1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.41/47

О группах Фробениуса

А. И. Старостин

Среди работ О. Ю. Шмидта есть две заметки [14, 15], посвященные знаменитой теореме Фробениуса. Эта теорема является одним из мощных средств исследования в теории групп. В частности, она представляет собой один из важных признаков непростоты группы. В то же время, как указал О. Ю. Шмидт в [15], важно иметь обобщения теоремы Фробениуса и на бесконечные группы. Например, с помощью одного из таких обобщений (см. § 4) можно было бы установить локальную конечность периодических групп с условием минимальности для подгрупп.

Цель данной статьи — дать краткий обзор работ, посвященных теореме Фробениуса и некоторым ее обобщениям. Доказательства, как правило, не приводятся.

Приведем некоторые из используемых обозначений: $\{a, b, c, \ldots\}$—множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$; $A \setminus B$ — множество элементов из A, не содержащихся в B; $\langle M \rangle$—подгруппа, порожденная множеством M элементов группы; e—единичный элемент группы; E—единичная подгруппа группы; $F \leftthreetimes H$—полупрямое произведение групп F и H, причем F инвариантна; H^g — множество элементов вида $g^{-1}hg$, где $h \in H$; $x^U = x^{u_1}x^{u_2} \ldots x^{u_k}$, где $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$; $|A|$ — мощность множества A; $|a|$ — порядок элемента a в группе; $|G:A|$—индекс подгруппы A в группе G.

§ 1. Теорема Фробениуса

Конечная группа G называется *группой Фробениуса*, если в ней найдется собственная подгруппа H, совпадающая со своим нормализатором и взаимно простая со своими сопряженными подгруппами, отличными от H. Последние два условия эквивалентны следующему:

$$H \cap H^g = E$$

для всех $g \in G \setminus H$.

Простейшие примеры групп Фробениуса: симметрическая группа 3-й степени; знакопеременная группа 4-й степени; полупрямое произведение $A \leftthreetimes \langle t \rangle$ абелевой группы A нечетного порядка и циклической группы $\langle t \rangle$ 2-го порядка, причем, $a^t = a^{-1}$ для любого $a \in A$.

Строение групп Фробениуса по существу вскрывается следующей теоремой, доказанной Фробениусом [24].

Т е о р е м а Ф р о б е н и у с а. *Если в конечной группе G найдется подгруппа H, такая что $H \cap H^g = E$ для любого $g \in G \setminus H$, то множество элементов из G, не входящих в H и ни в одну из сопряженных с H подгрупп, вместе с единицей является инвариантной подгруппой F группы G.*

Доказательство этой теоремы можно найти во многих монографиях (см. например, [11]). Однако до сих пор не удалось найти доказательства, не использующего методы теории характеров. Ясно, что теорема Фробениуса немедленно следует из теоремы Силова в случае, когда $|G:H| = n$ есть степень простого числа. Заметим, что n является степенью точного транзитивного представления группы G подстановками смежных клас ов по H. Еще до Фробениуса элементарными средствами теорему доказал Жордан [31], предполагая G дважды транзитивной. Бернсайд [18, стр. 172—173] также элементарными методами доказал частный случай теоремы, когда порядок H четен.

Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — множество инволюций (элементов второго порядка), взятых по одной из каждой сопряженной с H подгруппы. Так как пара инволюций a, b в любой группе порождает группу диэдра $\langle ab\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$ и $a^{-1}aba = b^{-1}abb = (ab)^{-1}$, то j_ij_k при любых i, k содержится во множестве $F=(G\setminus\bigcup\limits_{g\in G}H^g)\bigcup\{e\}$. Если один из индексов i, k фиксирован, а другой пробегает значения от 1 до n, то получается n различных элементов из F. Так как $|F| = n$, то эти элементы исчерпывают все F. Поэтому для любых $1 \leqslant i, k, m \leqslant n$

$$(j_ij_k)(j_mj_k) = j_i(j_kj_m)j_k = j_i(j_ij_l)j_k = j_lj_k$$

при некотором $1 \leqslant l \leqslant n$. Значит, F есть подгруппа, и теорема Фробениуса доказана.

Следуя [35], наметим доказательство теоремы Фробениуса в случае, когда подгруппа H разрешима. Заметим, что в этом случае теорема Фробениуса вытекает из более общего утверждения, доказанного Грюном [26].

Пусть σ — перемещение (сдвиг) G в подгруппу H. σ является гомоморфизмом G в фактор-группу H/H', где H' — коммутант H. По известной формуле [11, стр. 230] легко проверить, что $\sigma(fhf^{-1}) = H'h, \sigma(f) = H'$ для любых элементов $h\in H$, $f\in G\setminus\bigcup\limits_{g\in G}H^g$. Используя индукцию по ступени разрешимости H и применяя индукционное предположение к ядру σ, получим требуемое.

Эти рассуждения были применены С. А. Чунихиным [13] для доказательства следующего более общего утверждения.

Пусть подгруппа H конечной группы G совпадает со своим нормализатором и пусть H содержит такой элемент h, что никакая подгруппа, сопряженная с H в G и отличная от H, уже не содержит элементов вида $h^k \neq e$. Если h не входит в коммутант группы H, то группа G непроста.

Подгруппу H (и любую сопряженную с ней) называют *дополнительным*, а подгруппу F — *инвариантным множителем Фробениуса*. Очевидно, $G = F \leftthreetimes H$, и ни один отличный от единичного элемент из H не перестановочен ни с одним неединичным элементом из F. Это свойство оказывается характеристическим для групп Фробениуса, *т. е. всякое полупрямое произведение $F \leftthreetimes H$ двух* (конечных нетривиальных) *групп F и H, в котором $fh \neq hf$ для любых неединичных элементов $f\in F$* и *$h\in H$, есть группа Фробениуса, причем F — инвариантный, а H — дополнительный множители Фробениуса.* Инвариантный и дополнительный множители в группе Фробениуса сильно изолированы, в частности, они являются холловскими подгруппами. Подгруппа U группы G называется *сильно изолированной* в G, если она содержит централизатор любого своего неединичного элемента. Используя это понятие, нетрудно установить справедливость следующих критериев для группы Фробениуса.

Конечная группа тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда она содержит собственную инвариантную сильно изолированную подгруппу.

Конечная группа тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда она представима в виде полупрямого произведения двух своих подгрупп, по крайней мере одна из которых сильно изолирована.

Конечная группа тогда и только тогда является группой Фробениуса, ко да она представима в виде произведения двух своих собственных сильно изолированных подгрупп, каждая из которых взаимно проста со своими сопряженными подгруппами [22].

Группы Фробениуса составляют важный класс так называемых расщепляемых групп. Группа называется *расщепляемой*, если она покрывается системой $\{H_\alpha\}$ собственных попарно взаимно простых подгрупп. Подгруппы H_α называют при этом *компонентами расщепления*, а если H_α уже нерасщепляемы, то — *неприводимыми компонентами расщепления*. Компонентами расщепления группы Фробениуса служат, например, ее инвариантный и все дополнительные множители Фробениуса. Более того, *конечная группа тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда она расщепляема и по крайней мере одна неприводимая компонента расщепления совпадает со своим нормализатором.*

В [37] указан критерий для одного частного класса групп Фробениуса. Пусть F — собственная подгруппа конечной группы G, такая что для любой пары элементов x и y из G, $x \notin F$, существует один и только один элемент $f \in F$, для которого

$$y^{-1}xy = f^{-1}xf.$$

Так как $f^{-1}xf \notin F$, то $G \setminus F$—инвариантное множество. Значит, F — инвариантная подгруппа в G и содержит коммутант группы G. Кроме того, единственным элементом из F, для которого $f^{-1}xf = x$, служит единичный элемент. Следовательно, F сильно изолирована в G, а по приведенному выше критерию G есть группа Фробениуса с инвариантным множителем F и абелевым (поэтому циклическим, как будет видно из дальнейшего) дополнительным множителем. Легко проверяется и обратное утверждение.

Отметим еще один очевидный критерий для групп Фробениуса. Конечная группа G тогда и только тогда является группой Фробениуса, когда она содержит собственную подгруппу H, такую что любые два элемента из H могут быть сопряжены в G лишь с помощью элементов из H.

Другие критерии для групп Фробениуса можно найти в [6].

Пусть U — подгруппа группы Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$, где F — инвариантный и H — дополнительный множители Фробениуса. Тогда либо $U \leqslant F$, либо $U \cap F = E$, либо U — группа Фробениуса с инвариантным множителем $U \cap F$. Если к тому же U инвариантна в G, то либо $U \leqslant F$, либо $F < U$. В самом деле, $U \cap F$ — сильно изолированная инвариантная подгруппа в U, а $UF/U \cap F = U/U \cap F \times F/U \cap F$, когда U инвариантна. Отсюда легко вытекает, что фактор-группа G/U либо есть группа Фробениуса с инвариантным множителем F/U, если $U < F$, либо изоморфна фактор-группе дополнительного множителя Фробениуса.

§ 2. Свойства инвариантного множителя Фробениуса

Пусть $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса, где F и H — соответственно инвариантный и дополнительный множители Фробениуса. Из-за сильной изолированности F любой элемент из $G \setminus F$ индуцирует при трансформировании регулярный автоморфизм в F. Поэтому, если индекс F четен, то F коммутативен, так как допускает регулярный автоморфизм τ 2-го порядка. (Для любого $f \in F$ $\tau(f) = f^{-1}$.) Вейснер [40] пытался доказать коммутативность инвариантного множителя Фробениуса в общем случае. О. Ю. Шмидт [14] обнаружил ошибку в рассуждениях Вейснера и построил пример группы Фробениуса с некоммутативным инвариантным множителем.

Пример О. Ю. Шмидта.

$$G=\langle a, b, c\rangle \leftthreetimes \langle d\rangle,$$

$$a^7=b^7=c^7=d^3=e,$$

$$[b, a]=c, [c, a]=[c, b]=e,$$

$$a^d=a^2c, b^d=b^2, c^d=c^4.$$

Здесь инвариантный множитель $\langle a, b, c\rangle$ метабелев, порядка 7^3, и допускает регулярный автоморфизм 3-го порядка. Заметим, что конечная группа, допускающая регулярный автоморфизм 3-го порядка, всегда метабелева [34].

В предположении разрешимости F следующим образом можно доказать нильпотентность F (см., например, [42]). Индукцией по порядку группы $G=F \leftthreetimes H$ доказательство сводится к установлению существования центра F в случае, когда $F=P \leftthreetimes Q$ — полупрямое произведение элементарных абелевых силовских подгрупп P и Q, а $H=\langle h\rangle$ — циклическая группа простого порядка, причем $Q^h=Q$.

Пусть $e \neq x \in P$. Тогда $x_1=x^Q$ лежит, очевидно, в центре F, и осталось показать, что $x_1 \neq e$. Для этого заметим, что

$$(Q \leftthreetimes \langle h\rangle)\setminus Q=\bigcup_{i=1}^{|h|-1} Qh^i=\bigcup_{g\in Q}(\langle h^g\rangle \setminus E),$$

$$x^{\bigcup\limits_{i=1}^{|h|-1} Qh^i}=x_1^{\langle h\rangle\setminus E}=x^{\bigcup\limits_{g\in Q}(\langle h^g\rangle\setminus E)}=\prod_{g\in Q} x^{\langle h^g\rangle\setminus E}=x^{-|Q|}\neq e,$$

так как $x^{\langle h^g\rangle}=e$ по свойству группы Фробениуса $P \leftthreetimes \langle x^g\rangle$. Теперь из $x_1^{\langle h\rangle\setminus E}\neq e$ следует $x_1\neq e$, что и требовалось.

Фейт [21] доказал нильпотентность инвариантного множителя F Фробениуса при дополнительном предположении, что среди факторов F не существует так называемых «исключительных» групп. Наконец, Томпсон [38] доказал следующую замечательную теорему.

Инвариантный множитель Фробениуса нильпотентен.

Достаточно, конечно, установить разрешимость инвариантного множителя Фробениуса. Томпсону это удалось с помощью принадлежащего ему критерия существования инвариантных p-дополнений. Из результатов Томпсона вытекает также, что «исключительных» групп не существует. Из теоремы Томпсона и отмеченной выше инцидентности инвариантных подгрупп группы Фробениуса с ее инвариантным множителем немедленно вытекает единственность инвариантного множителя Фробениуса, так как в нильпотентной группе нет собственных сильно изолированных подгрупп.

Другими словами, *конечная группа не может содержать более одной сильно изолированной инвариантной собственной подгруппы* [5, 1]. Отметим, что в [17] «изучались» конечные группы с двумя сильно изолированными инвариантными подгруппами.

Далее, с помощью теоремы Томпсона можно уточнить расположение подгрупп группы Фробениуса. А именно, подгруппа U группы Фробениуса $G=F \leftthreetimes H$ либо содержится в инвариантном множителе F, следовательно, нильпотентна, либо в одном из дополнительных множителей, т. е. в H или сопряженной с H подгруппе, либо, наконец, сама является группой Фробениуса, инвариантный множитель которой есть $U \cap F$, а дополнительный — пересечение U с одним из дополнительных множителей.

Остается открытым по существу вопрос, какие нильпотентные группы могут служить ниварииантными множителями Фробениуса. Другими словами, какие нильпотентные группы допускают регулярный автоморфизм простого порядка. В этом направлении известен ряд результатов, оценивающих класс нильпотентности группы F, допускающей регулярный автоморфизм заданного простого порядка p. Г. Хигман [29] доказал, что для каждого простого числа p существует такое целое число $k(p)$, зависящее только от p, что класс нильпотентности группы, допускающей регулярный автоморфизм порядка p, не превосходит $k(p)$. Как уже отмечалось, $k(2) = 1$, $k(3) = 2$. Г. Хигман показал, что $k(5) = 6$ и что $k(p) \geqslant \frac{p^2-1}{4}$ для любого нечетного простого p. В. А. Крекниным и А. И. Кострикиным [7, 8] найдена верхняя граница для $k(p)$:

$$k(p) \leqslant \frac{(p-1)^{2p-1}-1}{p-1}.$$

Кроме того, Г. Хигман [30] изучил строение конечных 2-групп Q, допускающих циклическую группу автоморфизмов, транзитивную на множестве инволюций. Если такая группа Q неабелева и содержит $q - 1 > 1$ инволюций, то $|Q|$ равен q^2 или q^3, $\exp Q = 4$.

В случае $|Q| = q^2$ группа Q изоморфна группе матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

где α, β — элементы поля F из $q = 2^n > 2$ элементов, θ — такой автоморфизм поля F, что ни один отличный от единицы элемент из F не переводится автоморфизмом θ в свой обратный. Отображение, переводящее

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha^\theta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \text{ в } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (\zeta\alpha)^\theta & 1 & 0 \\ \zeta^{1+\theta}\beta & \zeta\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

где ζ — ненулевой элемент поля F, есть регулярный автоморфизм. Таким образом, Q вкладывается в качестве инвариантного множителя в группу Фробениуса с циклическим дополнительным множителем порядка $q - 1$. Заметим еще, что при $\theta^2 = 2$ группа Q изоморфна силовской 2-подгруппе простой группы Судзуки.

Укажем еще одно свойство инвариантного множителя Фробениуса, получающееся простым подсчетом элементов. *Если F — инвариантный множитель Фробениуса, а h — произвольный неединичный элемент дополнительного множителя, то каждый элемент из F представим в виде коммутатора $[h, f]$, где $f \in F$.*

Следующие замечательные свойства инвариантного множителя Фробениуса относятся к теории характеров. *Если ψ — неглавный неприводимый характер инвариантного множителя F, то индуцированный характер ψ^* группы Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$ также неприводим и, конечно, не содержит F в своем ядре. Обратно, всякий неприводимый характер χ группы G, не содержащий F в своем ядре, можно получить таким образом.* Итак, все неприводимые характеры группы Фробениуса известны, как только известны неприводимые характеры ее инвариантного и дополнительного множителей. Более того, если χ и ψ имеют тот же смысл, что и выше, и $\chi = \psi^*$, то $\chi(h) = 0$ для $e \neq h \in H$ и $\chi(e) = |H|$ ст. ψ. Ограничение $\psi^*|_F$ характера ψ^* на F оказывается равным $\sum\limits_{h \in H} \psi^h$, где ψ^h определяется следующим образом:

$$\psi^h(f) = \psi(f^h), \quad f \in F,$$

ψ^h — снова неприводимый характер F, и $\psi^{h_1} \neq \psi^{h_2}$ при $h_1 \neq h_2$. Кроме того, ограничения на F различных неприводимых характеров группы G, не содержащих F в своем ядре, не имеют общих неприводимых характеров в указанном выше разложении.

Теперь можно сформулировать и доказать принадлежащий О. Ю. Шмидту [14] критерий коммутативности инвариантного множителя Фробениуса.

Критерий О. Ю. Шмидта. *Инвариантный множитель F группы Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$ коммутативен тогда и только тогда, когда в представление ρ группы G подстановками смежных классов по H каждое неприводимое представление группы G входит с кратностью $\leqslant 1$.*

Более того, если χ — характер представления ρ, то имеет место следующее разложение χ:

$$\chi = 1_G + \sum_s \text{ст.}\ \psi_{\mu(s)} \Phi_s,$$

где Φ_s — пробегает все неприводимые характеры группы G, не содержащие F в своем ядре, $\Phi_s = \psi^*_{\mu(s)}$ для некоторого неприводимого характера $\psi_{\mu(s)}$ группы F, 1_G — единичный характер G.

Для доказательства разложим χ в сумму неприводимых характеров группы G:

$$\chi = d_0 1_G + \sum_s a_s \Phi_s + \sum_\nu b_\nu \Gamma_\nu,$$

где Γ_ν — пробегает все неприводимые неглавные характеры группы G, содержащие F в своем ядре. В силу транзитивности представления ρ $d_0 = 1$. Более того, ограничение ρ на F является регулярным представлением группы F. Поэтому

$$\chi|_F = 1_G|_F + \sum_s a_s \Phi_s|_F + \sum_\nu b_\nu \Gamma_\nu|_F = \sum_\mu \text{ст.}\ \varphi_\mu \varphi_\mu,$$

где φ_μ — пробегает все неприводимые характеры F. Так как $\Gamma_\nu|_F$ есть сумма единичных характеров группы F, то $b_\nu = 0$ и

$$\chi|_F = 1_G|_F + \sum_s a_s \Phi_s|_F = \sum_\mu \text{ст.}\ \varphi_\mu \varphi_\mu.$$

Далее, $\Phi_s|_F = \sum_{h \in H} \varphi^h_{\mu(s)}$ и, как отмечено выше, $\Phi_s|_F$ и $\Phi_t|_F$ не имеют общих неприводимых характеров F при $s \neq t$. Отсюда получаем $a_s = $ $=$ ст. $\varphi_{\mu(s)}$, и требуемое равенство доказано.

Если теперь в представлении ρ каждое неприводимое представление группы G появляется не более одного раза, то из этого равенства следует, что все неприводимые характеры группы F одномерны и, следовательно, F коммутативна. Обратное очевидно.

§ 3. Свойства дополнительного множителя Фробениуса

Всякая подгруппа порядка pq, где p и q не обязательно различные простые числа, дополнительного множителя Фробениуса — циклическая [18].

Допустив противное, можно считать, что существует группа Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$ с абелевым инвариантным множителем F и нециклическим дополнительным множителем H порядка pq. Пусть $H = \langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle$, где $|u| =$ $= p$, $|v| = q$ и $e \neq x \in F$. Элемент $x_1 = x^H$ равен e, так как он централизует H. Следовательно, $x^{H \setminus E} = x^{-1}$. Ввиду нецикличности H, имеем

$$H \setminus E = (\langle u \rangle \setminus E) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{p} (\langle u^i v \rangle \setminus E) \right).$$

По свойству групп Фробениуса $F \leftthreetimes \langle u \rangle$ и $F \leftthreetimes \langle u^i v \rangle$ имеем

$$x^{\langle u \rangle \setminus E} = x^{-1}, \quad x^{\langle u^i v \rangle \setminus E} = x^{-1}.$$

Поэтому

$$x^{-1} = x^{H \setminus E} = (x^{-1})^{p+1}.$$

Следовательно, $x^p = e$. Это невозможно, так как порядки F и H взаимно просты.

Из доказанного утверждения следует, что силовские p-подгруппы в дополнительном множителе Фробениуса циклические при $p > 2$, а при $p = 2$ либо циклические, либо (обобщенные) группы кватернионов. Разрешимые группы с таким свойством описаны Цассенхаузом [43], неразрешимые — М. Судзуки [36] (см. также [39]). Из этого описания вытекает строение дополнительного множителя Фробениуса.

Разрешимый дополнительный множитель H Фробениуса является группой одного из следующих типов:

1) *циклическая группа*;

2) $H = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $(|a|, |b|) = 1$, $\langle a \rangle = H'$, *все элементы простых порядков из* $\langle b \rangle$ *лежат в центре* H;

3) $H = H_1 \leftthreetimes Q$, где H_1 — *группа нечетного порядка одного из типов* 1), 2), Q — (*обобщенная*) *группа кватернионов с инволюцией* t, *причем* t *лежит в центре* H;

4) $H = Q \leftthreetimes H_1$, *где* H_1 — *группа нечетного порядка одного из типов* 1), 2), Q — *группа кватернионов* 8-*го порядка*;

5) H *содержит подгруппу индекса* 2 *типа* 4), *и силовская* 2-*подгруппа из* H *есть обобщенная группа кватернионов порядка* 16.

Неразрешимый дополнительный множитель H Фробениуса содержит в качестве подгруппы индекса $\leqslant 2$ *подгруппу* $K = L \times H_1$, *где* $L \simeq SL\ (2, 5)$, H_1 — *группа одного из типов* 1), 2), *порядок которой взаимно прост с* 30.

Для доказательства можно применить индукцию по $|H|$ и теорему 18.4.4 из [11] к $O_{2'2}(H)$. Так как группа автоморфизмов циклической 2-группы и обобщенной группы кватернионов порядка $\geqslant 16$ есть 2-группа, то достаточно для разрешимой H рассмотреть случай, когда $O_{2'2}(H) = A \leftthreetimes Q$, где $|A|$ нечетен, Q — группа кватернионов и $H/A \leftthreetimes \langle t \rangle$ (t — инволюция из Q) изоморфна знакопеременной группе A_4 или симметрической группе S_4. В первом случае легко показывается, что $[A, Q] = E$. Второй случай приводит к группе типа 5) по предположению индукции. Заметим, что из этой классификации можно легко получить описание дополнительного множителя Фробениуса с помощью образующих и определяющих соотношений.

Случай неразрешимого дополнительного множителя несравненно сложнее.

Из строения дополнительного множителя H Фробениуса видно, *что центр его нетривиален*. Бернсайд [18] пытался доказать нильпотентность H. Цассенхауз [43] привел конкретный пример ненильпотентного дополнительного множителя. Са [19], обнаружив ошибку в этом примере, построил новый пример. Однако и пример Са оказался ошибочным [6]. В. Д. Мазуров [10] построил конкретный пример группы Фробениуса, дополнительный множитель которой изоморфен $SL\ (2, 5)$. Дело в том, что в группе $SL\ (2, p)$, где $p \equiv \pm 1 \pmod 5$, p — простое число, содержится подгруппа, изоморфная $SL\ (2, 5)$. Матрица из $SL\ (2, p)$, среди собственных значений которой есть 1, подобна матрице вида $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, следовательно, является p-элементом в $SL\ (2, p)$. Так как $(|SL\ (2, 5)|, p) = 1$, то $SL\ (2, 5)$ является дополнительным множителем в группе Фробениуса, инвариантный множитель которой изоморфен аддитивной группе векторного пространства размерности два над полем из p элементов (см. РЖМат, 1963, 9А149).

В заключение параграфа приведем один критерий для дополнительного множителя Фробениуса [23], позволяющий иным путем выявить его строение.

Отличная от единичной группа H тогда и только тогда служит дополнительным множителем в некоторой группе Фробениуса, когда существует неприводимый характер χ группы H, такой что для каждой неединичной подгруппы H_0 из H ограничение χ на H_0 ортогонально главному характеру H_0.

§ 4. Обобщения теоремы Фробениуса

В этом параграфе приведены лишь избранные результаты, обобщающие теорему Фробениуса. Здесь не отражены, например, многочисленные результаты о регулярных группах автоморфизмах, обобщения, связанные с различными критериями (см. § 1) групп Фробениуса или с их свойствами.

Одно из наиболее важных обобщений теоремы Фробениуса для конечных групп найдено Виландом [41].

Пусть N — инвариантная подгруппа подгруппы H конечной группы G и пусть для любого $g \in G \setminus H$ $H \cap H^g \leqslant N$. Тогда существует единственная инвариантная подгруппа F в G, такая что

$$G = FH, F \cap H = N.$$

При этом

$$F = G \setminus \bigcup_{g \in G} (H \setminus N)^g.$$

Доказательство и несколько более общие утверждения для этой теоремы можно найти, например, в [9]. Частный случай этой теоремы, когда H/N разрешима, был установлен О. Грюном [26].

К настоящему времени опубликовано несколько обобщений теоремы Фробениуса на бесконечные группы.

Теорема Фробениуса не может быть перенесена на произвольные классы бесконечных групп, как показывает следующий простой пример [33]. Пусть G—свободная группа с двумя образующими x, y, H—ее максимальная циклическая подгруппа. Для любого $g \in G \setminus H \langle H, H^g \rangle$—свободная группа ранга 2, поэтому ее центр тривиален и $H \cap H^g = E$. Если бы для H существовало инвариантное дополнение, то в нем содержался бы коммутант G' группы G. Это приведет к противоречию, если выбрать H так, чтобы $H \cap G' \neq E$.

Вместе с тем имеется следующий пример группы, в которой выполнены как условие, так и заключение теоремы Фробениуса. Пусть K — произвольное тело, G — множество матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix},$$

где $a, b \in K$, $a \neq 0$. Относительно умножения G — группа. Подмножество H матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

является подгруппой, изоморфной мультипликативной группе тела K. Для любого $g \in G \setminus H$ $H \cap H^g = E$, и подмножество $F = \left(G \setminus \bigcup_g H^g\right) \bigcup E$ совпадает с множеством матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

и является инвариантной подгруппой в G, $G = F \leftthreetimes H$.

Следует заметить, что a в этом примере может пробегать лишь некоторую подгруппу мультипликативной группы K. Таким образом, в частности, получается пример В. С. Чарина [12] локально конечной группы Фробениуса, в которой дополнительный множитель квазициклический (см. также [3]).

В [15] сформулирована следующая гипотеза, высказанная О. Ю. Шмидтом еще в 1947 г.

Если подгруппа H периодической группы G совпадает со своим нормализатором, взаимно проста со своими сопряженными и отлична от своего коммутанта, то G непроста.

До сих пор эта гипотеза ни доказана, ни опровергнута, даже для такого «простого» случая, когда H — циклическая группа простого порядка.

В. П. Шунков [16] доказал гипотезу О. Ю. Шмидта в предположении, что H — конечная подгруппа четного порядка.

На локально конечные группы теорема Фробениуса переносится дословно, как впервые это было показано в сообщении В. М. Бусаркина и А. И. Старостина [2] на IV Всесоюзном совещании по общей алгебре в Киеве в 1962 г. Несколько позднее эта теорема была опубликована О. Кегелем [32]. Свойства локально конечных групп Фробениуса достаточно подробно приведены в [3] и по существу не отличаются от конечных. В частности, инвариантный множитель Фробениуса нильпотентен. Это следует из его локальной нильпотентности и из основного результата [29]. Заметим еще, что свойство «быть группой Фробениуса» локально. В [28] установлена справедливость теоремы Фробениуса для алгебраических групп, а в [4] для случая, когда группа H есть расширение локально нильпотентной группы A с помощью локально конечной. При этом дополнительно требуется π-полнота подгруппы A, где π — множество простых делителей порядков элементов из H. Группа A называется π-полной, если всякий элемент из A представим в виде (конечного) произведения n-х степеней элементов из A для любого целого n, все простые делители которого входят в π.

На локально конечные группы переносится и теорема Виланда. В самом деле, пусть N — инвариантная подгруппа подгруппы H локально конечной группы G и пусть выполнены для H и N условия теоремы Виланда. Если U — подгруппа из G, $U \cap H = H_1$, $U \cap N = N_1$, то N_1 инвариантна в H_1 и для H_1 и N_1 снова выполняются условия теоремы Виланда. Обозначим: $F = G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} (H \setminus N)^g$. Докажем, что F — подгруппа. Пусть $a, b \in F$. Если $ab \notin F$, то в силу инвариантности множества F в G можно считать, что $ab \in H$. Применим теорему Виланда к конечной группе $U = \langle a, b \rangle$ и ее подгруппам $H_1 = U \cap H$ и $N_1 = U \cap N$. Тогда в U найдется инвариантная подгруппа F_1, такая что

$$U = F_1 H_1, F_1 \cap H_1 = N_1 \text{ и } F_1 = U \setminus \bigcup_{u \in U} (H_1 \setminus N_1)^u.$$

Допустим, что в F_1 найдется элемент f, не содержащийся в F. Тогда $f \in (H \setminus N)^g$ для некоторого $g \in G$. Обозначим: $H_2 = U \cap H^g$, $N_2 = U \cap N^g$ и применим теорему Виланда. Тогда в U найдется инвариантная подгруппа F_2, такая что $U = F_2 H_2$, $F_2 \cap H_2 = N_2$ и $F_2 = U \setminus \bigcup\limits_{u \in U} (H_2 \setminus N_2)^u$. Для некоторого $u \in U$ $(H_1 \setminus N_1)^u \cap (H_2 \setminus N_2) \neq \varnothing$, поэтому $(U \cap H)^u = (U \cap H)^g$ и $f \in H_1^u$. Это противоречит выбору f. Итак, $F_1 \leqslant F$, $ab \in F$. Это означает, что F — инвариантная подгруппа в G, $F \cap H = N$. Равенство $G = FH$ следует из доказанного выше включения $F_1 \leqslant F$. Единственность F очевидна.

§ 5. О применениях теоремы Фробениуса

Приложения групп Фробениуса весьма разнообразны и не представляется возможным (да и целесообразным) приводить здесь их обзор. Укажем лишь несколько примеров.

В [20] приведено доказательство теоремы Веддерберна о коммутативности конечного тела K с использованием свойств дополнительного множителя Фробениуса и геометрии конечной дезарговой плоскости. Как видно из примера, приведенного на стр. 636, мультипликативная группа K^* тела K служит дополнительным множителем Фробениуса. Поэтому в K^* нет нециклических подгрупп порядка pq. Легко устанавливается, что в K^* не может содержаться группа кватернионов. Следовательно, все силовские подгруппы в K^* — циклические, т. е. K^* — группа одного из типов 1), 2) (см. § 3). K^* не может быть группой типа 2), так как для всякого $x \in K^*$, не принадлежащему центру K^*, существует $y \in K^*$, такой что $x^y = x^k \neq x$ [27].

В [25] изучен класс так называемых независимых ABA-групп. Конечная группа G, представимая в виде произведения ABA своих собственных подгрупп A и B, называется независимой ABA-группой, если каждый элемент из G однозначно представим в виде a_1ba_2, где $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$. Легко проверить, что тогда подгруппа A удовлетворяет условиям теоремы Фробениуса. Более того, как показано в [25], независимая ABA-группа G является группой Фробениуса $G = F \leftthreetimes A$, дополнительный множитель A которой — максимальная подгруппа в G. Следовательно, инвариантный множитель F — элементарная абелева группа. Кроме того,

$$|F| = |A|(|B| - 1) + 1.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность участникам алгебраического семинара Института математики и механики АН СССР за ценные советы при обсуждении данного обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бусаркин, О группах Фробениуса, Матем. зап. Уральск. ун-та, т. 3, № 1, 1961.
2. В. М. Бусаркин, А. И. Старостин, О локально конечных расщепляемых группах, УМН, т. 17, № 6, 1962.
3. В. М. Бусаркин, А. И. Старостин, О расщепляемых локально конечных группах, Матем. сб., т. 62, № 3, 1963.
4. Ю. М. Горчаков, О бесконечных группах Фробениуса, Алгебра и логика, т. 4, № 1, 1965.
5. П. Г. Конторович, Группы с базисом расщепления. II, Матем. сб., т. 19, 1946.
6. П. Г. Конторович, А. С. Пекелис, А. И. Старостин, Структурные вопросы теории групп, Матем. зап. Уральск. ун-та, т. 3, № 1, 1961.
7. В. А. Крекнин, О разрешимости алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного периода, ДАН СССР, т. 150, № 3, 1963.
8. В. А. Крекнин, А. И. Кострикин, Об алгебрах Ли с регулярным автоморфизмом, ДАН СССР, т. 149, № 2, 1963.
9. Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр, «Наука», М., 1969.
10. В. Д. Мазуров, Пример группы Фробениуса с неразрешимым дополнительным множителем, Матем. зап. Уральск. ун-та, т. 4, № 1, 1963.
11. М. Холл, Теория групп, ИЛ, М., 1962.
12. В. С. Чарин, Замечание об условии минимальности для подгрупп, ДАН СССР, т. 66, № 4, 1949.
13. С. А. Чунихин, О существовании подгрупп у конечной группы, Труды семинара по теории групп (к 25-летию научной деятельности О. Ю. Шмидта), ГОНТИ, М.—Л., 1938.
14. О. Ю. Шмидт, О группах Фробениуса, ДАН СССР, т. 26, 1940.
15. О. Ю. Шмидт, Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, Избр. труды, Изд-во АН СССР, М., 1959.
16. В. П. Шунков, О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы, Алгебра и логика, т. 6, № 3, 1967.
17. G. Bachman, Geometry in Certain Finite Groups, Math. Z., 70, № 5, 1959, 466—479.
18. W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 1911.
19. C. H. Sah, On a generalization of finite nilpotent groups, Math. Z., 68, 1957, 189—204.
20. S. Ebey, K. Sitaram, Frobenius groups and Wedderburn's theorem, Amer. Math. Monthly, 76, № 5, 1969, 526—528.

21. W. Feit, On the structure of Frobenius groups, Canad. J. Math., 9, 1957, 587—596.
22. W. Feit, On groups which contain Frobenius groups as subgroups, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 1, 1959, 22—28.
23. W. Feit, Characters of finite groups, New York, Benjamin, 1967.
24. G. Frobenius, Über auflösbare Gruppen. IV, Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. zu Berlin, 1901, 1216—1230.
25. D. Gorenstein, A class of Frobenius groups, Canad. J. Math., 11, № 1, 1959, 39—47.
26. O. Grün, Beiträge zur Gruppentheorie. II. Über ein Satz von Frobenius, J. reine und angew. Math., 186, 1948, 165—169.
27. I. N. Herstein, Topics in Algebra, Blaisdell, Waltham, Mass., 1964.
28. D. Hertzig, The structure of Frobenius algebraic groups, Amer. J. Math., 83, 1961, 421—431.
29. G. Higman, Groups and rings having automorphisms without non-trivial fixed elements, J. London Math. Soc., 30, 1957, 321—334.
30. G. Higman, Suzuki 2-groups, Illinois J. Math., 7, 1963, 79—96.
31. C. Jordan, Récherches sur les substitutions, Liouville Journal, ser. 2, Vol. XVII, 1872, 351—368.
32. O. Kegel, Lokal endliche Gruppen mit nicht-trivialer Partition, Arch. Math., 13, 1962, 10—28.
33. O. Kegel, Lectures on locally finite groups, Oxford, 1969.
34. B. H. Neumann, Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed, Arch. Math., 7, 1956, 1—5.
35. R. H. Shaw, Remark on a theorem of Frobenius, Proc. Amer. Math. Soc., 3, № 6, 1952, 970—972.
36. M. Suzuki, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes, Amer. J. Math., 77, 1955, 657—691.
37. H. Schwerdtfeger, Über eine spezielle klasse Frobeniusscher Gruppen, Arch. Math., 13, 1962, 283—289.
38. J. G. Thompson, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 45, 1959, 578—581.
39. G. Vincent, Les groupes lineares finis sans points fixes, Comment. math. helv., 20, 1947, 117—171.
40. L. Weisner, The subgroup of order n of transitive group of degree n—1 and class n—1, Duke Math. J., 5, 1939, 84—87.
41. H. Wielandt, Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen, Math. Nachr., 18, 1958, 274—280.
42. H. Wielandt, B. Huppert, Normalteiler mehrfach transitiver Permutationsgruppen, Arch. Math., 9, № 1—2, 1958, 18—26.
43. H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper, Hamb. Abh., 11, 1936, 187—220.

Поступила 4.V 1971 г.

Институт математики и механики АН СССР