УДК 519.41/47

К теории минимаксных групп

Д. И. Зайцев

Как известно, при изучении бесконечных групп большую роль играют так называемые условия конечности. Одними из первых условий конечности в теории групп были условие минимальности для подгрупп и условие максимальности для подгрупп. Условие минимальности состоит в требовании конечности убывающих цепей подгрупп группы. Условие максимальности в известном смысле противоположно условию минимальности, так как оно требует конечности возрастающих цепей подгрупп.

Первым плодотворным шагом в изучении групп с условиями минимальности и максимальности явилась работа О. Ю. Шмидта «О бесконечных группах с конечной цепью», написанная им в 1929 г. В этой работе введены в рассмотрение группы, удовлетворяющие условию обрыва убывающих нормальных цепей подгрупп ($G_1 > \ldots > G_j > \ldots$; $G_j \lhd G_{j-1}$) и условию обрыва возрастающих нормальных цепей подгрупп ($G_1 < \ldots < G_j < \ldots$; $G_j \lhd G_{j+1}$). Для произвольных групп, удовлетворяющих отмеченным двум условиям (что равносильно существованию в группе конечного композиционного ряда), О. Ю. Шмидт доказал теорему о прямых разложениях, обобщающую соответствующую теорему Ремака о конечных группах. Указанная работа О. Ю. Шмидта явилась толчком к изучению групп с условиями минимальности и максимальности для подгрупп. Систематическое изучение групп с условием минимальности было начато С. Н. Черниковым более тридцати лет назад; к этому же времени относятся работы К. А. Хирша по группам с условием максимальности.

До недавнего времени группы с условием минимальности и группы с условием максимальности изучались раздельно, связи между ними не рассматривались, однако при их исследовании был выявлен ряд общих особенностей, установлены некоторые параллельные свойства таких групп. По-видимому, это обстоятельство побудило выделять и изучать классы групп, объединяющие тем или иным образом класс групп с условием минимальности и класс групп с условием максимальности. Среди таких классов объединений важное место занимает класс минимаксных групп: группа G называется минимаксной, если она обладает конечным рядом подгрупп $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k = G$, любой фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности [1]. Заметим, что термин «минимаксная группа» был введен Р. Бэром [2] и обозначал тогда абелеву минимаксную группу. В отмеченной работе [2] минимаксные группы не были, однако, предметом самостоятельного исследования; всестороннее изучение их началось позднее. Им посвящены работы Р. Бэра [3], Д. Робинзона [1, 4, 5], автора [6—9] и др.

Как видно из определения минимаксной группы, оно получено на наш взгляд посредством несколько формального соединения условия минимальности и условия максимальности. Между тем, было бы желательным найти такой класс групп, объединяющий класс групп с условием минимальности и класс групп с условием максимальности, определение которого формулировалось бы в терминах цепей подгрупп группы. Целесообразность такого определения для класса объединения очевидна, так как оба объединяемых класса групп определяются в терминах цепей подгрупп. Этим целям служат введенные автором два условия конечности: слабое условие минимальности для подгрупп и слабое условие максимальности для подгрупп. Оказалось, что для локально разрешимых групп отмеченные два условия равносильны и они определяют класс разрешимых минимаксных групп [9]. В работе [6] строение локально разрешимой группы G, удовлетворяющей слабому условию минимальности (максимальности), описано следующим образом: G содержит подгруппу конечного индекса, являющуюся расширением прямого произведения конечного множества квазициклических групп при помощи группы, обладающей конечным рациональным рядом, факторы которого имеют конечный тип. При этом под рациональной группой конечного типа понимается всякая подгруппа аддитивной группы рациональных чисел, не содержащая рациональных дробей, которые могут быть разделены в этой подгруппе на бесконечно много простых чисел. В частности, G — разрешимая группа. Таким образом, оказывается, что условие минимальности и условие максимальности можно так ослабить, что получаемые при этом «условие минимальности» и «условие максимальности» будут равносильными для достаточно широкого класса групп. Причина этого явления выясняется в теореме 1 данной работы.

Цель данной работы — ввести два новых условия конечности, при помощи которых получаются различные объединения класса групп с условием минимальности и класса групп с условием максимальности, и установить их связь с минимаксными группами. Первое из этих условий обобщает условие минимальности и условие максимальности для подгрупп, а второе обобщает слабое условие минимальности и слабое условие максимальности для подгрупп. Интересующие нас условия конечности определяются следующим образом.

Назовем бесконечной двойной цепью подгрупп группы G всякую бесконечную в обе стороны последовательность ее подгрупп

$$\ldots < G_{-k} < \ldots < G_{-1} < G_0 < G_1 < \ldots < G_k < \ldots$$

Если в этой цепи все индексы $[G_{k+1}: G_k]$ бесконечны, то ее будем называть двойной ∞-цепью подгрупп. Убывающей ∞-цепью подгрупп назовем цепь подгрупп $G_1 > \ldots > G_k > \ldots$ с бесконечными индексами $[G_k : G_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Аналогичный смысл вкладывается в понятие возрастающей ∞-цепи подгрупп. Скажем, что группа удовлетворяет условию min — max, если она не содержит бесконечных двойных цепей подгрупп; группа удовлетворяет условию min — max — ∞, если она не содержит двойных ∞-цепей подгрупп. Подобным образом определяются условия min — ∞ и max — ∞; последние два условия, очевидно, не что иное как слабое условие минимальности и слабое условие максимальности для подгрупп [9].

По определению, группа почти обладает некоторым свойством, если она содержит подгруппу конечного индекса, обладающую этим свойством. Ниже постоянно используется понятие группы почти без кручения и почти разрешимой группы. В этой работе рассматриваются локально почти разрешимые группы, т. е. группы, у которых всякая конечнопорожденная подгруппа почти разрешима. Среди локально почти разрешимых групп, понятно, содержатся все локально конечные и все локально разрешимые группы.

Основные результаты работы следующие.

Т е о р е м а 1. *В классе локально почти разрешимых групп условия* min — ∞, max — ∞, min — max — ∞ *равносильны и они определяют в нем подкласс почти разрешимых минимаксных групп.*

Следовательно, локально почти разрешимая группа тогда и только тогда удовлетворяет условию min — max — ∞ (min — ∞, max — ∞), когда она содержит подгруппу конечного индекса, являющуюся расширением прямого произведения конечного множества квазициклических групп при помощи группы, обладающей конечным рациональным рядом, факторы которого имеют конечный тип.

Теорема 2. *В классе локально почти разрешимых групп условие* $\min - \max$ *определяет подкласс, являющийся теоретико-множественным объединением класса экстремальных групп и класса почти полициклических групп.*

Ввиду теоремы 1 теперь понятно, почему для локально разрешимых групп условия $\min - \infty$ и $\max - \infty$ равносильны [9].

При доказательстве теорем 1, 2 используем результаты В. П. Шункова [10, 11], дающие положительное решение проблемы С. Н. Черникова о группах с условием минимальности при дополнительном ограничении локальной конечности.

Несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. *Почти разрешимая группа G с условием* $\min - \max - \infty$ *удовлетворяет условию* $\min - \infty$, и *поэтому G содержит ряд нормальных подгрупп $Q \leqslant H \leqslant G$, где подгруппа Q или единичная, или разложима в прямое произведение конечного множества квазициклических групп, фактор-группа H/Q или единичная, или обладает конечным рациональным рядом, фактор-группа G/H — конечная.*

Справедливость этого утверждения вытекает из результатов работы [6] и следующих замечаний: для абелевых групп условия $\min - \max - \infty$ и $\min - \infty$, очевидно, равносильны, и класс групп с условием $\min - \infty$ замкнут относительно расширений.

Будем обозначать символом (g_J) семейство элементов группы G, имеющее J в качестве множества индексов. Если $M \subseteq J$, то обозначим через $\langle g_M \rangle$ подгруппу группы G, порожденную подсемейством (g_M) семейства (g_J).

А. И. Мальцеву [12] принадлежит следующее понятие: подгруппа H группы G финитно отделима от элемента g группы G, не принадлежащего H, если существует гомоморфизм φ группы G в конечную группу, при котором $\varphi(g) \notin \varphi(H)$. В связи с этим определением естественно подгруппу H группы G называть финитно отделимой от G, если H финитно отделима хотя бы от одного элемента группы G.

Лемма 2. *Пусть группа G обладает локальной системой, состоящей из подгрупп, финитно отделимых от G. Тогда в G существует такое семейство элементов (g_N), что N— множество всех натуральных чисел и для $N_1 \subset N_2 \subseteq N$ имеет место соотношение*

$$|N_2 \setminus N_1| \leqslant [\langle g_{N_2} \rangle : \langle g_{N_1} \rangle].$$

Доказательство. Пусть (G_α) — локальная система группы G, состоящая из подгрупп, финитно отделимых от G. Такая система существует по предположению леммы.

Докажем существование в группе G трех неограниченных последовательностей: последовательности элементов группы G

$$(g_N) = (g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots); \tag{1}$$

возрастающей последовательности подгрупп локальной системы (G_α)

$$G_1 < G_2 < \ldots < G_n < G_{n+1} < \ldots; \tag{2}$$

убывающей последовательности нормальных подгрупп конечного индекса группы G

$$A_1 > A_2 > \ldots > A_n > A_{n+1} > \ldots, \tag{3}$$

причем выписанные последовательности должны быть связаны соотношениями:

$$G = A_{n+1} G_{n+1}, \quad g_n \in (A_n \setminus A_{n+1} G_n) \cap (G_{n+1} \setminus G_n) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Положим $A_1 = G$ и возьмем произвольную подгруппу G_1 из локальной системы (G_α). Тогда в G существует такая нормальная подгруппа A_2 конечного индекса, что $G \neq A_2 G_1$. Выбираем элемент g_1 следующим образом: $g_1 \in A_1 \setminus A_2 G_1$. Далее, так как (G_α) — локальная система и фактор-группа G/A_2 конечна, то в (G_α) можно найти такую подгруппу G_2, что $\langle g_1, G_1 \rangle \leqslant G_2$ и $G = A_2 G_2$. Таким образом, найдены элемент g_1, подгруппы G_1, G_2, нормальные подгруппы A_1, A_2. Из способа построения вытекает справедливость соотношений (4) при $n = 1$.

Предположим, что уже построены отрезок последовательности (1) до номера n и отрезки последовательностей (2), (3) до номера $n+1$, причем члены указанных отрезков связаны соотношением (4). Покажем, что эти отрезки можно так продолжить, что соотношение (4) при этом не нарушится. Действительно, так как подгруппа G_{n+1} финитно отделима от G, то в G существует такая нормальная подгруппа B конечного индекса, что $G \neq B \times \times G_{n+1}$. Положим $A_{n+2} = A_{n+1} \cap B$. Тогда $A_{n+1} \setminus A_{n+2} G_{n+1} \neq \varnothing$, так как в противном случае приходим к противоречащему соотношению

$$G = A_{n+1} G_{n+1} \leqslant (A_{n+2} G_{n+1}) G_{n+1} = A_{n+2} G_{n+1} \leqslant B \ G_{n+1} \neq G.$$

Следовательно, можно выбрать элемент g_{n+1}:

$$g_{n+1} \in A_{n+1} \setminus A_{n+2} \cdot G_{n+1}.$$

Далее, принимая во внимание, что (G_α) — локальная система и фактор-группа G/A_{n+2} конечна, можно в системе (G_α) найти такую подгруппу G_{n+2}, что

$$\langle g_{n+1}, G_{n+1} \rangle \leqslant G_{n+2}, \quad G = A_{n+2} G_{n+2}.$$

Таким образом, доказано существование в группе G неограниченных последовательностей (1)—(3), связанных соотношениями (4).

Докажем, что последовательность элементов (g_N) искомая. Пусть $N_1 \subset \subset N_2 \subseteq N$. Для доказательства неравенства

$$|N_2 \setminus N_1| \leqslant [\langle g_{N_2} \rangle : \langle g_{N_1} \rangle]$$

достаточно установить, что при $n, m \in N_2 \setminus N_1$, $n \neq m$ смежные классы $g_n \langle g_{N_1} \rangle, g_m \langle g_{N_1} \rangle$ различны. Предположим, что $g_n \langle g_{N_1} \rangle = g_m \langle g_{N_1} \rangle$ и $n < m$. Тогда

$$g_n^{-1} g_m \in \langle g_{N_1} \rangle. \tag{5}$$

Пусть $g_{j_1}, \ldots, g_{j_l}$ — все элементы последовательности (1) номера которых содержатся в N_1 и не превосходят n. Так как $n \not\in N_1$, то $j_1 < n, \ldots, j_l < n$. Элементы последовательности (1) с номерами большими n содержатся в A_{n+1} согласно соотношению (4). Поэтому $A_{n+1} \langle g_{N_1} \rangle = A_{n+1} \langle g_{j_1}, \ldots, g_{l_e} \rangle$. Из соотношений (2), (4) вытекает, что $\langle g_{j_1}, \ldots, g_{j_l} \rangle \leqslant G_n$, значит $A_{n+1} \langle g_{N_1} \rangle = A_{n+1} \langle g_{j_1}, \ldots, g_{j_l} \rangle \leqslant A_{n+1} G_n$. Отсюда при помощи (5) получаем

$$g_n^{-1} g_m \in A_{n+1} G_n, \tag{6}$$

но так как по предположению $n < m$, то в силу (4) $g_m \in A_m \leqslant A_{n+1}$ и поэтому соотношение (6) превращается в соотношение $g_n^{-1} \in A_{n+1} G_n$, несовместимое с (4). Лемма доказана.

Следствие 1. *Финитно аппроксимируемая локально почти разрешимая группа G, удовлетворяющая условию* min— max— ∞, *почти раз-*

решима, почти без кручения и обладает такой конечнопорожденной подгруппой, которая финитно неотделима от G.

Доказательство. Так как G удовлетворяет условию min — max — ∞, то при помощи леммы 2 получаем, что G обладает конечнопорожденной подгруппой H, которая финитно неотделима от G. В силу того, что G финитно аппроксимируема, а H финитно неотделима от G, группа G изоморфно вкладывается в полное прямое произведение некоторого множества фактор-групп группы H. Поэтому, так как H почти разрешима, то группа G обладает разрешимой нормальной подгруппой A, фактор-группа по которой имеет ограниченные в совокупности порядки элементов. Из условия min — max — ∞ при помощи теоремы М. И. Каргаполова [13] вытекает, что G/A — конечная группа. Таким образом, группа G почти разрешима. Из леммы 1 и финитной аппроксимируемости G получаем, что группа G почти без кручения.

Лемма 3. *Пусть группа S — расширение конечной подгруппы F порядка n при помощи группы, обладающей рациональным рядом длины r. Тогда S содержит характеристическую подгруппу T, обладающую рациональным рядом длины r и индекс $[S:T]$ конечен и не превосходит некоторого числа, зависящего только от n и r.*

Существование в группе S подгруппы конечного индекса, обладающей рациональным рядом, доказано Б. И. Плоткиным [14, теорема 3.9), но ввиду необходимости оценить индекс этой подгруппы мы приведем здесь другое доказательство сформулированного утверждения.

Доказательство. Сначала докажем такое утверждение: если некоторая группа A обладает конечной нормальной подгруппой B, порядка не выше k, и фактор-группа A/B абелева без кручения ранга не выше e, то в A существует такая характеристическая абелева подгруппа V без кручения, что порядок фактор-группы A/V конечен и не превосходит некоторого числа, зависящего только от n и r.

Обозначим через C централизатор подгруппы B в группе A. Тогда $|A/C| \leqslant k!$ Пусть $D/C\bigcap B = (C/C\bigcap B)^{k!}$ — подгруппа, порожденная $k!$-ми степенями элементов абелевой группы $C/C\bigcap B$. Так как коммутант C' содержится в центральной подгруппе $C\bigcap B$ группы C и так как $|C\bigcap B| \leqslant k!$, то подгруппа D абелева. Положим $V = D^{k!}$. Подгруппа V абелева без кручения и характеристична в A, а ее индекс в A, ввиду построения удовлетворяет соотношению:

$$|A/V| = |A/C||C/D|D/D^{k!}| \leqslant k!\,(k!)^{e}\,k!\,(k!)^{e} = (k!)^{2+2l}.$$

Следовательно, подгруппа V — искомая.

Пусть теперь группа S удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Так как фактор-группа S/F обладает конечным рациональным рядом, то в S существует ряд характеристических подгрупп $F = S_0 < S_1 < \dots < S_s = S (s < r)$, факторы которого являются абелевыми группами без кручения рангов не выше r. В соответствии с доказанным выше утверждением находим в S_1 характеристическую абелеву подгруппу V_1 без кручения, индекс $[S_1 : V_1]$ которой не превосходит некоторого числа, зависящего только от $n = |F|$ и r. Далее, в S_2/V_1 находим характеристическую абелеву подгруппу V_2/V_1 без кручения, индекс $[S_2/V_1 : V_2/V_1] = [S_2 : V_2]$ которой также не превосходит некоторого числа, зависящего только от n и r. Повторив эти рассуждения s раз, получаем подгруппу V_s. Положим $T = V_s$. Индекс $[S : T]$, по построению, не превосходит некоторого числа, зависящего только от n и r. Подгруппа T—характеристическая в S и обладает рациональным рядом, так как в ряду подгрупп $1 < V_1 < V_2 < \dots < V_s = T$ факторы абелевы и без кручения. Наконец, длина рационального ряда подгруппы T равна r, так как T изоморфна подгруппе конечного индекса фактор-группы S/F, и длина рационального ряда последней равна r по условию леммы.

Следствие 2. *Локально почти разрешимая группа G, удовлетворяющая условию* $\min - \max - \infty$, *является расширением квазиполной группы при помощи финитно аппроксимируемой группы.*

Доказательство. Пусть Q — пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Покажем, что Q — квазиполная группа. Предположим противное: Q имеет нормальную подгруппу конечного индекса $m > 1$. Если W есть пересечение всех нормальных подгрупп группы Q, имеющих в Q индекс m, то Q/W конечна, так как по следствию 1 Q/W почти без кручения. Фактор-группа G/Q по тому же следствию почти разрешима и ввиду леммы 1 содержит подгруппу конечного индекса S/Q, обладающую конечным рациональным рядом. По лемме 3, в S/W существует подгруппа T/W конечного индекса, обладающая рациональным рядом. Подгруппа T имеет в G конечный индекс, значит, по определению подгруппы Q: $Q \leqslant T$. Отсюда $Q/W < T/W$, что невозможно, так как T/W группа без кручения. Полученное противоречие показывает, что Q — квазиполная группа.

Лемма 4. *Локально разрешимая квазиполная бесконечная группа Q, удовлетворяющая условию* $\min - \max - \infty$, *есть прямое произведение конечного множества квазициклических групп.*

Доказательство. Пусть (Q_α) — некоторая инвариантная система группы Q с абелевыми факторами. Объединение Q_β всех разрешимых членов системы $(Q\ )$ само разрешимо. Действительно, Q_β, очевидно, радикальная группа и если бы она была неразрешимой, то не удовлетворяла бы условию $\min - \infty$ для абелевых подгрупп [7, теорема 5]. В этом случае в Q_β существовала бы абелева подгруппа, не удовлетворяющая условию $\min - \max - \infty$, вопреки условию доказываемой леммы. Таким образом, Q_β — разрешимая группа.

Пусть Q_δ — пересечение всех членов системы (Q_α), определяющих разрешимые фактор-группы группы Q. Тогда фактор-группа Q/Q_δ абелева. Действительно, если $Q_\varrho \in (Q_\alpha)$ и Q/Q_ϱ разрешима, то Q/Q_ϱ удовлетворяет условию $\min - \infty$ и, значит, должна быть прямым произведением конечного множества квазициклических групп, так как Q/Q_ϱ — квазиполная группа [6].

Покажем, что $Q_\beta \geqslant Q_\delta$. Предположим противное: $Q_\beta < Q_\delta$. Тогда из членов системы (Q_α), расположенных между Q_β и Q_δ, нельзя составить возрастающей ∞-цепи. Действительно, если бы такая ∞-цепь существовала: $Q_\beta \leqslant$

$$\leqslant Q_{\alpha_1} < Q_{\alpha_2} < \ldots < Q_{\alpha_j} < \ldots \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{\alpha_j} \leqslant Q_\delta,$$ то ввиду условия $\min - \max - \infty$

любой член Q_{α_j} этой цепи удовлетворяет условию $\min - \infty$ и поэтому Q_{α_j} — разрешимая группа [6]. Это противоречит выбору подгруппы Q_β. В силу отмеченного свойства, в системе (Q_α) должен существовать либо член $Q_{\delta-1}$, либо бесконечный ряд $Q_\beta \leqslant Q_\gamma < Q_{\gamma+1} < \ldots < Q_{\gamma+j} < \ldots Q_{\gamma+\omega} = Q_\delta$, в котором факторы $Q_{\gamma+j}/Q_{\gamma+j-1}$ конечны. Первый случай невозможен ввиду выбора подгруппы Q_δ. Во втором случае из квазиполноты группы Q/Q_γ вытекает, что все подгруппы $Q_{\gamma+j}/Q_\gamma$ абелевы. Тем самым фактор-группа Q_δ/Q_γ также абелева, что противоречит выбору подгруппы Q_δ. Таким образом, имеет место соотношение $Q_\beta \geqslant Q_\delta$. Оно означает, что Q — разрешимая группа. Теперь утверждение леммы непосредственно вытекает из теоремы о строении квазиполных групп, удовлетворяющих условию $\min - \infty$ [6].

Лемма 5. *Пусть группа G содержит подгруппу H конечного индекса, обладающую рациональным рядом длины r. Тогда G содержит ряд характеристических подгрупп $F < S \leqslant G$, где F — конечная подгруппа, фактор-группа S/F обладает рациональным рядом длины r, фактор-группа G/S конечна и ее порядок не превосходит некоторого числа, зависящего только от r.*

Доказательство. Сначала докажем такое утверждение: если некоторая группа A обладает характеристической подгруппой B конечного индекса, являющейся абелевой группой без кручения ранга не выше k, то в A существует ряд характеристических подгрупп $U < V \leqslant A$, где U—конечная подгруппа, фактор-группа V/U абелева без кручения ранга не выше k, порядок фактор-группы A/V не превосходит некоторого числа, зависящего только от k.

Действительно, как известно, порядок конечной группы автоморфизмов абелевой группы без кручения конечного ранга не превосходит некоторого числа, зависящего только от этого ранга. Поэтому индекс централизатора V подгруппы B в группе A не превосходит некоторого числа, зависящего только от k. Подгруппа V является конечным расширением своей центральной подгруппы B, следовательно, коммутант группы V конечен, и, значит, все элементы конечного порядка группы V составляют подгруппу U, которая, очевидно, конечна. Фактор-группа V/U абелева без кручения ранга не выше k. Характеристичность подгрупп U и V вытекает из способа их построения.

Перейдем к доказательству утверждения леммы. Заметим сначала, что подгруппу H можно считать характеристической в G, так как в противном случае в следующих ниже рассуждениях H можно заменить на пересечение C всех подгрупп, имеющих в G индекс, равный $[G:H]$. Подгруппа C характеристична в G и индекс ее в G конечен, потому что G/C — разрешимая группа конечного ранга с ограниченными в совокупности порядками элементов. Так как H обладает рациональным рядом длины r, то в H существует ряд характеристических подгрупп $H_0 = 1 < H_1 < H_2 < \ldots < H_s = H$ $(s \leqslant r)$, факторы которого абелевы группы без кручения рангов не выше r. Доказательство ведется индукцией по длине этого ряда. При $s = 1$ нужное нам утверждение доказано выше. Если для $s - 1$ лемма справедлива, то в группе G/H_1 существует ряд характеристических подгрупп $F_1/H_1 < S_1/H_1 < G/H_1$, в котором F_1/H_1 — конечная группа, группа S_1/F_1 обладает рациональным рядом, группа G/S_1 конечна и ее порядок не превосходит некоторого числа, зависящего только от r. Далее, как доказано выше, в F_1 существует ряд характеристических подгрупп $F < S_2 \leqslant F_1$, в котором F конечна, S_2/F абелева без кручения, порядок фактора F_1/S_2 ограничен числом, зависящим лишь от r. Ввиду леммы 3 в S_1/S_2 существует характеристическая подгруппа S/S_2, обладающая рациональным рядом, и порядок группы S_1/S ограничен числом, зависящим лишь от $|F_1/S_2|$ и r (тем самым это число зависит лишь от r). Подгруппы F, S искомые. Следовательно, доказываемое утверждение справедливо и для s. Лемма доказана.

Доказательство теорем. Докажем сначала теорему 1. Для этого достаточно установить, что локально почти разрешимая группа G, удовлетворяющая условию min — max — ∞ почти разрешима. Обозначим через K локально конечный радикал группы G. Из условия min — max — ∞ вытекает условие минимальности для абелевых подгрупп группы K. В силу результатов В. П. Шункова [11, 12] группа K экстремальна. Для фактор-группы G/K выполняются все требования теоремы, и G/K имеет единичный локально конечный радикал. Поэтому для окончания доказательства теоремы остается рассмотреть случай группы G при дополнительном предположении о том, что локально конечный радикал группы G равен 1. Именно этот случай изучается в дальнейшем.

По условию конечнопорожденные подгруппы группы G почти разрешимы, следовательно, по лемме 1 они удовлетворяют условию min — ∞ и поэтому имеют конечные показатели минимальности [6]. Покажем, что показатели минимальности конечнопорожденных подгрупп группы G ограничены в совокупности. Действительно, если в G существуют конечнопорожденные подгруппы со сколь угодно большими показателями минимальности, то в G существует бесконечная возрастающая последовательность конечнопорожденных подгрупп $G_1 < G_2 < \ldots < G_j < \ldots$, для показателей минимальности которых выполняется соотношение: $m(G_1) < m(G_2) < \ldots < m(G_j) < \ldots$. Обозначим через R_j разрешимый радикал подгруппы G_j. Так как G_j почти разрешима, то индекс $[G_j : R_j]$ конечен и поэтому $m(R_j) = m(G_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Таким образом,

$$m(R_1) < m(R_2) < \ldots < m(R_j) < \ldots \tag{7}$$

Рассмотрим подгруппу $R = R_1 R_2 \ldots R_j \ldots$ Подгруппа R по следствию 2 является расширением квазиполной подгруппы Q при помощи финитно аппроксимируемой группы. Так как подгруппа R локально разрешима, то ввиду леммы 4 и следствия 1 подгруппа Q и фактор-группа R/Q разрешимы. Поэтому разрешима и группа R. Группа R удовлетворяет условию $\min - \max - \infty$ поэтому R по лемме 1 удовлетворяет условию $\min - \infty$ и, значит, показатель минимальности $m(R)$ группы R конечен [6]. Тогда из соотношения $m(R_j) \leqslant m(R)$ вытекает, что показатели минимальности всех подгрупп R_j ограничены в совокупности. Тем самым получено противоречие с (7). Итак, доказано, что показатели минимальности конечнопорожденных подгрупп группы G ограничены в совокупности.

Ввиду доказанного свойства в G существует локальная система $\mathfrak{L} = (L_\alpha, \alpha \in A)$, состоящая из конечнопорожденных подгрупп с одинаковыми показателями минимальности. Все подгруппы системы $\mathfrak{L}$ почти без кручения. Действительно, обозначим через Q_α максимальную полную подгруппу группы L_α. Подгруппа Q_α периодическая абелева и нормальна в L_α. Так как $\mathfrak{L}$ — локальная система для G и так как $Q_\alpha \leqslant Q_\beta$, если $L_\alpha \leqslant L_\beta$, то подгруппа $Q = \bigcup_{\alpha \in A} Q_\alpha$ — нормальная абелева периодическая подгруппа группы G. Из предположения о тривиальности локально конечного радикала группы G получаем $Q = 1$, следовательно, $Q_\alpha = 1$ и поэтому любая подгруппа L_α из $\mathfrak{L}$ почти без кручения. Так как вместе с этим подгруппа L_α почти разрешима, то в силу леммы 1 L_α содержит подгруппу H_α конечного индекса, обладающую рациональным рядом. Из равенства показателей минимальности всех подгрупп L_α системы $\mathfrak{L}$ вытекает равенство длин рациональных рядов подгрупп H_α. Пусть r — общее значение этих длин. По лемме 5 группа L_α содержит ряд характеристических подгрупп $F_\alpha < S_\alpha \leqslant L_\alpha$, где F_α — конечная группа, фактор-группа S_α/F_α обладает рациональным рядом длины r, порядок фактор-группы L_α/S_α конечен и не превосходит некоторого числа n, зависящего только от r. Докажем, что

$$|F_\alpha| \leqslant n \text{ для всех } \alpha \in A. \tag{8}$$

Предположим противное: для некоторого $\beta \in A$ справедливо соотношение $|F_\beta| > n$. Положим $A' = (\alpha \mid \alpha \in A, L_\alpha \geqslant L_\beta)$. Тогда $\mathfrak{L}' = (L_\alpha, \alpha \in A')$ — локальная система подгрупп группы G и $F_\alpha \cap F_\beta \neq 1$ для всех $\alpha \in A'$. Разобьем систему $\mathfrak{L}'$ на конечное число подсистем $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_q$ следующим образом: две подгруппы $L_{\alpha_1}, L_{\alpha_2}$ из $\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда входят в одну подсистему, когда $F_{\alpha_1} \cap F_\beta = F_{\alpha_2} \cap F_\beta$. Так как $\mathfrak{L}'$ — локальная система подгрупп и $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{L}_q$, то хотя бы одна из подсистем $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_q$ сама является локальной системой подгрупп группы G. Пусть это будет подсистема $\mathfrak{L}_1 = (L_\alpha, \alpha \in A_1 \subseteq A')$. По построению $\bigcap_{\alpha \in A_1} F_\alpha \neq 1$. Положим $F = \bigcap_{\alpha \in A_1} F_\alpha$. Подгруппа F порождает в группе G локально конечную нормальную подгруппу. Действительно, если $g_1, \ldots, g_k$ — произвольное конечное множество элементов группы G и L_γ — подгруппа из $\mathfrak{L}_1$, содержащая элементы $g_1, \ldots, g_k$, то $F = \bigcap_{\alpha \in A_1} F_\alpha \leqslant F_\gamma$, а так как подгруппа F_γ нормальна в L_γ, то $\langle g_1^{-1} F g_1, \ldots, g_k^{-1} F g_k \rangle \leqslant \langle g_1^{-1} F_\gamma g_1, \ldots, g_k^{-1} F_\gamma g_k \rangle = \langle F_\gamma, \ldots, F_\gamma \rangle = F_\gamma$, откуда вытекает конечность подгруппы $\langle g_1^{-1} F g_1, \ldots$

$\ldots, g_k^{-1}Fg_k\rangle$. Итак, подгруппа F порождает в группе G локально конечную нормальную подгруппу, а из предположения о тривиальности локально конечного радикала группы G вытекает теперь $F = 1$, в противоречие с предположением. Неравенство (8) доказано.

Так как фактор-группа S_α/F_α обладает рациональным рядом длины r, $|F_\alpha| \leqslant n$ и число n зависит только от r, то по лемме 2 в группе S_α существует подгруппа T_α, обладающая рациональным рядом длины r, индекс которой $[S_\alpha : T_\alpha]$ не превосходит некоторого числа m, зависящего только от r. Ввиду $[L_\alpha : S_\alpha] \leqslant n$, имеем $[L_\alpha : T_\alpha] \leqslant mn$. Класс разрешимости подгруппы T_α, очевидно, не выше r.

Таким образом, группа G обладает такой локальной системой подгрупп $\mathfrak{L} = (L_\alpha)$, что всякая подгруппа L_α содержит разрешимую подгруппу T_α, причем классы разрешимости подгрупп T_α и индексы $[L_\alpha : T_\alpha]$ ограничены в совокупности. Известно, что в этом случае группа G почти разрешима. Тогда группа G удовлетворяет условию $\min - \infty$. Теперь утверждение теоремы 1 получается из описания строения разрешимых групп с условием $\min - \infty$ [6]. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 непосредственно вытекает теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. I. Robinson, On soluble minimax groups, Math. Zeitschr., № 101, 1967.
2. R. Baer, Das Hyperzentrum einer gruppe, III, Math. Zeitschr., № 59, 1953.
3. R. Baer, Poliminimax gruppen, Math. Ann., № 175, 1968.
4. D. I. Robinson, Residual properties of some classes of infinite soluble groups, Proc. London Math. Soc., vol. 18, № 3, 1968.
5. D. I. Robinson, A note on groups of finite rank, Compositio math., vol. 21, № 3, 1969.
6. Д. И. Зайцев, Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности, УМЖ, т. 20, № 4, 1968.
7. Д. И. Зайцев, О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности, Матем. сб., т. 78, № 3, 1969.
8. Д. И. Зайцев, О разрешимых группах конечного ранга, ДАН СССР, т. 181, № 1, 1968.
9. Д. И. Зайцев, О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности и максимальности для подгрупп, IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум (резюме), Гомель, 1968.
10. В. П. Шунков, О проблеме минимальности для локально конечных групп, Алгебра и логика, т. 9, № 2, 1970.
11. В. П. Шунков, О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп, Алгебра и логика, т. 9, № 5, 1970.
12. А. И. Мальцев, О гомоморфизмах на конечные группы, Уч. зап. Ивановского педагогического института, т. 18, 1958.
13. М. И. Каргаполов, О проблеме О. Ю. Шмидта, Сиб. матем. ж., т. 4, № 1, 1963.
14. Б. И. Плоткин, Радикальные и полупростые группы, Труды Моск. матем. об-ва, т. 6, 1957.

Поступила 4.V 1971 г.

Институт математики АН УССР