее через $\mathfrak{K}$) и некоторой конечной группы.

Предположим далее, что группа $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу $\mathfrak{N}$, разлагающуюся в прямое произведение бесконечного множества циклических групп простых порядков. Тогда абелева подгруппа $\mathfrak{G}'\mathfrak{N}$, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$, а потому инвариантна в $\mathfrak{G}$ и ее максимальная подгруппа $\mathfrak{B}$, разлагающаяся в прямое произведение циклических групп простых порядков; подгруппа $\mathfrak{B}$, очевидно, бесконечна. Пусть далее $\mathfrak{A}$ — какая-нибудь конечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$. Тогда бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Рассматривая фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ (она абелева или гамильтонова) и пользуясь конечностью индекса подгруппы $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}'$, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, что, очевидно, невозможно. Следовательно, группа $\mathfrak{G}$ не содержит бесконечных абелевых подгрупп, разлагающихся в прямое произведение циклических групп простых порядков, и потому ввиду своей разрешимости экстремальна [11]. Так как по предположению $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{Z}$, то группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна и тогда ее максимальная полная подгруппа должна содержаться в ее центре [16]. Однако отсюда вытекает, что коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ конечен вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 3.3. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально конечной $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен и неабелев, то он экстремален.*

Доказательство. Если группа $\mathfrak{G}'$ не имеет отличных от нее бесконечных неабелевых подгрупп, то она является бесконечной экстремальной группой (см. лемму 1.2). В этом случае утверждение леммы справедливо. Пусть группа $\mathfrak{G}'$ имеет отличную от нее бесконечную неабелеву подгруппу $\mathfrak{N}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ гамильтонова; абелевой она быть не может, так как $\mathfrak{G}'\not\subset\mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{K}/\mathfrak{N}$—коммутант группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$; как известно, его порядок равен двум. Так как $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{K}$, $\mathfrak{G}'\supset\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}\neq\mathfrak{G}'$, то $\mathfrak{K}=\mathfrak{G}'$. Таким образом, любая бесконечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}'$, отличная от $\mathfrak{G}'$, имеет в $\mathfrak{G}'$ индекс 2. Отсюда вытекает, что любая отличная от $\mathfrak{G}'$ бесконечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}'$ не имеет собственных бесконечных неабелевых подгрупп и, значит, является бесконечной экстремальной группой [5]. Но тогда бесконечной экстремальной группой является и группа $\mathfrak{G}'$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.4. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально конечной $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ является бесконечной абелевой группой, то группа $\mathfrak{G}$ экстремальна.*

Доказательство. Пусть подгруппа $\mathfrak{G}_1'$, порожденная элементами простых порядков из $\mathfrak{G}'$, бесконечна. Тогда подгруппа $\mathfrak{G}_1'\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — произвольная конечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$, является бесконечной неабелевой группой. Выделим в $\mathfrak{G}_1'$ инвариантную в $\mathfrak{G}_1'\mathfrak{C}$ подгруппу $\mathfrak{G}_2'$ с индексом в $\mathfrak{G}_1'$ большим удвоенного порядка группы $\mathfrak{C}$ и рассмотрим бесконечную неабелеву подгруппу $\mathfrak{G}_2'\mathfrak{C}$ группы $\mathfrak{G}$. Подгруппа $\mathfrak{G}_2'\mathfrak{C}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_2'\mathfrak{C}$ абелева или гамильтонова. Пользуясь этим, нетрудно убедиться, что пересечение $\mathfrak{G}'\cap\mathfrak{G}_2'\mathfrak{C}$ имеет в $\mathfrak{G}'$ индекс, не превосходящий числа 2. Но тогда индекс подгруппы $\mathfrak{G}_2'$ в $\mathfrak{G}'$, а значит и в $\mathfrak{G}_1'$, не превзойдет удвоенного порядка группы $\mathfrak{C}$. Полученное противоречие показывает, что группа $\mathfrak{G}_1'$ не может быть бесконечной. Поэтому коммутант $\mathfrak{G}'$ разлагается в прямое произведение конечного числа циклических и квазициклических групп

Рассмотрим далее централизатор $Z(\mathfrak{G}')$ подгруппы $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}$. Он имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}$ [17] и его коммутант $\mathfrak{N}$ содержится, очевидно, в подгруппе $\mathfrak{G}'$. Пусть группа $Z(\mathfrak{G}')$ абелева Выделим в ней максимальную подгруппу $\mathfrak{N}$, разложимую в прямое произведение циклических групп простых порядков (она, очевидно, инвариантна в $\mathfrak{G}$). Если она конечна, то группа

$Z(\mathfrak{G}')$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и тогда лемма доказана (так как $Z(\mathfrak{G}')$—подгруппа конечного индекса в $\mathfrak{G}$). Пусть подгруппа $\mathfrak{N}$ бесконечна. Возьмем подгруппу $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — произвольная конечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$. Пользуясь тем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ абелева или гамильтонова и тем, что максимальная полная подгруппа $\mathfrak{K}$ коммутанта $\mathfrak{G}'$ не содержится в подгруппе $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, приходим к противоречию. Следовательно, подгруппа $\mathfrak{N}$ не может быть бесконечной.

Рассмотрим теперь случай неабелевой группы $Z(\mathfrak{G}')$. Ввиду леммы 3.2 ее коммутант $\mathfrak{R}$ не может быть бесконечным (так как ввиду соотношения $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{G}'$ он содержится в ее центре). Возьмем фактор-группу $Z(\mathfrak{G}')/\mathfrak{R}$. Она разлагается в прямое произведение

$$Z(\mathfrak{G}')/\mathfrak{R} = \mathfrak{K}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$$

($\mathfrak{K}$ — максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{G}'$). Пусть группа $\mathfrak{S}$ бесконечна. Возьмем бесконечную неабелеву подгруппу $\mathfrak{S}\mathfrak{D}$ группы $\mathfrak{G}$, где $\mathfrak{D}$ — произвольная конечная неабелева подгруппа из $Z(\mathfrak{G}')$. Пользуясь тем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}\mathfrak{D}$ абелева или гамильтонова, получаем, что индекс пересечения $\mathfrak{S}\mathfrak{D}\cap\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}'$ конечен. Однако это невозможно, так как $\mathfrak{K}\neq\mathfrak{S}$. Полученное противоречие показывает, что случай бесконечной группы $\mathfrak{S}$ невозможен. Но тогда группа $Z(\mathfrak{G}')$, а значит и группа $\mathfrak{G}$, экстремальна.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально конечной $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ является бесконечной неабелевой группой, то группа $\mathfrak{G}$ экстремальна.*

Доказательство. Ввиду леммы 3.3 $\mathfrak{G}'$— бесконечная экстремальная группа; ее максимальную полную подгруппу обозначим через $\mathfrak{K}$. Возьмем централизатор $Z(\mathfrak{G}')$ подгруппы $\mathfrak{G}'$ в $\mathfrak{G}$. Он, очевидно, инвариантен в $\mathfrak{G}$, причем фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G}')$ экстремальна [18]. Ряд

$$1\subset\mathfrak{G}'\cap Z(\mathfrak{G}')\subset Z(\mathfrak{G}')$$

является, очевидно, центральным рядом группы $Z(\mathfrak{G}')$ и потому ее коммутант $\mathfrak{R}$ содержится в ее центре. Но тогда ввиду леммы 3.2 он не может быть бесконечным.

Выделим в фактор-группе $Z(\mathfrak{G}')/\mathfrak{R}$ максимальную подгруппу $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}$, разложимую в прямое произведение циклических групп простых порядков. Если она конечна, то группа $Z(\mathfrak{G}')/\mathfrak{R}$, а значит, и группа $Z(\mathfrak{G}')$ экстремальна. Если же группа $\mathfrak{N}/\mathfrak{R}$ бесконечна, то возьмем бесконечную неабелеву группу $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — произвольная конечная неабелева подгруппа из $\mathfrak{G}$; произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ является группой, так как, очевидно, $\mathfrak{N}$ нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$. Пользуясь тем, что фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ абелева или гамильтонова, получаем, что $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Однако, очевидно, это невозможно. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен и, значит, группа $Z(\mathfrak{G}')$ экстремальна. Но тогда экстремальна и группа $\mathfrak{G}$, являющаяся расширением экстремальной группы $Z(\mathfrak{G}')$ с помощью экстремальной группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G}')$ [19]. Из леммы 3.1, 3.4 и 3.5 вытекает такая теорема.

Теорема 3.2. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа имеет бесконечный коммутант, то она экстремальна.*

Следствие 3.2. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ с бесконечным коммутантом имеет конечный неабелев нормальный делитель, то она является конечным расширением квазициклической группы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — конечный неабелев нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$ — ее максимальная полная абелева подгруппа. Ввиду теоремы 3.2 группа $\mathfrak{K}$ отлична от единицы. Допустим, что в $\mathfrak{K}$ можно выделить две различные квазициклические подгруппы $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$. Тогда бесконечные неабелевы группы $\mathfrak{N}\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{K}_2$ инвариантны в $\mathfrak{G}$ и каждая из фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\mathfrak{K}_2$ абелева или гамильтонова. Пользуясь этим, получаем, что каждое из пересечений $\mathfrak{G}'\cap\mathfrak{N}\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{G}'\cap\mathfrak{N}\mathfrak{K}_2$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}'$. Но тогда конечный индекс в $\mathfrak{G}'$ имеет и пересечение $\mathfrak{G}' \cap \cap \mathfrak{N}\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{K}_2$. Так как коммутант $\mathfrak{G}'$ бесконечен, то это означает, в частности, что бесконечно и пересечение $\mathfrak{N}\mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{K}_2$. Однако это невозможно, так как группа $\mathfrak{N}$ конечна и $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ отличные одна от другой квазициклические подгруппы. Получившееся противоречие означает, что в подгруппе $\mathfrak{K}$ нельзя выделить две различные квазициклические подгруппы. Следовательно, группа $\mathfrak{K}$ квазициклическая. Таким образом, группа $\mathfrak{G}$ является конечным расширением квазициклической группы $\mathfrak{K}$.

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующее предложение.

Следствие 3.3. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не является метагамильтоновой, то она экстремальна.*

Теорема 3.3. *Если группа $\mathfrak{G}$ не является конечным расширением квазициклической группы, то для того, чтобы она была неметагамильтоновой локально ступенчатой $\overline{IH}$-группой, необходимо и достаточно, чтобы она была экстремальной группой с бесконечным коммутантом, не имеющей бесконечных неабелевых подгрупп бесконечного индекса и неинвариантных неабелевых подгрупп конечного индекса.*

Доказательство. Так как экстремальная группа с отмеченными в теореме свойствами является, очевидно, локально конечной (и, значит, локально ступенчатой) $\overline{IH}$-группой, то достаточность здесь сводится к следствию 3.1. Необходимость получается следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}$ — неметагамильтонова локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа, не являющаяся конечным расширением квазициклической группы. Ввиду следствия 3.3 она экстремальна, а ввиду теоремы 3.1 ее коммутант бесконечен. Обозначим через $\mathfrak{K}$ ее максимальную полную абелеву подгруппу. Покажем, что группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных неабелевых подгрупп бесконечного индекса. Пусть $\mathfrak{N}$ — подгруппа такого рода. Так как $\mathfrak{G}$ — $\overline{IH}$-группа, то подгруппа $\mathfrak{N}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Ввиду экстремальности группы $\mathfrak{G}$ и бесконечности индекса подгруппы $\mathfrak{N}$ справедливо соотношение $\mathfrak{K} \not\subset \mathfrak{N}$. Пусть $\mathfrak{R}$ — максимальная полная подгруппа, содержащаяся в $\mathfrak{N}$ (очевидно, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{K}$), и $\mathfrak{P}$ — какая-нибудь квазициклическая подгруппа из $\mathfrak{K}$, не содержащаяся в $\mathfrak{N}$. В группе $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$ экстремальный нормальный делитель $\mathfrak{N}$ определяет квазициклическую фактор-группу $\mathfrak{N}\mathfrak{P}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{P}/\mathfrak{N} \cap \mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}$. Поэтому центр этой группы содержит такую квазициклическую подгруппу $\mathfrak{P}_1$, что $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}_1$ (см. [19]).

Пусть далее $\mathfrak{N}_1$ конечная неабелева группа, удовлетворяющая условию $\mathfrak{R}\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$, и $\mathfrak{R}_1$ — какая-нибудь квазициклическая подгруппа из $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$ — бесконечная неабелева группа и, значит, инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Так как фактор-группа $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1)/\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$ квазициклическая, а подгруппа $\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$ экстремальная, то в центре группы $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1)$ содержится квазициклическая подгруппа $\mathfrak{P}_2$, удовлетворяющая условию $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1) = \mathfrak{P}_2(\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1)$. Каждая из бесконечных неабелевых подгрупп $\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{P}_2\mathfrak{N}_1$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, а каждая из фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_2\mathfrak{N}_1$ абелева или гамильтонова. Пользуясь этим, как и при доказательстве следствия 3.2, получаем, что пересечение $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{P}_2\mathfrak{N}_1$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}'$. Так как коммутант $\mathfrak{G}'$ бесконечен, то это означает, в частности, что пересечение $\mathfrak{P}_1\mathfrak{N}_1 \cap \cap \mathfrak{P}_2\mathfrak{N}_1$ является бесконечной группой. Однако это невозможно, так как группа $\mathfrak{N}_1$ конечна, а $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ отличные одна от другой квазициклической подгруппы. Полученное противоречие доказывает, что группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая рассматриваемым условиям, не имеет бесконечных неабелевых подгрупп бесконечного индекса. Так как группа $\mathfrak{G}$ по предположению является $\overline{IH}$-группой, то она не имеет неинвариантных неабелевых подгрупп конечного индекса. Вместе с этим необходимость условий теоремы доказана.

Следствие 3.4. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не является метагамильтоновой группой, то она является конечным расширением примарной группы, разлагающейся в прямое произведение конечного числа квазициклических групп.*

С л е д с т в и е 3.5. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа не является метагамильтоновой группой, то она экстремальна и ее максимальная полная подгруппа не имеет бесконечных собственных полных подгрупп, инвариантных в $\mathfrak{G}$.*

§ 4. Строение локально ступенчатых *INH*-групп

Как уже отмечалось во введении к статье, класс $\overline{IH}$-групп содержит, в частности, *IHN*-группы — бесконечные неабелевы группы, все бесконечные подгруппы которых инвариантны. Полученные выше результаты для локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп позволяют дать полное описание строения локально ступенчатых *INH*-групп. В частности, из следствия 3.5 вытекает справедливость следующего утверждения.

Если локально ступенчатая INH-группа не является метагамильтоновой группой, то она является конечным расширением квазициклической группы.

Из определения *INH*-группы вытекает, что *INH*-группы такого рода являются расширениями квазициклических групп с помощью конечных абелевых и конечных гамильтоновых групп.

Рассмотрим теперь случай локально ступенчатой метагамильтоновой *INH*-группы $\mathfrak{G}$. Ввиду теоремы 3.1 коммутант $\mathfrak{G}'$ конечен. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае группа $\mathfrak{G}$ не содержит элементов бесконечного порядка. В самом деле, пусть A — ее элемент бесконечного порядка. Тогда бесконечная циклическая группа $\{A^{2^3}\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\{A^{2^3}\}$ содержит элемент порядка 2^3 и потому не может быть гамильтоновой группой и, значит, является абелевой группой. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}' \subset \{A^{2^3}\} \subset \{A\}$, что невозможно, так как коммутант $\mathfrak{G}'$ является отличной от единицы конечной группой, а группа $\{A\}$ не содержит отличных от единицы элементов конечного порядка.

Ввиду теоремы 1.1 группа $\mathfrak{G}$ разрешима. Возможны два случая: группа $\mathfrak{G}$ имеет либо абелеву подгруппу $\mathfrak{A}$, разлагающуюся в прямое произведение бесконечного множества циклических групп простых порядков, либо подгруппу $\mathfrak{B}$ конечного индекса, разлагающуюся в прямое произведение конечного числа квазициклических групп (см. [11]). В первом случае для произвольного элемента X группы $\mathfrak{G}$ можно выделить две такие бесконечные подгруппы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ группы $\mathfrak{A}$, что

$$\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 = 1 \text{ и } \{X\} \cap (\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2) = 1.$$

Но тогда ввиду соотношения

$$\{X\} = \{X\}\mathfrak{A}_1 \cap \{X\}\mathfrak{A}_2$$

циклическая подгруппа $\{X\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Так как X — произвольный элемент группы $\mathfrak{G}$, то это означает, что группа $\mathfrak{G}$ гамильтонова; абелевой она быть не может по самому определению *INH*-группы.

Во втором случае ввиду конечности коммутанта $\mathfrak{G}'$ группа $\mathfrak{G}$ локально нормальна и потому подгруппа $\mathfrak{B}$ содержится в ее центре. Так как фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ абелева или гамильтонова, то отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна. Покажем, что если подгруппа $\mathfrak{B}$ не является квазициклической группой, то группа $\mathfrak{G}$ гамильтонова. В самом деле, пусть группа $\mathfrak{B}$ не является квазициклической группой и $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ — две ее квазициклические подгруппы с равным единице пересечением $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. Пусть $\mathfrak{C}$ — силовская 2-подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если подгруппа $\mathfrak{C}$ абелева (и, в частности, если $\mathfrak{C} = 1$), то абелева и каждая из фактор-групп $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_2$. Но тогда из соотношений

$$\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}_1, \ \mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}_2 \text{ и } \mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = 1$$

вытекает, что $\mathfrak{G}' = 1$, что противоречит неабелевости INH-группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, подгруппа $\mathfrak{C}$ неабелева. Ввиду отмеченной здесь нильпотентности группы $\mathfrak{G}$ подгруппа $\mathfrak{C}$ является ее прямым множителем; пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$. Группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, очевидно, не может быть гамильтоновой и, значит, абелева, и потому группа $\mathfrak{D}$ здесь абелева. Если группа $\mathfrak{C}$ конечна, то отсюда вытекает гамильтоновость группы $\mathfrak{G}$. Пусть группа $\mathfrak{C}$ бесконечна. При этом предположении она должна содержать хотя бы одну квазициклическую подгруппу и потому не может быть гамильтоновой. Отсюда вытекает, что подгруппа $\mathfrak{D}$ не может быть бесконечной. Но тогда $\mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{C}$. Ни одна из фактор-групп $\mathfrak{C}/\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{C}/\mathfrak{P}_2$, очевидно, не может быть гамильтоновой и потому обе они абелевы. Но тогда коммутант $\mathfrak{C}'$ группы $\mathfrak{C}$ должен содержаться в каждой из подгрупп $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ и, значит, равен единице (так как $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2 = 1$), что противоречит доказанной уже неабелевости группы $\mathfrak{C}$. Следовательно, группа $\mathfrak{C}$ не может быть бесконечной и потому интересующее нас утверждение доказано.

Из доказанных здесь предложений вытекает такая теорема.

Т е о р е м а 4.1. *Класс локально ступенчатых INH-групп исчерпывается бесконечными гамильтоновыми группами и такими неабелевыми негамильтоновыми группами, которые являются конечными расширениями квазициклических групп с помощью конечных абелевых и конечных гамильтоновых групп.*

§ 5. $\overline{IH}$-группы с конечным коммутантом

Л е м м а 5.1. *Если локально ступенчатая периодическая (в частности, конечная) метагамильтонова группа $\mathfrak{G}$ имеет неабелеву p-подгруппу, то коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ является p-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если группа $\mathfrak{G}$ имеет неабелеву p-подгруппу с $p = 2$, то она имеет неабелеву силовскую 2-подгруппу $\mathfrak{K}$ и тогда фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ абелева; гамильтоновой она быть не может, так как не содержит 2-элементов. Ввиду соотношения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{K}$ коммутант $\mathfrak{G}'$ в рассматриваемом случае является p-группой с $p = 2$. Если все силовские 2-подгруппы из $\mathfrak{G}$ абелевы, то по условию леммы группа $\mathfrak{G}$ имеет неабелеву p-подгруппу $\mathfrak{P}$ с $p \neq 2$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ абелева; гамильтоновой она быть не может, так как не содержит неабелевых 2-подгрупп. Ввиду соотношения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}$ коммутант $\mathfrak{G}'$ является p-группой (с $p \neq 2$) и во втором случае. Лемма доказана.

Л е м м а 5.2. *Если все примарные подгруппы локально ступенчатой периодической (в частности, конечной) метагамильтоновой группы $\mathfrak{G}$ абелевы, то ее коммутант примарен и абелев.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{N}$ — минимальная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Так как локально ступенчатая периодическая метагамильтонова группа локально конечна (см. следствие 1.3), то подгруппа $\mathfrak{N}$ конечна (как в случае конечной, так и в случае бесконечной группы $\mathfrak{G}$). Ввиду непримарности и минимальности неабелевой группы $\mathfrak{N}$ она является полупрямым произведением инвариантной в ней элементарной абелевой p-группы $\mathfrak{A}$ и примарной циклической q-группы $\{B\}$ с $q \neq p$ (см. [14]). Подгруппа $\mathfrak{N}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ абелева; гамильтоновой она быть не может, так как, очевидно, не имеет неабелевых силовских подгрупп (так как неабелевых силовских подгрупп не имеет группа $\mathfrak{G}$). Следовательно, $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{N}$.

Так как подгруппа $\mathfrak{N}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$, то инвариантна в $\mathfrak{G}$ и ее характеристическая подгруппа $\mathfrak{A}$; но тогда инвариантен в $\mathfrak{G}$ и централизатор $Z(\mathfrak{A})$ подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{G}$. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{A})$ неабелева, то она не может быть примарной и, значит, существует r-элемент $C \not\subset Z(\mathfrak{A})$ по некоторому простому числу $r \neq q$ (так как она содержит q-элемент $BZ(\mathfrak{A})$). Ввиду неабелевости подгруппы $\mathfrak{A}\{C\}$ она инвариантна в $\mathfrak{G}$; так как фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}\{C\}$ абелева, то $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{A}\{C\}$. Следовательно,

$$\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{A}\{B\} \cap \mathfrak{A}\{C\} = \mathfrak{A}$$

и, значит, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A}$. Но тогда группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{A})$ абелева вопреки предположению. Полученное противоречие показывает, что группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{A})$ абелева. Поэтому $\mathfrak{G}' \subset Z(\mathfrak{A})$. Так как $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R} \not\subset Z(\mathfrak{A})$, то отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{G}'$ является истинной подгруппой группы $\mathfrak{R}$ и потому абелева.

Пусть группа $\mathfrak{G}'$ непримарна. Тогда ввиду ее абелевости из соотношения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{A}\{B\}$ вытекает прямое разложение $\mathfrak{G}' = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B} \subset \{B\}$. Подгруппа $\mathfrak{B}$ не может содержаться в центре группы $\mathfrak{G}$, так как иначе фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ была бы абелевой и тогда $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{A}$, что противоречит предположению о непримарности группы $\mathfrak{G}'$. Отсюда вытекает существование такого r-элемента R, что группа $\mathfrak{B}\{B\}$ неабелева (подгруппа $\mathfrak{B}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и потому $\mathfrak{B}\{R\}$—группа). Но тогда $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{B}\{R\}$. Таким образом,

$$\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{A}\{B\} \text{ и } \mathfrak{G}' \subset \mathfrak{B}\{R\}.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{A} \subset \{R\}$ и далее цикличность группы $\mathfrak{A}$ и совпадение числа r с числом p. Таким образом, обе группы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ циклические. Так как элемент B индуцирует в циклической p-группе $\mathfrak{A}$ порядка p некоторый нетождественный автоморфизм, то число p не может быть равным 2. Но тогда, рассматривая автоморфизм, индуцируемый элементом R в $\mathfrak{B}$, получаем, что $q \neq 2$. Учитывая далее порядок группы автоморфизмов примарной циклической группы, получаем, что p делит число $q-1$, а q — число $p-1$. Ясно, что это невозможно. Полученное противоречие доказывает примарность коммутанта $\mathfrak{G}'$ (совпадение его с подгруппой $\mathfrak{A}$).

Лемма 5.3. *Если коммутант периодической $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ является конечной непримарной группой, то она разлагается в прямое произведение конечной гамильтоновой группы и неабелевой силовской p-подгруппы с $p \neq 2$, являющейся центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной абелевой группы.*

Доказательство. Ввиду непримарности коммутанта $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ она не является метагамильтоновой группой и потому в силу теоремы 3.1 должна быть центральным расширением квазициклической группы $\mathfrak{K}$, отвечающей некоторому простому числу p, с помощью конечной группы. Ввиду непримарности коммутанта $\mathfrak{G}'$ фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ неабелева. Но тогда она должна быть метагамильтоновой группой и потому ввиду лемм 5.1 и 5.2 ее коммутант $\mathfrak{S}/\mathfrak{K}$ примарен. Ввиду нильпотентности группы $\mathfrak{S}$ имеет место разложение $\mathfrak{S} = \mathfrak{K} \times \overline{\mathfrak{S}}$, где $\overline{\mathfrak{S}}$ — силовская q-подгруппа группы $\mathfrak{S}$ с $q \neq p$. Из очевидной нильпотентности фактор-группы $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{S}}$ вытекает, что дополнение $\mathfrak{R}$ силовской q-подгруппы $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ является нильпотентной группой и что сама подгруппа $\mathfrak{H}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Так как коммутант $\mathfrak{G}'$ непримарен, то группа $\mathfrak{R}$ не может быть абелевой (иначе из соотношения $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{H}$ вытекала бы его примарность) и, значит, инвариантна в $\mathfrak{G}$ (она, очевидно, бесконечна). Потому имеет место разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{H}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{H}$ абелева или гамильтонова. Абелевой она быть не может, так как иначе $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{R}$, что невозможно, потому что группа $\mathfrak{R}$ не содержит элементов порядка q (а группа $\mathfrak{G}'$ содержит их). Следовательно, $\mathfrak{H}$ гамильтонова группа. Но тогда ввиду своей примарности ($\mathfrak{H}$ — силовская q-подгруппа группы $\mathfrak{G}$) она должна быть 2-группой. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ не содержит элементов порядка 2 и потому является абелевой группой. Так как $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}\mathfrak{K} \simeq \mathfrak{R}/\mathfrak{K}$, то группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{K}$ абелева. Но тогда группа $\mathfrak{R}$ нильпотентна и все ее силовские подгруппы за исключением силовской p-подгруппы $\mathfrak{P}$ абелевы. Последняя не может быть абелевой, так как иначе $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{H}$, что противоречит предположению о непримарности группы $\mathfrak{G}'$. Из этих рассуждений вытекает справедливость разложения $\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{P}$, в котором $\overline{\mathfrak{R}}$ абелева группа, не содержащая элементов порядка 2 и $\mathfrak{P}$ неабелева силовская p-подгруппа, являющаяся центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной абелевой группы. Получившееся разложение

$$\mathfrak{G} = (\overline{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{P}) \times \mathfrak{H} = \mathfrak{P} \times (\overline{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{H})$$

доказывает утверждение леммы.

Лемма 5.4. *Коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой непериодической $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ примарен.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.1 коммутант $\mathfrak{G}'$ является конечной абелевой группой. В силу конечности коммутанта $\mathfrak{G}'$ группа $\mathfrak{G}$ не имеет бесконечных классов сопряженных элементов и потому является центральным расширением абелевой группы $\mathfrak{A}$ без кручения [13]. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ неабелева, так как ее коммутант совпадает, очевидно, с группой $\mathfrak{A}\mathfrak{G}'/\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{G}' \neq 1$, и потому метагамильтонова. Но тогда в силу лемм 5.1 и 5.2 ее коммутант $\mathfrak{A}\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ примарен, а значит примарен и коммутант $\mathfrak{G}' \simeq \mathfrak{A}\mathfrak{G}'/\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{G}$.

Из лемм 5.1 — 5.4 и следствия 3.3 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Коммутант локально ступенчатой метагамильтоновой группы примарен. Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ непримарен, то она экстремальна; если при этом коммутант $\mathfrak{G}'$ конечен, то она разлагается в прямое произведение конечной гамильтоновой группы и неабелевой силовской p-подгруппы (с $p \neq 2$), являющейся центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной абелевой группы. Коммутант конечной метагамильтоновой группы примарен.*

Из этой теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 5.1. *Если локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ с конечным коммутантом $\mathfrak{G}'$ не разлагается в отмеченное в теореме 5.1 прямое произведение (и, в частности, является метагамильтоновой группой), то в ней существует такая инвариантная силовская p-подгруппа $\mathfrak{P}$, для которой фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ абелева.*

Так как каждая периодическая группа с конечным коммутантом локально нормальна, то ввиду известного обобщения теоремы Шура для локально нормальных групп (см. [20]) из следствия 5.1 вытекает такое следствие.

Следствие 5.2. *Периодическая локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа $\mathfrak{G}$ с конечным коммутантом разлагается либо в произведение $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{N}$—инвариантная в $\mathfrak{G}$ силовская p-подгруппа и $\mathfrak{A}$—абелева группа с неделящимися на p порядками элементов, либо в прямое произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{N}$ — неабелева силовская p-подгруппа из $\mathfrak{G}$, являющаяся центральным расширением квазициклической группы с помощью конечной абелевой группы, $\mathfrak{H}$ — конечная гамильтонова группа. Конечная метагамильтонова группа разлагается в произведение инвариантной в ней силовской p-подгруппы и абелевой группы с неделящимся на p порядком.*

§ 6. $\overline{IH}$-группы с бесконечным коммутантом

В § 3 было показано, что локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа с бесконечным коммутантом не является метагамильтоновой группой и что все неметагамильтоновы локально ступенчатые $\overline{IH}$-группы экстремальны. Некоторые детали строения неметагамильтоновых $\overline{IH}$-групп с конечным коммутантом (такие группы, очевидно, локально ступенчаты) отмечены в § 5. В этом параграфе дается описание строения локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп с бесконечным коммутантом.

Теорема 6.1. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$- группы $\mathfrak{G}$ бесконечен, то она имеет инвариантную силовскую p-подгруппу $\mathfrak{N}$ конечного индекса, являющуюся конечным расширением (инвариантного в $\mathfrak{G}$) прямого произведения $\mathfrak{P}$ конечного числа квазициклических групп, причем подгруппа $\mathfrak{P}$ содержится в коммутанте $\mathfrak{G}'$.*

В доказательстве теоремы используется следующее вспомогательное предположение.

Лемма 6.1. *Пусть подгруппа* $\mathfrak{A}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *является произведением* p-*группы* $\mathfrak{N}$ *и циклической* q-*группы* $\{Q\}$ *с* $q \neq p$ *и* N *такой элемент группы* $\mathfrak{G}$, *что* $N^{q^k} = Q$ *при* $k \geqslant 1$ *и* $N^{-1}\mathfrak{A}N = \mathfrak{A}$. *Тогда* $N^{-1}\mathfrak{N}N = \mathfrak{N}$.

Доказательство леммы сводится к следующему очевидному утверждению.

Пусть $\mathfrak{A}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ — ее нормализатор в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{R}$ — силовская p-подгруппа подгруппы $\mathfrak{A}$. Если все силовские p-подгруппы группы $\mathfrak{A}$ сопряжены в $\mathfrak{A}$, то для любого элемента $N \in \mathfrak{N}$ существует такой элемент $A \in \mathfrak{A}$, что элемент AN^{-1} содержится в нормализаторе подгруппы $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{G}$.

Доказательство теоремы 6.1. Ввиду следствия 3.4 в группе $\mathfrak{G}$ существует (инвариантная) p-подгруппа $\mathfrak{P}$ конечного индекса, разлагающаяся в прямое произведение конечного числа квазициклических групп. Пусть $\mathfrak{N}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}$; очевидно, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}$ и потому подгруппа $\mathfrak{N}$ бесконечна. Если подгруппа $\mathfrak{N}$ неабелева, то она инвариантна в $\mathfrak{G}$ (так как $\mathfrak{G}$ — $\overline{IH}$-группа). Пусть подгруппа $\mathfrak{N}$ абелева. В этом случае в группе $\mathfrak{G}$ существует q-элемент Q с $q \neq p$, для которого $\mathfrak{P}\{Q\}$ — неабелева бесконечная группа и, значит, инвариантная в $\mathfrak{G}$ подгруппа. Но тогда произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{P}\{Q\} = \mathfrak{N}\{Q\}$ является группой. Подгруппа $\mathfrak{N}$ содержится, очевидно, в централизаторе подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{N}\{Q\}$. В силу леммы 6.1 подгруппа $\mathfrak{N}$ инвариантна в нем. Так как подгруппа $\mathfrak{N}$, очевидно, характеристична в нем, то ввиду его инвариантности в $\mathfrak{N}\{Q\}$ она инвариантна в $\mathfrak{N}\{Q\}$ и, значит, характеристична в $\mathfrak{N}\{Q\}$. Но тогда подгруппа $\mathfrak{N}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ и в рассматриваемом случае.

Ввиду следствия 3.5 подгруппа $\mathfrak{P}$ не имеет инвариантных в $\mathfrak{G}$ собственных полных подгрупп. Пересечение $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}'$ (так как подгруппа $\mathfrak{P}$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}$) и потому является бесконечной подгруппой группы $\mathfrak{P}$. Пусть $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}$. Так как группа $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}$ является расширением бесконечной полной группы $\mathfrak{K}$ с помощью конечной группы. Ввиду инвариантности пересечения $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}$ подгруппа $\mathfrak{K}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Однако ввиду следствия 3.5 это невозможно, так как $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{P}$. Следовательно, $\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$ и, значит, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}'$. Теорема доказана.

Примечание. В дополнение к теореме 6.1 целесообразно отметить, что среди $\overline{IH}$-групп, удовлетворяющих ее условиям, существуют как группы с $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}'$, так и группы с $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{G}'$.

Пример. В работе [21] для любого простого числа p строится экстремальная p-группа с конечным центром, являющаяся полупрямым произведением $\mathfrak{P}\{A\}$ циклической подгруппы $\{A\}$ порядка p и инвариантной подгруппы $\mathfrak{P}$, разлагающейся в прямое произведение $p - 1$ квазициклических групп. В [21] показано, что подгруппа $\mathfrak{P}$ не содержит инвариантных в $\mathfrak{P}\{A\}$ бесконечных подгрупп, отличных от $\mathfrak{P}$. Поэтому группа $\mathfrak{P}\{A\}$ является $\overline{IH}$-группой и ее коммутант совпадает с $\mathfrak{P}$. Пусть далее $\{P\}$ — циклическая группа порядка p^2, элемент P^p которой перестановочен с каждым элементом из $\mathfrak{P}$, а элемент P производит в $\mathfrak{P}$ тот же автоморфизм, что и элемент A произведения $\mathfrak{P}\{A\}$. Пусть теперь $\mathfrak{N}$ — группа порядка p^3 с образующими элементами P и Q и определяющими соотношениями

$$P^{p^2} = Q^p = 1 \text{ и } QPQ^{-1} = P^{1+p}.$$

Считая элемент Q перестановочным с каждым элементом из $\mathfrak{P}$ и пользуясь соотношениями из [21], определяющими полупрямое произведение $\mathfrak{P}\{P\}$, получаем полупрямое произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{N}$. Нетрудно убедиться, что при $p \neq 2$ группа $\mathfrak{G}$ является $\overline{IH}$-группой с бесконечным отличным от $\mathfrak{P}$ коммутантом $\mathfrak{P} \times \{P^p\}$.

Теорема 6.2. *Пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен. Если $\mathfrak{P}$ — максимальная полная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ (ввиду теоремы 6.1 подгруппа $\mathfrak{P}$ разлагается в прямое произведение конечного числа квазициклических групп) и $Z(\mathfrak{P})$ — ее централизатор в $\mathfrak{G}$, то фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ является конечной циклической группой, причем все отличные от единицы элементы группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ индуцируют в подгруппе $\mathfrak{P}$ отличные один от другого неприводимые автоморфизмы. Если подгруппа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической группой, то централизатор $Z(\mathfrak{P})$ абелев и порядок группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ нечетен.*

Нетождественный автоморфизм группы $\mathfrak{P}$ называется неприводимым, если в ней не существует отличных от нее бесконечных полных подгрупп, допустимых относительно этого автоморфизма.

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы. В связи с этим будем предполагать пока, что группа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической. Если группа $Z(\mathfrak{P})$ неабелева, то в ней существует конечная неабелева подгруппа $\mathfrak{B}$ и тогда бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{K}\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{K}$ — какая-нибудь квазициклическая подгруппа из $\mathfrak{P}$, имеет бесконечный индекс в $\mathfrak{G}$. С другой стороны, группа $\mathfrak{G}$ не является метагамильтоновой группой (так как ее коммутант $\mathfrak{G}'$ бесконечен) и потому не может иметь бесконечных неабелевых подгрупп бесконечного индекса (см. теорему 3.3). Полученное противоречие доказывает абелевость группы $Z(\mathfrak{P})$ в рассматриваемом случае. Покажем далее, что группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ не имеет при этом элементов второго порядка.

В самом деле, пусть $AZ(\mathfrak{P})$ — ее элемент второго порядка и $\mathfrak{K}$—какая-нибудь квазициклическая подгруппа из $\mathfrak{P}$. Запишем определяющие соотношения для $\mathfrak{K}$:

$$K_0 = 1, K_1^p = K_0, \ldots, K_n^p = K_{n-1}, \ldots$$

Возьмем элементы

$$K_0A^{-1}K_0A = 1,\ K_1A^{-1}K_1A, \ldots, K_nA^{-1}K_nA, \ldots$$

Если не существует номера, начиная с которого они равны единице, то ими определяется, очевидно, некоторая квазициклическая подгруппа $\mathfrak{P}_1$ (каждый из них совпадает с p-й степенью следующего), централизатор $Z(\mathfrak{P}_1)$ которой в $\mathfrak{G}$ содержит элемент A. В ином случае подгруппа $\mathfrak{K}$ инвариантна относительно элемента A, причем группа $\mathfrak{K}\{A\}$ неабелева. Так как группа $\mathfrak{G}$ не является метагамильтоновой, то ввиду теоремы 3.3 этот случай невозможен. Выделенная здесь подгруппа $\mathfrak{P}_1$ содержится в центре группы $\mathfrak{P}\{A\}$. Если группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_1$ не квазициклическая, то аналогично можно выделить квазициклическую подгруппу $\mathfrak{P}_2/\mathfrak{P}_1$ в центре группы $\mathfrak{P}\{A\}/\mathfrak{P}_1$. В результате получается ряд подгрупп

$$\mathfrak{P}_0 = 1 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_r \subset \mathfrak{P}\{A\},$$

для которого факторы $\mathfrak{P}_{k+1}/\mathfrak{P}_k\,(k < r)$ центральны и группа $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_r$ квазициклическая. Но тогда группа $\mathfrak{P}_r\{A\}$ нильпотентна и потому подгруппа $\mathfrak{P}_r$ содержится в ее центре [16]. Отсюда вытекает абелевость группы $\mathfrak{P}_r\{A\}$. Пусть $\mathfrak{K}_0$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{P}_r$ в $\mathfrak{P}$; подгруппа $\mathfrak{K}_0$ — квазициклическая, так как она изоморфна группе $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_r$.

Пусть

$$P_0 = 1, \quad P_1^p = P_0, \ldots, P_n^p = P_{n-1}, \ldots$$

соотношения для группы $\mathfrak{K}_0$. Рассмотрим взаимный коммутант $\mathfrak{C} = [\mathfrak{K}_0, \{A\}]$. Его образующие элементы

$$R_n = P_n^{-1}A^{-1}P_nA, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

удовлетворяют соотношениям

$$R_0 = 1, \qquad R_1^p = R_0, \ldots, R_n^p = R_{n-1}, \ldots$$

и потому он является либо квазициклической группой, либо не содержит отличных от единицы элементов. Второй случай невозможен, так как иначе $A \in Z(\mathfrak{P})$. Ввиду очевидных соотношений

$$A^{-1}R_nA = A^{-1}P_n^{-1}A\ A^{-2}P_nA^2 = A^{-1}P_n^{-1}AP_n = R_n^{-1}$$

подгруппа $\mathfrak{C}$ инвариантна в $\mathfrak{P}\{A\}$ и для нее группа $\mathfrak{C}\{A\}$ неабелева. Однако ввиду теоремы 3.3 это невозможно. Таким образом, невозможен и первый случай. Так как возможны только два рассматриваемых случая, то вместе с этим доказано, что в группе $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ не существует элементов второго порядка. Вместе с этим вторая часть теоремы доказана.

Переходя к доказательству первой части теоремы, заметим, что если группа $\mathfrak{P}$ квазициклическая, то цикличность фактор-группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ вытекает из того, что централизатор $Z(\mathfrak{P})$ совпадает с централизатором в $\mathfrak{G}$ подгруппы порядка p из $\mathfrak{P}$, если $p \neq 2$, и с централизатором подгруппы порядка 2^2 из $\mathfrak{P}$, если $p = 2$ (см. [17]). Второе утверждение первой части теоремы в рассматриваемом случае является очевидным. Таким образсм, и первую часть теоремы следует доказывать в предположении, что группа $\mathfrak{P}$ не является квациклической. Докажем пока абелевость группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ при этом предположении. В самом деле, очевидно, что ни одна подгруппа из $\mathfrak{G}$, содержащая централизатор $Z(\mathfrak{P})$ и отличная от него, не может быть абелевой. Поэтому каждая подгруппа из $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ инвариантна в $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$. Но тогда ввиду нечетности порядка группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ она не может быть гамильтоновой группой и, значит, абелева.

Докажем далее утверждение теоремы относительно автоморфизмов, индуцируемых в $\mathfrak{P}$ элементами группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$. Пусть некоторый элемент $AZ(\mathfrak{P}) \neq Z(\mathfrak{P})$ группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ производит в $\mathfrak{P}$ приводимый автоморфизм и $\mathfrak{P}^0$ — отличная от единицы и от $\mathfrak{P}$ максимальная допустимая относительно этого автоморфизма полная подгруппа из $\mathfrak{P}$. В силу теоремы 3.3 группа $\mathfrak{P}^0\{A\}$ абелева. Подгруппа $\mathfrak{P}^0$, очевидно, характеристична в бесконечной неабелевой (инвариантной в $\mathfrak{G}$) подгруппе $\mathfrak{P}\{A\}$ (так как является максимальной полной подгруппой ее центра) и потому инвариантна в $\mathfrak{G}$. Однако это противоречит следствию 3.5. Полученное противоречие доказывает интересующее нас утверждение.

Из неприводимости автоморфизмов, индуцируемых в $\mathfrak{P}$ элементами фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$, вытекает цикличность всех ее силовских подгрупп [4] и потому ввиду уже доказанной ее абелевости она является циклической группой, что завершает доказательство первой части теоремы. Теорема доказана.

Теорема 6.3. *Пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен и не совпадает с ее максимальной полной подгруппой $\mathfrak{P}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$, где $Z(\mathfrak{P})$ — централизатор подгруппы $\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}$, непримарной может быть только в случае, когда подгруппа $\mathfrak{P}$ квазициклическая, а определяемая ею фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ гамильтонова;*

2) *фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ нильпотентна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ — непримарная группа. Покажем сперва, что силовская 2-подгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ неабелева. В самом деле, ввиду непримарности группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ в группе $\mathfrak{G}$ существуют два таких элемента H и T различных простых порядков h и t, что обе группы $\mathfrak{P}\{H\}$ и $\mathfrak{P}\{T\}$ неабелевы. Если силовская 2-подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ абелева, то обе фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{H\}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{T\}$ абелевы и потому

$$\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}\{H\} \cap \mathfrak{P}\{T\} = \mathfrak{P}$$

и, значит, $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}'$ вопреки предположению. Следовательно, силовская 2-подгруппа $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ не может быть абелевой, если группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ не примарная. Ввиду теоремы 6.2 подгруппа $\mathfrak{P}$ при этом квазициклическая.

Так как $\mathfrak{A}$—бесконечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то она инвариантна в $\mathfrak{G}$. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ не может быть гамильтоновой (так как не содержит элементов второго порядка) и, значит, абелева. Обозначим через $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}$ дополнение подгруппы $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$. Ввиду непримарности группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ группа $\mathfrak{B}$ не может быть абелевой. Но тогда $\mathfrak{B}$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и потому справедливо прямое разложение $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} = \mathfrak{A}/\mathfrak{P} \times \mathfrak{B}/\mathfrak{P}$. Так как группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ изоморфна неабелевой группе $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$, то она не может быть абелевой и, значит, гамильтонова. Ввиду отмеченного разложения и взаимной простоты порядков его множителей отсюда вытекает, что группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ гамильтонова. Утверждение 1) теоремы доказано.

Переходим теперь к доказательству утверждения 2) теоремы. Так как в случае, когда фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ непримарна, справедливость его установлена уже в п. 1) теоремы, то будем предполагать, что эта фактор-группа примарна. Пусть q — отвечающее ей простое число и $\mathfrak{K}/\mathfrak{P}$ — силовская q-подгруппа группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$. Ввиду q-примарности группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ в группе $\mathfrak{G}$ существует q-элемент Q, не содержащийся в централизаторе $Z(\mathfrak{P})$; поэтому бесконечная группа $\mathfrak{K}$ не может быть абелевой и, значит, является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Пусть далее $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{K}/\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$. Ввиду соотношения $\mathfrak{R}/\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ абелева или гамильтонова. Во втором случае бесконечная группа $\mathfrak{R}$ неабелева и потому является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$. Так как в случае инвариантной группы $\mathfrak{R}$ справедливо прямое разложение $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} = \mathfrak{K}/\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}/\mathfrak{P}$, из которого вытекает справедливость утверждения 2) теоремы, то будем предполагать далее, что группа $\mathfrak{R}$ абелева.

Выделим теперь случай, когда подгруппа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической. В этом случае централизатор $Z(\mathfrak{P})$ абелев (см. теорему 6.2) и $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ — характеристическая подгруппа группы $Z(\mathfrak{P})/\mathfrak{P}$ (так как группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ является q-группой, а порядок группы $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ не делится на q, то $\mathfrak{R} \subset Z(\mathfrak{P})$). Ввиду инвариантности подгруппы $Z(\mathfrak{P})/\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ отсюда вытекает, что подгруппа $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ инвариантна в группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$. Но тогда справедливо разложение $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} = \mathfrak{K}/\mathfrak{P} \times \mathfrak{R}/\mathfrak{P}$, доказывающее утверждение 2) теоремы в рассматриваемом случае.

Таким образом, для завершения доказательства п. 2) теоремы осталось рассмотреть случай, когда одновременно выполняются три условия: $\mathfrak{P}$ — квазициклическая группа, подгруппа $\mathfrak{R}$ абелева и фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ примарна. Число q при этом может быть как четным, так и нечетным. Пусть сначала число q четное (т. е. $q = 2$). Возьмем подгруппу $\mathfrak{P}\{Q\}$, где Q — выделенный выше элемент. Так как $\mathfrak{P}\{Q\}$ — бесконечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то она инвариантна в $\mathfrak{G}$, причем фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{Q\}$ абелева или гамильтонова. Таким образом, в рассматриваемом случае группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ является расширением циклической 2-группы $\mathfrak{P}\{Q\}/\mathfrak{P}$ с помощью нильпотентной группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{Q\}$ и потому нильпотентна.

Пусть теперь $q \neq 2$. Так как подгруппа $\mathfrak{R}$ группы $\mathfrak{G}$ абелева, то группа $\mathfrak{G}$ в рассматриваемом случае не имеет неабелевых 2-подгрупп и потому фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{Q\}$ теперь абелева. Но тогда $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}\{Q\}$. Так как $\mathfrak{G}' \subset Z(\mathfrak{P})$, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P} \times \{Q^k\}$, где $\{Q^k\}$ отличная от единицы (так как $\mathfrak{G}' \neq \mathfrak{P}$) подгруппа из $\{Q\}$. Замечая далее, что при $q \neq 2$ не может выполняться соотношение $p = q$ (p — простое число, отвечающее группе $\mathfrak{P}$), находим, что $\{Q^k\}$ — характеристическая подгруппа группы $\mathfrak{G}'$ и, значит, инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Обозначая через $\overline{\mathfrak{R}}$ максимальную подгруппу из $\mathfrak{R}$ с порядком, не делящимся на p, покажем, что подгруппа $\{Q^k\}\overline{\mathfrak{R}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. В самом деле, ввиду абелевости фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P} \times \{Q^k\}$ подгруппа $(\mathfrak{P} \times \{Q^k\})\overline{\mathfrak{R}}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Но тогда инвариантна в $\mathfrak{G}$ и характеристическая подгруппа $\{Q^k\}\overline{\mathfrak{R}}$ этой группы. Поэтому справедливо соотношение

$$Q^{-1}(\{Q^k\}\overline{\mathfrak{R}})Q = \{Q^k\}\overline{\mathfrak{R}}.$$

Пользуясь здесь леммой 6.1, получаем $Q^{-1}\overline{\mathfrak{R}}Q = \overline{\mathfrak{R}}$. Но тогда группа $\{Q^k\}\overline{\mathfrak{R}}$

абелева. Ввиду уже доказанной ее инвариантности в $\mathfrak{G}$, получаем, что инвариантна в $\mathfrak{G}$ и ее характеристическая подгруппа $\overline{\mathfrak{R}}$. Поэтому инвариантна в $\mathfrak{G}$ и подгруппа $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{R}}$. Учитывая затем, что инвариантны в $\mathfrak{G}$ силовская p-подгруппа $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{G}$ (см. теорему 6.1) и подгруппа $\mathfrak{K}$, получаем прямое разложение

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{P} = \mathfrak{K}/\mathfrak{P} \times \mathfrak{N}/\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{R}}/\mathfrak{P},$$

доказывающее нильпотентность группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ в последнем из рассматриваемых случаев. Теорема доказана.

В связи с утверждением п. 1) теоремы необходим пример такой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ с бесконечным коммутантом $\mathfrak{G}'$, являющейся расширением квазициклической p-группы $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{G}'$ с помощью конечной гамильтоновой группы, для которой фактор-группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ была бы непримарной. Здесь дается один из примеров такого рода.

Пример. Пусть $\mathfrak{P}\{Q\}$ — полупрямое произведение квазиклической p-группы с $p = 7$ и циклической группы $\{Q\}$ порядка 3, определяемое соотношениями

$$P_0 = 1, \qquad P_n^7 = P_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$Q^3 = 1, \qquad Q^{-1}P_nQ = P_n^{2^{7^{n-1}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть далее $\mathfrak{K}$ — группа кватернионов с образующими элементами A и B и определяюшими соотношениями

$$A^{2^2} = 1, \quad B^2 = A^2, \quad BAB^{-1} = A^{-1}.$$

Определим теперь полупрямое произведение $\mathfrak{G} = (\mathfrak{P}\{Q\})\,\mathfrak{K}$ с помощью соотношений

$$P_nA = AP_n, \quad B^{-1}P_nB = P_n^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

$$QA = AQ, \quad QB = BQ,$$

сохраняя при этом соотношения, действующие в группах $\mathfrak{P}\{Q\}$ и $\mathfrak{K}$. Получаемая так группа $\mathfrak{G}$, очевидно, удовлетворяет всем отмеченным требованиям.

Следствие 6.1. *Пусть коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен и не совпадает с ее максимальной полной подгруппой $\mathfrak{P}$. Если группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ примарна и q — отвечающее ей простое число, то каждая силовская r-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ с $r \neq q$ и $r \neq p$ (p—простое число, отвечающее подгруппе $\mathfrak{P}$) является прямым множителем группы $\mathfrak{G}$; при $r \neq 2$ такая подгруппа абелева, а при $r = 2$ может быть как абелевой, так и гамильтоновой. Если подгруппа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической группой, то все такие подгруппы абелевы.*

Доказательство. Как уже неоднократно отмечалось, фактор-группа $\overline{IH}$-группы по любой ее бесконечной неабелевой подгруппе является абелевой или гамильтоновой. Поэтому при условиях теоремы 6.3 группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ не может иметь более одной неабелевой силовской подгруппы. Однако ввиду установленной в теореме 6.3 нильпотентности группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ все они не могут быть абелевыми (так как иначе $\mathfrak{G}' = \mathfrak{P}$). Пусть теперь $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ — q-группа и $\mathfrak{D}$ — силовская r-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ с $r \neq q$ и $r \neq p$. Так как $r \neq q$, то $\mathfrak{D} \subset Z(\mathfrak{P})$. Ввиду нильпотентности группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ нильпотентна и группа $Z(\mathfrak{P})/\mathfrak{P}$. Но тогда $\mathfrak{D}$ — характеристическая подгруппа группы $Z(\mathfrak{P})$ (так как $r \neq p$) и, значит, инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{C}/\mathfrak{P}$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{D}\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ в $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$, то $\mathfrak{C}$ — дополнение подгруппы $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{G}$. Так как подгруппа $\mathfrak{C}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ (как бесконечная неабелева группа), то $\mathfrak{G} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$, что и требовалось доказать.

Если $r \neq 2$, то из соотношения $\mathfrak{D} \simeq \mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ вытекает, что группа $\mathfrak{D}$ абелева. При $r = 2$ группа $\mathfrak{D}$ может быть как абелевой, так и гамильтоновой, в чем нетрудно убедиться с помощью соответствующих примеров.

Если подгруппа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической группой, то ввиду теоремы 6.2 $q \neq 2$ и подгруппа $Z(\mathfrak{P})$ абелева. Если $r = 2$, то подгруппа $\mathfrak{D}$ в этом случае содержится в централизаторе $Z(\mathfrak{P})$ и потому абелева. Следствие 6.1 доказано.

В теореме 6.3 содержится следующее утверждение.

Следствие 6.2. *Если коммутант локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$, не являющейся конечным расширением квазициклической группы, бесконечен и отличен от максимальной полной подгруппы $\mathfrak{P}$ из $\mathfrak{G}$, то группа $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$ примарна.*

Пользуясь следствиями 6.1 и 6.2, можно доказать такое следствие.

Следствие 6.3. *Пусть коммутант локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен и отличен от ее максимальной полной подгруппы $\mathfrak{P}$. Если подгруппа $\mathfrak{P}$ не является квазициклической группой и q — простое число, делящее порядок фактор-группы $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{P})$, то справедливо разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — конечная абелева группа с порядком, не делящимся на q, и $\mathfrak{R}$ — такая содержащая $\mathfrak{P}$ группа, что фактор-группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ является неабелевой q-группой.*

Пользуясь нильпотентностью группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$, установленной теоремой 6.3, получаем далее следующее следствие.

Следствие 6.4. *Если коммутант $\mathfrak{G}'$ локально ступенчатой $\overline{IH}$-группы $\mathfrak{G}$ бесконечен, то она имеет инвариантную в ней экстремальную бесконечную силовскую p-подгруппу $\mathfrak{N}$ и разлагается в произведение $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — конечная нильпотентная группа с неделящимся на p порядком, имеющая не более одной неабелевой силовской подгруппы.*

Сопоставляя это предложение со следствием 5.2, получаем следующее утверждение.

Следствие 6.5. *Всякая периодическая локально ступенчатая $\overline{IH}$-группа имеет инвариантную дополняемую в ней силовскую подгруппу с нильпотентным дополнением, имеющим не более одной неабелевой силовской подгруппы.*

В теоремах 6.2 и 6.3 содержится следующее утверждение.

Для того чтобы бесконечная неабелева группа $\mathfrak{G}$, не являющаяся конечным расширением казициклической группы, была локально ступенчатой $\overline{IH}$-группой с бесконечным коммутантом, необходимо выполнение следующих условий:

1) группа $\mathfrak{G}$ имеет абелев нормальный делитель $\mathfrak{C}$, определяющий конечную циклическую фактор-группу $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ нечетного порядка и являющийся конечным расширением p-группы $\mathfrak{P}$, которая разлагается в прямое произведение квазициклических групп с отличным от единицы конечным числом множителей;

2) все отличные от единицы элементы фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ индуцируют в подгруппе $\mathfrak{P}$ отличные один от другого неприводимые автоморфизмы.

Пользуясь теоремами 6.2 и 6.3 и следствием 6.3, нетрудно убедиться в том, что для этого необходимо также и условие:

3) если фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ неабелева, то группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}$ примарна (пусть r — отвечающее ей простое число) и существует прямое разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$, в котором $\mathfrak{S}$ — конечная абелева группа с порядком, не делящимся на r, и $\mathfrak{R}$ — такая содержащая $\mathfrak{P}$ группа, для которой фактор-группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ является неабелевой r-группой со следующими свойствами:

а) группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ разлагается в произведение двух инвариантных в ней абелевых подгрупп $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{B}/\mathfrak{P}$, причем подгруппа $\mathfrak{A}$ абелева и $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\{B\}$, где B — r-элемент, для которого $\mathfrak{C}\{B\} = \mathfrak{G}$;

б) каждая не содержащаяся в $\mathfrak{A}/\mathfrak{P}$ циклическая подгруппа $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ группы $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ инвариантна в $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$ и определяет абелеву фактор-группу $(\mathfrak{R}/\mathfrak{P})/(\mathfrak{D}/\mathfrak{P})$.

Покажем теперь, что если бесконечная неабелева группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям 1) — 3), то она является локально ступенчатой $\overline{IH}$-группой с бесконечным коммутантом. В самом деле, ввиду условий 1) и 2) группа $\mathfrak{G}$

является локально конечной и, значит, локально ступенчатой группой. Ввиду условия 2) ее коммутант $\mathfrak{G}'$ бесконечен. Ввиду условия 2) каждая бесконечная неабелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ содержит подгруппу $\mathfrak{P}$. Но тогда ввиду условия 3) любая бесконечная неабелева подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Действительно, подгруппа $\mathfrak{H}$ содержит подгруппу $\mathfrak{P}$ и некоторый элемент Q, не содержащийся в $\mathfrak{C}$, и, значит, содержит бесконечную неабелеву подгруппу $\mathfrak{P}\{Q\}$. Если $\mathfrak{P}=\mathfrak{G}'$, то подгруппа $\mathfrak{H}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$ (так как $\mathfrak{H}\supset\mathfrak{P}$) и потому будем предполагать далее, что $\mathfrak{P}\neq\mathfrak{G}'$. Тогда ввиду п. 3) порядок элемента Q делится на r (так как $Q\not\in\mathfrak{C}$). Если $r^k s$ — порядок элемента Q (s не делится на r), то для r-элемента $R=Q^s$ группа $\mathfrak{P}\{R\}$ содержится в $\mathfrak{R}$. Элемент R, очевидно, не содержится в группе $\mathfrak{C}$ и потому группа $\mathfrak{P}\{R\}$ неабелева (см. условие 2)). Но тогда ввиду п. а) элемент R не содержится в подгруппе $\mathfrak{A}$. В силу п. б) отсюда вытекает, что $\mathfrak{P}\{R\}$ — инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{R}$, а значит, и инвариантная подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Так как ввиду разложения $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}$ и в силу пункта σ) фактор-группа $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{R\}$ абелева, то фактор-группа $\mathfrak{H}/\mathfrak{P}\{R\}$ инвариантна в $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}\{R\}$. Но тогда подгруппа $\mathfrak{H}$ инвариантна в $\mathfrak{G}$. Так как в силу условия 1) рассматриваемая группа $\mathfrak{G}$ не является конечным расширением квазициклической группы, то вместе с этим доказана теорема.

Теорема 6.4. *Для того чтобы бесконечная неабелева группа, не являющаяся конечным расширением квазициклической группы, была локально ступенчатой $\overline{IH}$-группой с бесконечным коммутантом, необходимо и достаточно выполнение условий* 1)—3).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп, ДАН СССР, т. 171, 1966.
2. Г. М. Ромалис, Н. Ф. Сесекин, О метагамильтоновых группах, Матем. зап. Уральского (Свердловского) ун-та, т. 5, № 3, 1966.
3. Н. Ф. Сесекин, Г. М. Ромалис, О метагамильтоновых группах. II, Матем. зап. Уральского (Свердловского) ун-та, т. 6, № 3, 1968.
4. С. Н. Черников, Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп, УМЖ, т. 19, № 6, 1967.
5. С. Н. Черников, Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп, ДАН СССР, т. 159, № 4, 1964.
6. С. Н. Черников, Бесконечные специальные группы, Матем. сб., т. 6(48):2, 1939.
7. С. Н. Черников, Бесконечные локально разрешимые группы, Матем. сб., т. 7(49):1, 1940.
8. С. Н. Черников, О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами, Матем. сб., т. 52(94):1, 1960.
9. М. И. Каргаполов, О проблеме О. Ю. Шмидта, Сиб. матем. ж., т. 4, № 1, 1963.
10. W. R. Scott, Grouptheory, Englewood Cliffs, 1964.
11. С. Н. Черников, О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб., т. 28(70):1, 1951.
12. P. Hall, On the finiteness of certain soluble groups, Proc. London Math. Soc., 5, 9, 1959, 595—622.
13. С. Н. Черников, О строении групп с конечными классами сопряженных элементов, ДАН СССР, т. 115, № 1, 1957.
14. L. Redei, Das «Schiefe Product» in Gruppentheoric mit Anwendungen..., Comment Math. Helv., 20, 1947, 225—264.
15. М. Холл, Теория групп, ИЛ, М., 1962.
16. С. Н. Черников, О специальных p-группах, Матем. сб., т. 27(69):2, 1950.
17. С. Н. Черников, О централизаторе полного абелева нормального делителя в бесконечной периодической группе, ДАН СССР, т. 72, № 2, 1950.
18. Я. Д. Половицкий, О группах с условием π-минимальности для подгрупп, Сиб. матем. ж., т. 3, № 4, 1962.
19. С. Н. Черников, О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп, Матем. заметки, т. 4, № 1, 1968.
20. С. Н. Черников, О дополняемости силовских π-подгрупп в некоторых классах бесконечных групп, Матем. сб., т. 37(79):3, 1955.
21. С. Н. Черников, О бесконечных специальных группах с конечным центром, Матем. сб., т. 17(59):1, 1945.

Поступила 4.V 1971 г.
Институт математики АН УССР