УДК 519.41/47

О группах типа CS

Е. И. Шатыло

1. В известной работе О. Ю. Шмидта «Группы, все подгруппы которых специальные» [1] изучаются ненильпотентные группы, все истинные подгруппы которых нильпотентные (специальные). Известно, что для конечных групп нильпотентность и разложимость в прямое произведение силовских p-подгрупп — равносильные свойства. Таким образом, О. Ю. Шмидт изучал такие конечные группы, у которых все истинные подгруппы разлагаются в прямое произведение своих силовских подгрупп, но которые сами в произведения такого рода не разлагаются. Здесь, естественно, возникает мысль изучать конечные группы, при условии, что все их истинные подгруппы разлагаются в некоторые произведения силовских подгрупп, но которые сами в такое произведение уже не разложимы. Отправляясь от групп разложимых в то или иное произведение своих силовских подгрупп, можно получить ряд обобщений групп Шмидта. Здесь можно воспользоваться, в частности, введенными С. Н. Черниковым разложениями в равномерные произведения, т. е. в произведения, в которых попарно перестановочны циклические подгруппы любых двух различных множителей. Конечные группы, разложимые в равномерные произведения своих силовских p-подгрупп, очевидно, включают в себя класс нильпотентных групп. Данная статья посвящена вопросу (предложенному автору С. Н. Черниковым) о строении конечных групп, неразложимых в равномерное произведение своих силовских подгрупп, при условии разложимости всех их истинных подгрупп в произведения такого рода. Краткости ради такие группы назовем группами типа CS или, короче, CS-группами. В силу сформулированного здесь определения в класс CS-групп входят все группы Шмидта (или, как их еще называют, группы типа S), за исключением тех из них, которые разлагаются в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп. Это группы порядка pq^n с образующими элементами A и B и определяющими соотношениями

$$A^p = B^{q^n} = 1,\ B^{-1}AB = A^S,\ \text{где}\ s^q \equiv 1 \pmod{p}.$$

Изучение групп типа CS доведено автором до выделения образующих элементов и указания определяющих соотношений (см. теоремы 3—5). Оказалось, что CS-группы имеют порядок, делящийся точно на два различных простых числа, и являются полупрямыми произведениями своих силовских p-подгрупп, причем одна из них (неинвариантная) — циклическая. Оказалось также, что инвариантная силовская p-подгруппа CS-группы, не являющейся группой типа S, является нециклической элементарной абелевой.

При изучении CS-групп автор существенно использовал аппарат косых произведений Редеи, с помощью которого последний получил полное описание групп Миллера — Морено (минимальных неабелевых групп) и групп Шмидта [2, 3].

2. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая группа (в мультипликативной записи), $\mathfrak{R}$ — некоторое кольцо с единицей и φ — фиксированный мультипликативный гомоморфизм $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{R}$:

$$(\alpha \cdot \beta)\,\varphi = \alpha\varphi \cdot \beta\varphi \quad (\alpha \in \mathfrak{F}, \alpha\varphi \in \mathfrak{R}). \tag{1}$$

Очевидно, один мультипликативный гомоморфизм всегда существует — это тривиальный гомоморфизм, отображающий любой элемент α из $\mathfrak{F}$ в единицу кольца $\mathfrak{R}$. При таких обозначениях имеет место следующее, установленное Редеи [2], предложение:

(*) Множество пар (α, a) $(\alpha \in \mathfrak{F},\ a \in \mathfrak{R})$ образует относительно умножения

$$(\alpha, a)\,(\beta, b) = (\alpha\beta,\ a + \alpha\varphi b) \tag{2}$$

группу. Эта группа называется косым произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{R}$ первого рода. Ниже такого рода произведение рассматривается для определенным образом связанных между собой циклической группы $\mathfrak{F}$ и конечного кольца $\mathfrak{R}$. Пусть p и q — два различных простых числа, m — какое-нибудь натуральное число, u_m — наименьшее натуральное число, для которого $p^{u_m} \equiv 1 \pmod{q^m}$, $\mathfrak{F}(q^m)$ — циклическая группа порядка q^m $K(p^u)$ — конечное поле из p^u элементов и $K^*(p^u)$ — его мультипликативная группа (циклическая порядка $p^u - 1$).

Лемма 1. *Пусть α — сбразующий элемент циклической группы $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(q^m)$ и r — элемент порядка q^m мультипликативной группы $K^*(p^{u_m})$ конечного поля $K(p^{u_m})$, связанного указанным образом с группой $\mathfrak{F}$. Тогда существует нетривиальное косое произведение первого рода, которое является множеством пар вида (α^i, a) $(i = 0, 1, \ldots, q^m - 1)$, где $a \in K(p^{u_m})$, перемножаемых по правилу*

$$(\alpha^i, a)\,(\alpha^k, b) = (\alpha^{i+k},\ a + r^i b), \tag{3}$$

отвечающее мультипликативному гомоморфизму $\varphi : \alpha\varphi = r$.

Доказательство. Так как $K^*(p^{u_m})$ — циклическая группа порядка $p^{u_m} - 1$ и $q^m \mid p^{u_m} - 1$, то в $K^*(p^{u_m})$ существует элемент r порядка q^m. Но тогда отображение $\varphi : \alpha\varphi = r$ будет мультипликативным гомоморфизмом, отмеченным в лемме, и существование группы $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{F}\mathfrak{R}$ вытекает из предложения (*).

Лемма 2. *Пусть $\psi(x)$ — неприводимый полином из разложения многочлена $x^{q^m} - 1/x^{q^{m-1}} - 1$ на неприводимые множители над полем $K(p)$. Пусть M — множество всевозможных пар $(i, f(x))$, где i — целое число и $f(x)$ — многочлен с коэффициентами из поля $K(p)$, из которых любые две удовлетворяют условию*

$$\text{либо } i \not\equiv k \pmod{q^m}, \text{ либо } f(x) \not\equiv g(x) \pmod{\psi(x)}. \tag{4}$$

Тогда относительно умножения, определяемого правилом

$$(i, f(x))\,(k, g(x)) = (i + k,\ f(x) + x^i g(x)), \tag{5}$$

множество M образует группу $\mathfrak{G}_2$, и эта группа изоморфна группе $\mathfrak{G}_1$ из леммы 1.

Доказательство. Ввиду того, что u_m — наименьшее натуральное число такое, что $p^{u_m} \equiv 1 \pmod{q^m}$, любой неприводимый множитель многочлена $\dfrac{x^{q^m} - 1}{x^{q^{m-1}} - 1}$ над полем $K(p)$ имеет степень u_m. Если через $K(p)[x]$ обозначить кольцо полиномов от x над полем $K(p)$, то поле $K(p^{u_m})$ изоморфно фактор-кольцу $K(p)[x]/(\psi(x))$, где $(\psi(x))$ — главный идеал, порожденный многочленом $\psi(x)$. Покажем, что образ элемента x в этом фактор-кольце имеет порядок q^m. Действительно, так как $\psi(x) \,\Big|\, \dfrac{x^{q^m} - 1}{x^{q^{m-1}} - 1}$, то

$x^{q^m}-1\equiv o\ (\mathrm{mod}\ \psi(x))$. Так как мультипликативная группа поля циклична и $x^{q^m}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \psi(x))$, то x в этом поле вычетов имеет порядок степень q. Но x не может иметь порядок q^α, $\alpha < m$, так как тогда многочлен $\psi(x)$ был бы кратным множителем полинома $x^{q^m}-1$, что невозможно, так как производная многочлена $(x^{q^m}-1)'=q^m x^{q^m-1}$ не делится на $\psi(x)$. Поэтому, сопоставляя элементы $r\in K(p^{u_m})$ и $x\in K(p)[x]/(\psi(x))$ и учитывая (3) и (5), получаем изоморфизм групп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$.

Лемма 3. *Пусть неприводимый многочлен $\psi(x)$ (см. лемму 2) имеет вид*

$$\psi(x)=x^{u_m}-c_{u_m-1}x^{u_m-1}-\ldots-c_0. \tag{6}$$

Тогда группа $\mathfrak{G}_2$ леммы 2 (а следовательно и группа $\mathfrak{G}_1$) изоморфны абстрактной группе $\mathfrak{G}_3$ с образующими элементами $P_0, P_1, \ldots, P_{u_m-1}$, Q и определяющими соотношениями

$$P_0^p=P_1^p=\ldots=P_{u_m-1}^p=Q^{q^m}=1, \tag{7}$$

$$P_iP_j=P_jP_i, \tag{8}$$

$$Q^{-1}P_iQ=P_{i+1}\quad (i=0,1,\ldots,u_m-2), \tag{9}$$

$$Q^{-1}P_{u_m-1}Q=P_0^{c_0}P_1^{c_1}\ldots P_{u_m-1}^{c_{u_m-1}}. \tag{10}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что элементы $(-1,0)$ и $(0,x^r)$ являются образующими элементами группы $\mathfrak{G}_2$. Согласно (5) имеем

$$(-1,0)^{q^m}=(0,x^r)^p=(0,0) \tag{11}$$

и

$$(0,x^r)(0,x^s)=(0,x^s)(0,x^r). \tag{12}$$

Далее $(1,0)(-1,0)=(0,0)$ и потому $(-1,0)^{-1}=(1,0)$, но тогда при $r=0,1,\ldots,u_m-2$ получаем

$$(-1,0)^{-1}(0,x^r)(-1,0)=(0,x^{r+1}) \tag{13}$$

и далее

$$(-1,0)^{-1}(0,x^{u_m-1})(-1,0)=(0,x^{u_m}-\psi(x))=(0,c_{u_m-1}x^{u_m-1}+$$

$$+c_{u_m-2}x^{u_m-2}+\ldots+c_0)=(0,1)^{c_0}\ldots(0,x_{u_m-1})^{c_{u_m-1}}. \tag{14}$$

Теперь, вводя обозначения $(0,0)=1$, $Q=(-1,0)$, $P_0=(0,x^0),\ldots$ $\ldots, P_{u_m-1}=(0,x^{u_m-1})$, из соотношений (11)—(14) получаем соответствующие соотношения (7)—(10).

Примечание 1. В связи с леммой 3 выделим частный случай косого произведения. Пусть $n\geqslant 1$ — наибольший показатель степени числа q, делящий разность $p-1$. Нетрудно убедиться, что тогда $u_{n+1}=q$. Неприводимый многочлен $\psi(x)$, делящий $\dfrac{x^{q^{n+1}}-1}{x^{q^n}-1}$, будет иметь вид x^q-h, где h — первообразный корень q^n-степени из единицы в $K(p)$. Тогда косое произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(q^{n+1})$, $\mathfrak{R}=K(p^q)$, будет (см. лемму 3) изоморфно абстрактной группе $\mathfrak{G}$ с образующими элементами $P_0, P_1,\ldots,P_{q-1}$, Q и определяющими соотношениями

$$P_0^p=P_1^p=\ldots=P_{q-1}^p=Q^{q^{n+1}}=1, \tag{7'}$$

$$P_iP_j=P_jP_i. \tag{8'}$$

$$Q^{-1}P_iQ = P_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, q-2), \tag{9'}$$

$$Q^{-1}P_{q-1}Q = P_0^h, \tag{10'}$$

где h — первообразный корень q^n-степени из единицы в $K(p)$.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{\mathfrak{G}}$ — конечная группа, розложимая в полупрямое произведение $\mathfrak{P}\lambda\{Q\}$, где $\mathfrak{P}$ — элементарная абелева группа, $\{Q\}$ — циклическая группа с $Q^{q^m} = 1$, причем ни одна отличная от единицы степень Q^{q^k} не содержится в центре группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Тогда группа $\widetilde{\mathfrak{G}}$ содержит подгруппу $\mathfrak{G}$, изоморфную косому произведению $\mathfrak{F}\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(q^m)$ — циклическая порядка q^m и $\mathfrak{R} = K(p^{u_m})$.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма 4. *Если $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{P}\lambda\{Q\}$ разложение группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$ из теоремы 1, то для любого $i = 0, 1, \ldots, m-1$ в множителе $\mathfrak{P}$ существует такая инвариантная в $\widetilde{\mathfrak{G}}$ подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_{q^i}$, что центр $\mathfrak{Z}\{\overline{\mathfrak{P}}_{q^i}, Q_{q^i}\}$ группы $\{\overline{\mathfrak{P}}_{q^i}, Q_{q^i}\}$ равен единице.*

Доказательство. Доказательство приводим индукцией по индексу i. Пусть $i = 0$. Возьмем в $\mathfrak{P}$ все элементы, перестановочные с Q. Они образуют подгруппу $\mathfrak{P}_{q^0}$, являющуюся нормальным делителем в $\widetilde{\mathfrak{G}}$, поэтому $Q^{-1}\mathfrak{P}_{q^0}Q = \mathfrak{P}_{q^0}$. Тогда в силу теоремы 16,3.1 из [4] в $\mathfrak{P}$ существует инвариантное относительно Q дополнение $\overline{\mathfrak{P}}_{q^0}$ к $\mathfrak{P}_{q^0}$. Очевидно, ни один отличный от единицы элемент из $\overline{\mathfrak{P}}_{q^0}$ не может быть перестановочным с элементом Q, поэтому центр подгруппы $\{\overline{\mathfrak{P}}_{q_0}, Q\}$ равен единице. Таким образом, для $i = 0$ утверждение леммы доказано. Пусть утверждение леммы справедливо для всех $i < k$, поэтому для $i = k - 1$ существует такая подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{k-1}}$, что $Q^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_{q^{k-1}}Q = \overline{\mathfrak{P}}_{q^{k-1}}$ и $\mathfrak{Z}\{\overline{\mathfrak{P}}_{q^{k-1}}, Q^{q^{k-1}}\} = 1$, тогда все элементы из $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{k-1}}$, перестановочные с Q^{q^k}, образуют подгруппу $\mathfrak{P}_{q^k}$, инвариантную в $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Действительно, если элемент $P \in \mathfrak{P}_{q^k}$, то $Q^{-q^k}PQ^{q^k} = P \in \mathfrak{P}_{q^k}$ и поэтому $Q^{-1}PQ \in \mathfrak{P}_{q^k}$, так как

$$Q^{-q^k}(Q^{-1}PQ)\,Q^{q^k} = Q^{-1}(Q^{-q^k}PQ^{q^k})\,Q = Q^{-1}PQ.$$

Применяя снова теорему 16.3.1 из [4], получим, что в $\mathfrak{P}$ существует такая инвариантная в $\widetilde{\mathfrak{G}}$ подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_{q^k}$, что $\mathfrak{Z}\{\overline{\mathfrak{P}}_{q^k}, Q^{q^k}\} = 1$.

Таким образом, для любого $k \leqslant m - 1$ в множителе $\mathfrak{P}$ существует подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_{q^k}$ с отмеченными в лемме свойствами. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 4 в $\mathfrak{P}$ существует такая инвариантная в $\widetilde{\mathfrak{G}}$ подгруппа $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{m-1}}$, которая не содержит отличных от единицы элементов, перестановочных с $Q^{q^{m-1}}$. Пусть P — произвольный, отличный от единицы элемент из $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{m-1}}$ и i — любое натуральное число.

Положим

$$P_i = Q^{-i}PQ^i \quad \text{и} \quad P_0 = P. \tag{15}$$

Тогда

$$P_{i+j} = Q^{-i}P_jQ^i, \tag{16}$$

P_i^p очевидно равен единице.

Очевидно,

$$P_i = P_j, \quad \text{если} \quad i \equiv j \pmod{q^m}. \tag{17}$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(P_i)$ подгруппу, порожденную всеми элементами P_i, для которых $P_i \in \overline{\mathfrak{P}}_{q^{m-1}}$, очевидно, $\mathfrak{P}(P_i)$ — элементарная абелева группа, ее порядок $p^{u(P_i)}$. Выберем элемент P так, чтобы показатель $u(P)$ был наименьшим. Пусть P_0 — именно такой элемент и $u(P_0) = u$. Так как $Q^{q^m} = 1$, то $1 \leqslant u \leqslant q^m$. Элементы $P_0, P_1, \ldots, P_{u-1}$ линейно независимы (в смысле, определяемом мультипликативной записью групповой операции), так как иначе существует такое натуральное число $u' < u$, что

$$P_{u'} \in \mathfrak{P}'(P_0), \quad \text{где} \quad \mathfrak{P}'(P_0) = \{P_0, P_1, \ldots, P_{u'-1}\}.$$

В силу (15) $P_{u'+1} = Q^{-1}P_{u'}Q$ и $P_{u'+1} \in \{P_1, P_2, \ldots, P_{u'}\}$, следовательно, $P_{u'+1} \in \mathfrak{P}'(P_0)$. Повторяя эти рассуждения, получим $P_{u'}, P_{u'+1}, \ldots, \in \mathfrak{P}'(P_0)$ и поэтому $\mathfrak{P}'(P_0) = \mathfrak{P}_0(P_0)$, а это (так как $u' < u$) противоречит минимальности u. Следовательно, элементы $P_0, P_1, \ldots, P_{u-1}$ линейно независимы. Но тогда

$$P_u P_{u-1}^{c_{u-1}} \ldots P_0^{c_0} = 1. \tag{18}$$

Построим теперь отображение кольца полиномов над полем $K(p)$ в группу $\mathfrak{P}_0(P_0)$. Если $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in K(p)[x]$, то положим

$$(f(x)) = P_n^{a_n} P_{n-1}^{a_{n-1}} \ldots P_0^{a_0}. \tag{19}$$

Это соответствие, очевидно, однозначное. Ясно, что каждый элемент из $\mathfrak{P}_0(P_0)$ встретится (даже несколько раз) среди образов многочленов $f(x)$. В частности, если $\psi(x) = x^u + c_{u-1}x^{u-1} + \ldots + c_0$, где $c_0, c_1, \ldots, c_{u-1}$ взяты из (18), то по (18) имеем

$$(\psi(x)) = 1. \tag{20}$$

Далее в силу (17) имеем $P_{q^m}P_0^{-1} = 1$, и поэтому

$$(x^{q^m} - 1) = 1. \tag{21}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$(f(x) + g(x)) = (f(x))(g(x)), \tag{22}$$

$$(-f(x)) = (f(x))^{-1}, \tag{23}$$

$$(cf(x)) = (f(x))^c, \tag{24}$$

c — любое целое число. Отметим также, что $(o) = 1$. Наконец из (15) для любого натурального i получаем

$$Q^{-i}(f(x))Q^i = (x^i f(x)), \tag{25}$$

а из (23)

$$(f(x))^{-1}Q^{-i}(f(x))Q^i = ((x^i - 1)f(x)). \tag{26}$$

Из (20) и (25) следует $(x^i\psi(x)) = 1$, а из (24) и (22) —

$$(f(x)\psi(x)) = 1. \tag{27}$$

С другой стороны, из линейной независимости элементов $P_0P_1, \ldots P_{u-1}$ следует, что различные полиномы $f(x)$ степени, не превосходящей $u-1$, дают и различные образы. Пользуясь отмеченными здесь соотношениями, нетрудно убедиться, что $(f(x)) = (g(x))$ тогда и только тогда, когда

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{\psi(x)}. \tag{28}$$

В силу (21) и (22) имеем $(x^{q^m} - 1) = (0) = 1$, отсюда по (28) имеем

$$\psi(x) \mid x^{q^m} - 1. \tag{29}$$

Теперь покажем, что многочлен $\psi(x)$ неприводим. В самом деле, в противном случае имеет место нетривиальное разложение $\psi(x) = \psi'(x)f(x)$.

Пусть $(f(x)) = P_0' \in \mathfrak{P}(P_0')$. Так как P_0', очевидно, отличный от единицы элемент из $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{m-1}}$, то он неперестановочен с $Q^{q^{m-1}}$ и потому

$$((x^{q^{m-1}} - 1) f(x)) \neq 1. \tag{30}$$

Положим $\psi'(x) = x^{u'} + c'_{u'-1}x^{u'-1} + \ldots + c'_0$ и $P'_i = Q^{-i}P'_0Q^i$ (как уже отмечалось $Q^{-i}P'_0Q^i = (x^i f(x))$. С помощью (24) и (22) получаем

$$P'_{u'}P'^{c'_{u'-1}}_{u'-1} \ldots P_0'^{c'_0} = (x^{u'} f(x))(x^{u'-1} f(x))^{c'_{u'-1}} \ldots (f(x))^{c'_0} = (\psi'(x) f(x)) = 1. \tag{31}$$

Равенство (31) выражает линейную зависимость элементов $P_{u'}$, $P_{u'-1}, \ldots, P'_0$, лежащих в $\overline{\mathfrak{P}}_{q^{m-1}}$. Так как $P'_i = Q^{-i}P'_0Q^i$, то порядок группы $\mathfrak{P}(P'_0)$ (ее определение см. выше) не превосходит $p^{u'}$, что противоречит минимальности порядка группы $\mathfrak{P}_0(P_0)$ (так как $u' < u$). Это и доказывает неприводимость $\psi(x)$. Так как $(x^{q^{m-1}} - 1) = P_{q^{m-1}}P_0^{-1} \neq 1$, то многочлен $\psi(x)$ не делит $x^{q^{m-1}} - 1$. Отсюда и из (21) получаем

$$\psi(x) \left| \frac{x^{q^m} - 1}{x^{q^{m-1}} - 1} \right.. \tag{32}$$

Как уже упоминалось (см. доказательство леммы 2), все неприводимые множители правой части (32) имеют степени u_m, где u_m — наименьшее натуральное число, для которого $p^{u_m} \equiv 1 \pmod{q^m}$. Пользуясь установленными соотношениями, нетрудно показать, что группа $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{P}_0(P_0), Q\}$ совпадает с группой $\mathfrak{G}_3$ из леммы 3. Действительно, согласно формулировке теоремы для элементов $P_0, P_1, \ldots, P_{u-1}$ и Q, введенных в начале доказательства, имеют место соотношения:

$$P_0^p = P_1^p = \ldots = P_{u-1}^p = Q^{q^m} = 1, \tag{33}$$

$$P_iP_j = P_jP_i. \tag{34}$$

В силу (15) имеем

$$Q^{-1}P_iQ = P_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, u-2), \tag{35}$$

а в силу (18) имеем

$$Q^{-1}P_{u-1}Q = P_{u-1}^{-c_{u-1}}P_{u-2}^{-c_{u-2}} \ldots P_0^{-c_0}. \tag{36}$$

Сравнивая эти соотношения с соответствующими им соотношениями (7′) — (10′) без труда убеждаемся в том, что группа $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{P}(P_0), Q\}$ изоморфна группе $\mathfrak{G}_3$. Так как группа $\mathfrak{G}_3$ леммы 3 изоморфна косому произведению $\mathfrak{F}\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(q^m)$, $\mathfrak{R} = K(p^{u_m})$, то вместе с этим теорема 1 доказана.

3. Переходим теперь к рассмотрению CS-групп.

Теорема 2. *Всякая CS-группа $\mathfrak{G}$ имеет порядок вида p^kq^l, где p и q — различные простые числа и является полупрямым произведением своих силовских p-подгрупп, неинвариантная из которых циклична.*

Доказательство. Так как конечная группа, разложимая в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп, сверхразрешима [5], то из результатов Хупперта [6] следует, что всякая CS-группа разрешима. Пусть $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_k$ — полная силовская база CS-группы $\mathfrak{G}$. Ввиду того, что CS-группа $\mathfrak{G}$ сама не разлагается в равномерное произведение силовских p-подгрупп, то в некоторых двух $\mathfrak{P}_i$ и $\mathfrak{P}_j$ можно выделить соответственно две неперестановочные между собой циклические подгруппы. Тогда $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j\}$ и потому порядок группы $\mathfrak{G}$ совпадает с $p_i^{\alpha_i}p_j^{\alpha_j}$. Пусть $p_i = p$, $p_j = q$, $p > q$, $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{Q}$, $\alpha_i = k$, $\alpha_j = l$. По теореме 4.3.1 из [7] группа $\mathfrak{G}$ либо содержит группу Шмидта с инвариантной силовской q-подгруппой и тогда, очевидно, она сама является группой Шмидта и потому ее силовская p-подгруппа циклическая, либо силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{G}$ инвариантная в $\mathfrak{G}$ и тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{Q}$. В первом случае утверждение теоремы уже доказано. Во втором случае в $\mathfrak{G}$ существует циклическая подгруппа, неперестановочная хотя бы с одной циклической подгруппой из $\mathfrak{P}$ и пусть $\{Q\}$ — минимальная подгруппа с этим свойством. Так как группа $\mathfrak{G}$ не имеет собственных подгрупп, которые, не разлагаются в равномерное произведение силовских подгрупп, то $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \leftthreetimes \{Q\}$, что и требовалось доказать.

Примечание 2. Мы доказали, в частности, что циклическая подгруппа $\{Q^{q^i}\}\ i \geqslant 1$ перестановочна с произвольной циклической подгруппой из $\mathfrak{P}$.

Лемма 5. *Фактор-группа CS-группы $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \{Q\}$ по подгруппе Фраттини $\Phi(\mathfrak{P})$ инвариантной силовской p-подгруппы сама является CS-группой.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно показать, что группа $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ не может разлагаться в равномерное произведение своих силовских подгрупп. Итак, пусть группа $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ разлагается в равномерное произведение такого рода. Тогда она удовлетворяет следующим условиям:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{P}} \leftthreetimes \{\overline{Q}\} \text{ и } \overline{Q}^{-1} P\, \overline{Q} = \overline{P}^h, \tag{37}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}$ — силовская p-подгруппа группы $\overline{\mathfrak{G}}, \overline{P} \in \overline{\mathfrak{P}}$ и h — натуральное число, одинаково для всех $\overline{P}$ [5]. Из соотношения (37) вытекает, что

$$Q^{-1}PQ = F \cdot P^h, \quad \text{где } P \in \mathfrak{P}. \tag{37'}$$

Если $F = P^{p^k}$ при любом $P \in \mathfrak{P}$ (k — натуральное число, зависящее от P), то всякая циклическая подгруппа из $\mathfrak{P}$ перестановочна с $\{Q\}$ и $\mathfrak{G}$ разлагается в равномерное произведение своих силовских подгрупп $\mathfrak{P}$ и $\{Q\}$, что невозможно. Если же для некоторого элемента $P_0 \in \mathfrak{P}$ не существует натурального числа k, при котором $F = P_0^{p^k}$ в (37'), то пользуясь соотношением $Q^{-1}P_0Q = FP_0^h$ получаем $\{\{\Phi(\mathfrak{P}), P_0\}\, Q\} = \mathfrak{G}$ и далее $\{\Phi(\mathfrak{P}), P_0\} = \mathfrak{P}$, но тогда $\{P_0\} = \mathfrak{P}$, что также невозможно, так как инвариантная силовская p-подгруппа CS-группы $\mathfrak{G}$ не может быть циклической, потому что иначе бы $\mathfrak{G}$ разлагалась в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп. Лемма доказана.

Примечание 3. Инвариантная силовская p-подгруппа CS-группы $\mathfrak{G}$ не может быть циклической (см. выше), и, следовательно, в фактор-группе $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ силовская p-подгруппа является нециклической элементарной абелевой. Так как фактор-группа CS-группы $\mathfrak{G}$ по пересечению подгруппы $\{Q\}$ с центром $\mathfrak{G}$, очевидно, является CS-группой (если это пересечение совпадает с единицей, то CS-группу будем называть $\overline{CS}$-группой), то ввиду леммы 5 изучение произвольных CS-групп сводится к изучению CS-группы с нециклической элементарной абелевой инвариантной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой, не содержащей отличных от единицы элементов центра группы $\mathfrak{G}$.

Теорема 3. *Группа $\mathfrak{G}$ с порядком, делящимся на простые числа p и q, и с элементарной абелевой силовской p-подгруппой, тогда и только тогда является $\overline{CS}$-группой, когда она имеет один из следующих трех типов:*

1) *$\mathfrak{G}$ — группа Миллера — Морено порядка $p^{u_1}q$, где $u_1 > 1$ — наименьшее натуральное число, для которого $p^{u_1} \equiv 1 \pmod q$;*

2) *$\mathfrak{G}$ — группа порядка p^2q^m с разложением $\mathfrak{G} = \{\{P_1\} \times \{P_2\}\}\lambda\{Q\}$, где*

$$P_1^p = P_2^p = \ldots = q^{q^m} = 1, \quad Q^{-1}P_1Q = P_1^{h_1}, \quad Q^{-1}P_2Q = P_2^{h_2}, \tag{38}$$

h_1, $h_2 \in K(p)$, $h_1 \neq h_2$, $h_1^q = h_2^q$, причем хотя бы одно из чисел h_1 и h_2 является первообразным корнем q^m-степени из единицы в простом поле $K(p)$: число m здесь не превосходит наибольшего показателя n степени число q, делящей разность $p-1$;

3) $\mathfrak{G}$ — группа порядка $p^q q^{n+1}$, где n — наибольший показатель степени числа q, делящей $p-1$, причем ее образующие элементы P_0, $P_1, \ldots, P_{q-1}$, Q удовлетворяют соотношениям:

$$P_0^p = P_1^p = \ldots = P_{q-1}^p = Q^{q^{n+1}} = 1,$$

$$Q^{-1} P_i Q = P_{i+1} \quad (i = 0,\ 1, \ldots, q-2), \tag{39}$$

$$Q^{-1} P_{q-1} Q = P_0^h,$$

где h — первообразный корень q^n-степени из единицы в $K(p)$. Назовем группы типов 1—3 соответственно $\overline{CS}_1$, $\overline{CS}_2$ и $\overline{CS}_3$-группами. Существование $\overline{CS}$-группы с наперед заданными простыми делителями ее порядка устанавливается ниже в теореме 5.

Доказательство. Достаточность. Из определяющих соотношений для $\overline{CS}_2$-группы видно, что она действительно является $\overline{CS}$-группой. Определяющие соотношения для $\overline{CS}_1$-группы описаны в лемме 3 и из них непосредственно вытекает, что $\overline{CS}_1$-группа неразложима в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп. Для $\overline{CS}_3$-группы этот факт без труда усматривается из соотношений (39), определяющих $\overline{CS}_3$-группу. Однако каждая истинная подгруппа $\mathfrak{H}$ $\overline{CS}_1$ или $\overline{CS}_3$-группы разложима в произведение такого рода. Действительно, если непримарная подгруппа $\mathfrak{H}$ содержит неинвариантную циклическую силовскую q-подгруппу группы $\mathfrak{G}$ (типа $\overline{CS}_1$ или $\overline{CS}_3$), то она совпадает с $\mathfrak{G}$, так как удовлетворяет всем условиям теоремы 1, что противоречит предположению о том, что $\mathfrak{H}$ — истинная подгруппа в $\mathfrak{G}$. Следовательно, циклическая силовская q-подгруппа $\{Q_1\}$ из $\mathfrak{H}$ строго содержится в циклической силовской q-подгруппе $\{Q\}$ группы $\mathfrak{G}$, и тогда для $\overline{CS}_3$-группы $Q_1 = Q^{q^k}$ $(k \geqslant 1)$, а для $\overline{CS}_1$-группы $Q_1 = 1$. Далее из соотношений (39) получаем

$$Q_1^{-1} P_1 Q_1 = Q^{-q^k} P Q^{q^k} = P^{h^{q^{k-1}}}$$

для всех P из силовской p-подгруппы группы $\mathfrak{G}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{H}$ разложима в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп.

Необходимость устанавливается следующим образом. Очевидно, что $\mathfrak{G}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, следовательно, содержит подгруппы $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{F}_i \mathfrak{R}_i$ — косые произведения первого рода, где $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i(q^{m-i})$ и $\mathfrak{R}_i = K(p^{u_{m-i}})$. Пусть $u_{m-0} \geqslant 1$. Тогда, очевидно, $u_{m-i} = 1$, если $i \geqslant 1$, так как $\{Q^{q^i}\}$ перестановочна с произвольной циклической подгруппой из $\mathfrak{R}$ (см. примечание к теореме 2). Подгруппа $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{F}\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(q^m)$, $\mathfrak{R} = K(p^{u_m})$, неразложима, как уже сказано выше, в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп и потому $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$. Если в этом случае $m = 1$, то отсюда следует (см. также [3]), что группа $\mathfrak{G}$ имеет порядок $p^{u_1} q$ и является группой Миллера — Морено, а значит является $\overline{CS}_1$-группой. Если же $m > 1$, то $m = n + 1$, где n — наивысший показатель степени числа q, делящей $p-1$, тогда $u_1 = 1$, $u_2 = 1, \ldots, u_{n+1} = q$ (см. примечание 1) и группа $\mathfrak{H}_0$ совпадающая с группой $\mathfrak{G}$, имеет порядок $p^q q^{n+1}$ и является группой, описанной в примечании 1, т. е. является $\overline{CS}_3$-группой.

Пусть $u_m = 1$, тогда все $\mathfrak{H}_i$, $i \geqslant 0$, разложимы в равномерные произведения своих силовских p-подгрупп и, в частности,

$$\mathfrak{H}_0 = \{P_1\} \lambda \{Q\},$$

причем $P_1^p = Q^{q^m} = 1$ и $Q^{-1}P_1Q = P_1^{h_1}$, где h_1 удовлетворяет условию $h_1^{q^m} \equiv 1 \pmod p$, но $h_1^{q^{m-1}} \not\equiv 1 \pmod p$. Так как циклическая группа $\{P_1\}$ — инвариантная в $\mathfrak{G}$, то по теореме 16.3.1 [4] в $\mathfrak{P}$ существует инвариантное в $\mathfrak{G}$ дополнение $\overline{\mathfrak{P}}_1$ к $\{P_1\}$. Так как $\{\mathfrak{P}_1, Q\}$ — истинная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то она разлагается в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп и потому $Q^{-1}PQ = P^h$ для любого $P \in \overline{\mathfrak{P}}_1$ (см. [5]). Ввиду того, что $\mathfrak{G}$—$\overline{CS}$-группа, $h_1 \neq h$, тогда $\{\{P_1, P_2\}, Q\} = \mathfrak{G}$. Ввиду того, что подгруппа $\{Q^q\}$ перестановочна с произвольной циклической подгруппой группы $\mathfrak{P}$ (см. примечание 2) имеем

$$Q^{-q}P_1Q^q = P_1^{h_1 q}$$

и

$$Q^{-q}P_2Q^q = P_2^{h_2^q}.$$

Так как $\{\mathfrak{P}, Q^q\}$ — собственная подгруппа в $\mathfrak{G}$, то $h_1^q = h_2^q$ (см. [5]). Вместе с этим доказано, что в рассмотренном случае $\overline{CS}$-группа является $\overline{CS_2}$-группой.

Следствие 1. *Группа $\mathfrak{G}$ типа S с порядком, делящимся на простые числа p и q, и с элементарной абелевой инвариантной силовской p-подгруппой тогда и только тогда является $\overline{CS}$-группой, когда она $\overline{CS_1}$-группа.*

Это непосредственно вытекает из того факта, что группа типа S с элементарной абелевой силовской p-подгруппой является группой Миллера — Морено.

Теорема 4. *Если фактор-группа $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ $\overline{CS}$-группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе Фраттини $\Phi(\mathfrak{P})$ инвариантной силовской p-подгруппы из $\mathfrak{G}$ является $\overline{CS_2}$- или $\overline{CS_3}$-группой, то $\Phi(\mathfrak{P}) = 1$ и потому сама группа $\mathfrak{G}$ будет $\overline{CS_2}$- или $\overline{CS_3}$-группой. Если же фактор-группа $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ является $\overline{CS_1}$-группой, то $\mathfrak{G}$ является группой типа S.*

Доказательство. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ $\overline{CS}$-группы $\mathfrak{G}$ является $\overline{CS_1}$-группой, то $\mathfrak{G}$ является группой типа S. Действительно, группа $\mathfrak{G}$ (ненильпотентная порядка $p^\alpha q^\beta$) содержит хотя бы одну группу $\mathfrak{H}$ типа S с инвариантной силовской p-подгуппой $\mathfrak{P}_1$. Тогда из теоремы 3 и следствия 1 вытекает неразложимость в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп фактор-группы $\mathfrak{H}/\Phi(\mathfrak{P}_1)$, а следовательно, и группы $\mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, так как $\mathfrak{G}$ — CS-группа и потому $\mathfrak{G}$ — группа типа S. В рассматриваемом случае подгруппа $\Phi(\mathfrak{P})$ может быть отличной от единицы (см. [3, 8]). Если же $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ является $\overline{CS_2}$ или $\overline{CS_3}$-группой, то, как будет показано ниже, $\Phi(\mathfrak{P}) = 1$.

Пусть фактор-группа $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ является $\overline{CS_2}$-группой и пусть $\Phi(\mathfrak{P}) \neq 1$. Согласно теореме 3 группа $\overline{\mathfrak{G}}$ имеет разложение $\overline{\mathfrak{G}} = \{\{\overline{P}_1\} \times \{\overline{P}_2\}\} \lambda \{\overline{Q}\}$, причем

$$\overline{P}_1^p = \overline{P}_2^p = \overline{Q}^{q^m} = \overline{1}, \quad \overline{Q}^{-1}\overline{P}_1\overline{Q} = \overline{P}_1^{h_1}, \qquad \overline{Q}^{-1}\overline{P}_2\overline{Q} = \overline{P}_2^{h_2}. \tag{38'}$$

Пусть P_1 и P_2 — два произвольных прообраза элементов $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ в группе $\mathfrak{P}$ и элементы P_1 и P_2 имеют порядок соответственно p^{k_1} и p^{k_2}. Очевидно, что

$$Q^{-1}P_1Q = P_1^{h_1}F_1 \quad (F_1 \in \Phi(\mathfrak{P})); \quad Q^{-1}P_2Q = P_2^{h_2}F_2 \quad (F_2 \in \Phi(\mathfrak{P})).$$

Каждое F_i $(i=1, 2)$ равно $P_i^{pl_i}$ $(l_i>0)$, так как иначе $\{P_i, Q\}=\mathfrak{G}$ и, значит, $\{\overline{P}_i, \overline{Q}\}=\overline{\mathfrak{G}}$. Но тогда в силу соотношений (38′) группа $\overline{\mathfrak{G}}$ разлагается в равномерное произведение подгрупп $\{\overline{P}_i\}$ и $\{\overline{Q}\}$, что противоречит исходному предположению о группе $\overline{\mathfrak{G}}$.

Пусть P_i' — элемент p-го порядка из циклической подгруппы $\{P_i\}$. Тогда $P_i'=P_i^{p^{t_i}}$ $(i=1, 2)$ и $P_i^{p^{t_i+1}}=1$. Пользуясь тем, что $F_i=P_i^{pl_i}$ и $l_i\geqslant 1$.

$$Q^{-1}P_1'Q=(Q^{-1}P_1Q)^{pt_1}=(P_1^{pl_1}P_1^{h_1})^{pt_1}=(P^{pt_1})^{pl_1}(P^{pt_1})^{h_1}=(P_1')^{h_1}$$

и, соответственно,

$$Q^{-1}P_2'Q=(P_2')^{h_2}.$$

Известно, например [9], что пересечение нетривиального нормального делителя нильпотентной группы с ее центром отлично от единицы. Поэтому в группе $\mathfrak{P}$ имеем $\Phi(\mathfrak{P})\cap\mathfrak{Z}(\mathfrak{P})\neq 1$. Пусть P — произвольный элемент порядка p из этого пересечения. Так как $\{\Phi(\mathfrak{P}), Q\}$ — собственная подгруппа $\overline{CS}$-группы $\mathfrak{G}$, то $Q^{-1}PQ=P^h$. Число h (в поле $K(p)$), очевидно, отличается хотя бы от одного h_i $(i=1, 2)$. Пусть $h\neq h_1$. Тогда имеем

$$Q^{-1}(P_1', P)Q=P_1'^{h_1}P^h.$$

Так как $h\neq h_1$ и P и P' — элементы порядка p, то отсюда вытекает, что ни для одного натурального α не может иметь место соотношение

$$P^h(P_1')^{h_1}=(PP_1')^{\alpha}.$$

Это означает, что циклическая подгруппа p-го порядка $\{P_1'P\}$ неперестановочна с циклической подгруппой $\{Q\}$. Отсюда вытекает, что либо $\{\Phi(\mathfrak{P}), P_1\}=\mathfrak{P}$ (тогда $\mathfrak{P}=\{P_1\}$), либо $\Phi(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}$. Так как оба эти случая невозможны, то $\Phi(\mathfrak{P})=1$, что и требовалось доказать. Таким образом, в рассматриваемом случае $\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}$ и потому в этом случае $\overline{CS_2}$-группа $\mathfrak{G}$ имеет тип 2.

3. Фактор-группа $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})$ группы $\mathfrak{G}$ имеет тип 3 и потому для нее имеют место соотношения (39). Покажем, что $\Phi(\mathfrak{P})=1$. Так как $Q^q\not\subset\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ и $\{\mathfrak{P}, Q^q\}\subset\mathfrak{G}$ (см. примечание 2), то силовская подгруппа $\mathfrak{P}$ абелева. В самом деле, так как $\mathfrak{G}$ — CS-группа, что ее подгруппа $\{\mathfrak{P}, Q^q\}$ разлагается в равномерное произведение силовских подгрупп $\mathfrak{P}$ и $\{Q^q\}$ и так как $Q^q\not\subset\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, то в $\mathfrak{P}$ существует элемент, неперестановочный с элементом Q^q. В работе [5] показано, что при этом условии группа $\mathfrak{P}$ должна быть абелевой. Но тогда для доказательства соотношения $\Phi(\mathfrak{P})=1$ достаточно убедиться в том, что все элементы подгруппы $\mathfrak{P}$ имеют порядок p. Так как $\overline{CS}$-группа $\mathfrak{P}$ не является равномерным произведением своих силовских p-подгрупп, то в подгруппе $\mathfrak{P}$ найдется такой элемент P, что $\mathfrak{G}=\{P, Q\}$. Если $P^p=1$, то, очевидно, $\mathfrak{P}$ — элементарная абелева группа. Пусть, однако, $P^{p^k}=1$ при $k>1$. Из соотношений (39) вытекает, что $\overline{Q}^{-q}\overline{P}\overline{Q}^q=\overline{P}^h$, где $\overline{P}$ — образ элемента P в $\overline{\mathfrak{G}}$ и h — первообразный корень q^n-степени из единицы в $K(p)$, причем корень q^{n+1} степени из единицы $K(p)$ уже не извлекается. Переходя к прообразам элементов $\overline{P}$ и $\overline{Q}$, имеем

$$Q^{-q}PQ^q=FP^h.$$

Как и в уже рассмотренном случае, здесь $F = P^{p^l}$ и потому

$$Q^{-q} P^{p^{k-1}} Q^q = (P^{p^{k-1}})^h. \tag{40}$$

Так как $P^{p^{k-1}} \in \Phi(\mathfrak{P})$ и $\{\Phi(\mathfrak{P}), Q\} \subset \mathfrak{G}$, то $Q^{-1} P^{p^{k-1}} Q = (P^{p^{k-1}})^{h_1}$, $h_1 \neq 1$ и далее

$$Q^{-q} P^{p^{k-1}} Q^q = (P^{p^{k-1}})^{h_1^q}, \tag{41}$$

а отсюда, сравнивая (40) и (41), получим, что в поле $K(p)$ $h = h_1^q$ и далее $h_1^{q^{n+1}} = 1$. Однако, это противоречит тому, что корень q^{n+1} степени из единицы в поле $K(p)$ не извлекается. Значит, $k = 1$ и потому $\Phi(\mathfrak{P}) = 1$. Теорема доказана. Из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *$\overline{CS}$-группы, не являющиеся группами типа S, исчерпываются $\overline{CS}_2$- и $\overline{CS}_3$-группами.*

Теорема 5. *Для произвольной пары различных простых чисел p и q существуют $\overline{CS}$-группы с циклической неинвариантной силовской q-подгруппой (p-подгруппой). Все $\overline{CS}$-группы порядка $p^\alpha q^\beta$ исчерпываются либо группами типа S ($\overline{CS}_1$-группами), либо группами типов $\overline{CS}_2$ и $\overline{CS}_3$.*

Доказательство. Для произвольных различных простых чисел p и q и любого натурального m существует натуральное число u'_m, что $p^{u'_m} \equiv 1 \pmod{q^m}$. Пусть u_m — наименьшее натуральное число такого рода. В силу лемм 1 и 2 существует косое произведение первого рода $\mathfrak{G}_m = \mathfrak{F}(q^m) K(p^{u_m})$. Как абстрактная группа группа $\mathfrak{G}_m$ разлагается в полупрямое произведение инвариантной силовской p-подгруппы (элементарной абелевой) и циклической силовской q-подгруппы (см. лемму 3). Если k — наименьшее натуральное число, для которого $u_k > 1$, то группа $\mathfrak{G}_k$, как было показано при доказательстве теоремы 3, является $\overline{CS}$-группой. Если $k = 1$, то все $\overline{CS}$-группы с инвариантной силовской p-подгруппой исчерпываются группами типа S (см. доказательство теоремы 4). Если же $k = n + 1$ (и, значит, $u_1 = 1, \ldots, u_n = 1$ и $u_{n+1} = q > 1$), то, как показано при доказательстве теоремы 3, каждая группа $\mathfrak{G}_{n+1}$ (а число их равно числу первообразных корней q^n-степени из единицы в поле $K(p)$) является $\overline{CS}_3$-группой.

Если $k > 1$, то для данных p и q наряду с $\overline{CS}_3$-группами существуют и $\overline{CS}_2$-группы. Действительно, записывая аддитивно групповую операцию, будем рассматривать элементарную абелеву группу $\mathfrak{P}$ порядка p^2 как векторное пространство размерности два над полем $K(p)$. Группа автоморфизмов этого пространства — группа всех невырожденных матриц второй степени над полем $K(p)$, причем каждая из них имеет конечный порядок. Пусть P_1 и P_2 — базис этого пространства. Любая матрица вида $T = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$, где h_1 и h_2 определены в теореме 3, имеет порядок q^m. Переходя к мультипликативной записи групповой операции в $\mathfrak{P}$ и вводя обозначение Q для ее автоморфизма, отвечающего матрице T, получим $\overline{CS}_2$-группу $\mathfrak{P} \leftthreetimes \{Q\}$ с порядком, делящимся на взятые простые p и q. Теорема доказана.

Примечание 4. Каждая CS-группа является полупрямым произведением $\mathfrak{G} = \mathfrak{P} \leftthreetimes \mathfrak{Q}$ своих силовских p и q-подгрупп $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{G}$, вторая (неинвариантная) из которых — циклическая. Пусть $\mathfrak{Q} = \{Q\}$ и $Q^{q^m} = 1$. Возьмем натуральное число k и $m_1 = k + m$ и заменим в определяющих соотношениях группы $\mathfrak{G}$ элемент Q элементом Q_1 ($Q_1^{q^{m_1}} = 1$) и введем дополнительные соотношения, требующие перестановочности элемента Q^{q^m} с каждым элементом из $\mathfrak{P}$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ перейдет в группу $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{P} \lambda \{Q_1\}$, удовлетворяя условию $\mathfrak{G}_1/\{Q_1^{q^m}\} \cong \cong \mathfrak{G}$. Отправляясь от первоначальной $\overline{CS}$-группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^l q^m$, получим на этом пути бесконечную серию CS-групп с порядками вида $p^l q^{k+m}$ $(k \geqslant 0)$. Если группа $\mathfrak{G}$ была группой типа $\overline{CS_i}$ $(i=1, 2, 3)$, то произвольную группу из соответствующей ей серии будем называть CS_i-группой. Совокупностью групп такого рода исчерпываются все CS-группы с порядками, делящимися на взятые простые числа p и q с инвариантной силовской p-подгруппой.

Следствие 3. *CS-группы, не являющиеся группами типа S, исчерпываются CS_2 и CS_3-группами.*

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные, Матем. сб., т. 31, 1924.
2. L. Redei, Das «schife» Product in der Gruppentheorie..., Comment. Math. Helv., **20**, 1947, 225—264.
3. L. Redei, Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen, Public. Math., **4**, 1956, 303—324.
4. М. Холл, Теория групп, «Наука», М., 1964.
5. В. П. Шунков, О группах, разложимых в равномерное произведение своих силовских p-подгрупп. ДАН СССР, т. 154, № 3, 1964.
6. B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Z., **60**, 1954, 409—434.
7. С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, «Наука и техника», Минск, 1964.
8. Ю. А. Гольфанд, О группах, все истинные подгруппы которых специальные, ДАН СССР, т. 60, № 8, 1948.
9. С. Н. Черников, К теории бесконечных р-групп, ДАН СССР, т. 50, № 1, 1945.

Поступила 4.V 1971 г.

Трест Укргеофизразведка