1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.41/47

Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп

Д. И. Зайцев

Группы, удовлетворяющие условию минимальности для неабелевых подгрупп (т. е. не содержащие бесконечных убывающих цепей неабелевых подгрупп), впервые изучались С. Н. Черниковым [1]. Им было установлено, что периодическая неабелева группа, имеющая нормальную систему с конечными факторами и удовлетворяющая условию минимальности для неабелевых подгрупп, экстремальна (см. также [2]). Впоследствии В. П. Шунковым [3] было доказано, что неабелева локально конечная группа с условием минимальности для неабелевых подгрупп экстремальна.

Автором [4] введено в рассмотрение так называемое слабое условие минимальности для подгрупп и при некоторых дополнительных ограничениях описаны группы, удовлетворяющие этому условию. В данной работе изучаются группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп, т. е. группы, не содержащие бесконечных убывающих цепей неабелевых подгрупп, в которых все соседние индексы бесконечны. Следуя [5], будем употреблять для обозначения слабого условия минимальности символ $\min-\infty$, а для обычного условия минимальности символ $\min$. Такие обозначения создают удобства для чтения и экономят место. С этой же целью введем аналогичные обозначения: $\widetilde{\min}$ — условие минимальности для неабелевых подгрупп, $\widetilde{\min}-\infty$ — слабое условие минимальности для неабелевых подгрупп. Основной результат этой статьи следующая теорема.

Теорема. *Для неабелевой локально почти разрешимой группы условия $\widetilde{\min}-\infty$ и $\min-\infty$ равносильны.*

Ввиду этой теоремы и результатов работы [5] строение неабелевой локально почти разрешимой группы, удовлетворяющей условию $\widetilde{\min}-\infty$, известно. При доказательстве используются результаты В. П. Шункова [3], и ряд предложений из [5].

Лемма 1. *Если неабелева группа G удовлетворяет условию $\widetilde{\min}-\infty$, то в ней существует конечнопорожденная подгруппа, финитно неотделимая от G.*

Доказательство. Пусть (G_α) — множество всех конечнопорожденных подгрупп группы G. Если все подгруппы G_α финитно отделимы от G, то, как установлено в доказательстве леммы 2 работы [5], в G существуют три неограниченные последовательности: последовательность элементов группы G

$$(g_N)=(g_1,\ldots,g_n,\ldots),$$

возрастающая последовательность подгрупп локальной системы (G_α)

$$G_1<\ldots<G_n<\ldots,$$

убывающая последовательность нормальных подгрупп конечного индекса группы G

$$A_1 > \ldots > A_n > \ldots$$

и эти последовательности связаны соотношениями

$$G = A_{n+1} G_n,$$

$$g_n \in (A_n \setminus A_{n+1} G_n) \cap (G_{n+1} \setminus G_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что здесь в качестве G_1 можно выбирать произвольную подгруппу из системы (G_α). Для построенной последовательности (g_N) справедливо соотношение

$$|N_2 \setminus N_1| \leqslant [\langle g_{N_2}, G_1 \rangle : \langle g_{N_1}, G_1 \rangle] \qquad (1)$$

при $N_1 \subset N_2 \subseteq N$. Оно установлено, по существу, при доказательстве леммы 2 из [5], хотя в формулировке этой леммы приведено несколько иное соотношение. Будем считать G_1 конечнопорожденной неабелевой подгруппой. Опираясь на соотношение (1), в G можно построить бесконечную убывающую цепь неабелевых подгрупп $H_1 > \ldots > H_j > \ldots$, соседние индексы в которой бесконечны. Это противоречит условию $\widetilde{\min} - \infty$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для неабелевых локально конечных групп условия* $\widetilde{\min} - \infty$ *и* $\min$ *равносильны.*

Доказательство. Пусть неабелева локально конечная группа G удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$ и

$$H_1 \geqslant \ldots \geqslant H_j \geqslant \ldots \qquad (2)$$

— некоторая ее убывающая цепь неабелевых подгрупп. Ввиду условия $\widetilde{\min} - \infty$ для этой цепи существует такой номер j, что индексы $[H_j : H_{j+k}]$ конечны при $k = 1, 2, \ldots$ По лемме 1 в H_j существует конечная подгруппа K финитно неотделимая от H_j. Поэтому цепь подгрупп (2) должна обрываться на некотором члене H_{j+k}. Тем самым доказано, что G удовлетворяет условию $\widetilde{\min}$. В силу результатов В. П. Шункова [3] G удовлетворяет условию минимальности и экстремальна.

Лемма 2. *Если группа G удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$ и содержит неабелеву подгруппу H, удовлетворяющую условию $\min - \infty$, то G удовлетворяет условию $\min - \infty$ для нормальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $N_1 \geqslant \ldots \geqslant N_j \ldots$ — произвольная убывающая цепь нормальных подгрупп группы G. Ввиду условия леммы можно найти такое натуральное n, что $[H \cap N_j : H \cap N_{j+1}] < \infty$, $[HN_j : HN_{j+1}] < \infty$ при $j \geqslant n$. Тогда $[N_j : N_{j+1}] = [H \cap N_j : H \cap N_{j+1}][HN_j : HN_{j+1}] < \infty$ при $j \geqslant n$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Для неабелевых нильпотентных групп условия* $\widetilde{\min} - \infty$ *и* $\min - \infty$ *равносильны.*

Следствие. 3. *Если неабелева группа является конечным расширением своего центра и удовлетворяет условию* $\widetilde{\min} - \infty$, *то она удовлетворяет условию* $\min - \infty$.

Лемма 3. *Пусть A — конечная элементарная абелева p-группа и φ — некоторый ее автоморфизм. Тогда в A существует φ-композиционный ряд $1 = A_0 < A_1 < \ldots < A_n = A$, порядки факторов которого подчинены неравенствам $|A_1/A_0| \geqslant \ldots \geqslant |A/A_{n-1}|$.*

Доказательство. Докажем сначала лемму для случая, когда длина φ-композиционного ряда группы A равна двум. Пусть $1 < A_1 < A$ —

произвольный φ-композиционный ряд в A и $|A/A_1| > |A_1|$. Достаточно установить существование в A такой φ-допустимой подгруппы A_2, что $|A_2| = |A/A_1|$. Обозначим φ^m, φ^k наименьшие положительные степени φ, индуцирующие тождественные автоморфизмы в факторах A_1, A/A_1 соответственно. Так как $1 < A_1 < A$ — φ-композиционный ряд, то $(m, p) = (k, p) = 1$. Обозначим через l наибольшее общее кратное чисел m, k. Автоморфизм φ^l действует тождественно в факторах ряда $1 < A_1 < A$ и поэтому ввиду $|A/A_1| > A_1|$ имеем $\varphi^l = 1$. Учитывая $(l, p) = 1$, по теореме Машке в A можно найти φ-допустимое дополнение A_2 к подгруппе A_1. Ряд подгрупп $1 < A_2 < A$ будет φ-композиционным и $|A_2| = |A/A_1|$. Опираясь на доказанное утверждение и пользуясь индукцией по длине ряда n, убеждаемся в справедливости леммы 3.

Лемма 4. *Для неабелевой почти разрешимой группы G условия $\widetilde{\min} - \infty$ и $\min - \infty$ равносильны.*

Доказательство. Рассмотрим несколько возможных случаев.

1) $G = A\langle b \rangle$, A — нормальная элементарная абелева p-подгруппа, $\langle b \rangle$ — циклическая группа. Докажем, что A — конечная группа. Если элемент b — конечного порядка, то конечность A вытекает из следствия 1. Пусть теперь $\langle b \rangle$ — бесконечная циклическая группа.

а) В подгруппе A существует элемент a, определяющий бесконечный класс сопряженных элементов. В этом случае подгруппа $\langle a, b \rangle$ изоморфна сплетению группы порядка p и бесконечной циклической группы. Такое сплетение, как нетрудно видеть, не удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$. Следовательно, этот случай невозможен.

б) Любой элемент из a имеет конечное число сопряженных с ним элементов в группе g. Предположим противное: A бесконечна. Тогда, не нарушая общности, можно считать, что A является объединением счетного возрастающего ряда конечных нормальных подгрупп группы G

$$1 = A_0 < A_1 < \ldots < A_j < \ldots, \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A, \qquad (3)$$

причем этот ряд является G-композиционным. Если порядки факторов ряда (3) не ограничены в совокупности, то ввиду леммы 3 в G существуют минимальные нормальные подгруппы сколь угодно больших порядков $N_1, \ldots, N_j, \ldots, |N_1| < \ldots < |N_j| < \ldots$ Тогда подгруппа $(N_1 \times \ldots \times N_j \times \ldots)\langle b \rangle$ не удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$. Если же порядки факторов ряда (3) ограничены в совокупности, то существует степень b^m элемента b, индуцирующая тождественный автоморфизм в каждом факторе ряда (3). Вместе с этим никакая степень элемента b не входит в центр группы G: действительно, если $b^n \in C(G)$ для некоторого n, то $G/\langle b^n \rangle$ не экстремальная группа, не удовлетворяющая условию $\widetilde{\min} - \infty$ по следствию 1. Отсюда вытекает, что подгруппа $H = A\langle b^m \rangle$ обладает верхним центральным рядом $1 = C_0 < C_1 < \ldots < C_j < \ldots C_\omega = A < H$. Члены этого ряда с натуральными номерами конечны — это следует из леммы 2. При таком положении дел в группе G существует бесконечная совокупность элементов $a_0 = 1$, $a_1, \ldots, a_j, \ldots$, удовлетворяющая условию: $[a_j, b^m] = a_{j-1}$ при $j = 1, 2, \ldots$ (для доказательства см. [6]). Такая совокупность элементов названа в [6] коммутаторной лестницей элемента b^m. Рассмотрим подгруппу H_1, порожденную элементами b^m, a_j. Из соотношений между элементами b^m, a_j вытекает

$$b^{-mp} a_{jp} b^{mp} = \prod_{i=0}^{p} a_{jp-i}^{\binom{i}{p}} = a_{jp} a_{(j-1)p}, \text{ так как при } 1 \leqslant i \leqslant p-1 \binom{i}{p} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

Следовательно, подгруппа $H_2 = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \langle a_{jp} \rangle\right) \langle b^{mp} \rangle$ изоморфна H_1, индекс $[H_1 : H_2]$, очевидно, бесконечен. Таким же образом в H_2 можно найти подгруппу H_3, изоморфную H_2, и такую, что индекс $[H_2 : H_3]$ бесконечен и т. д. Продолжая эти рассуждения, получаем бесконечную цепь подгрупп, противоречащую условию $\widetilde{\min} - \infty$.

Случай 1) доказан полностью.

2) $G = A\langle b \rangle$, A — нормальная периодическая абелева подгруппа.

Пусть A_p — некоторая p-примарная компонента группы A, не содержащаяся в центре группы G. Построим ряд подгрупп $1 = A_p^{(0)} \leqslant A_p^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant A_p^{(j)} \leqslant \ldots$, где $A_p^{(j)}/A_p^{(j-1)}$ — нижний слой группы $A/A_p^{(j-1)}$. Факторы этого ряда ввиду случая 1) либо центральны, либо конечны, и поэтому, если $A_p^{(j)}$ — нецентральная подгруппа, то можно указать степень b^m, индуцирующую тождественный автоморфизм в $A_p^{(j)}$. Группа $A_p^{(j)} \langle b \rangle / \langle b^m \rangle$ неабелева периодическая и удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$. Следовательно, она конечна по следствию 1. Ввиду этого, A_p — экстремальная группа. Далее из леммы 2 вытекает, что отличных от единицы примарных компонент группы A может быть только конечное множество и что те из них, которые содержатся в центре, экстремальны. Тем самым, A — экстремальная группа, откуда следует условие $\min - \infty$ для G.

3) $G = A\langle b \rangle$, A — нормальная абелева подгруппа, группа G конечнопорождена.

В этом случае периодическая часть P группы A имеет конечную экспоненту, A содержит свободную абелеву подгруппу F, фактор-группа по которой периодическая и содержит конечное множество неединичных примарных компонент [7]. Поэтому, если P бесконечна или ранг F бесконечен, то можно найти такое простое число p, что A/A^p — бесконечная группа. Фактор-группа G/A^p не удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$ по случаю 1) в противоречии с предположением. Следовательно, P конечна, F имеет конечный ранг и, таким образом, A удовлетворяет условию $\min - \infty$.

4) $G = A\langle b \rangle$, A — произвольная абелева нормальная подгруппа группы G.

Так как G удовлетворяет условию $\widetilde{\min} - \infty$, то по лемме 1 в G существует неабелева конечнопорожденная подгруппа H, финитно неотделимая от G. Не нарушая общности, можно считать, что $H = (H \cap A)\langle b \rangle$. Ввиду случая 3) H удовлетворяет условию $\min - \infty$ и, очевидно, $H \cap A \lhd G$. Пусть $P/H \cap A$ — периодическая часть группы $A/H \cap A$. Группа $P/H \cap A$ экстремальна. Действительно, если $P\langle b \rangle / H \cap A$ — неабелева группа, то это показано в случае 2), если же $P\langle b \rangle / H \cap A$ — абелева группа, то это вытекает из леммы 2 и следствия 1. Таким образом, P удовлетворяет условию $\min - \infty$. Докажем, что $P = A$. Пусть $P \neq A$. Тогда P можно включить в такую нормальную подгруппу $A_1 \leqslant A$ группы G, что $A_1\langle b \rangle / P$ — конечнопорожденная группа. Группа A_1/P удовлетворяет условию $\min - \infty$ по случаю 3). Периодическая часть P_1/A_1 группы A/A_1 экстремальна (это доказывается так же, как и экстремальность группы $P/H \cap A$) и поэтому группа P_1/P удовлетворяет условию $\min - \infty$. Так как P_1/P к тому же без кручения, она финитно аппроксимируемая и, значит, можно найти натуральное n, для которого $A/P \neq (A/P)^n$. Положим $(A/P)^n = B/P$. Индекс B в A конечен, как это вытекает из случая 2) и леммы 2. Следовательно, $B\langle b \rangle$ — истинная подгруппа конечного индекса в G и $B\langle b \rangle \geqslant (H \cap A)\langle b \rangle = H$, что невозможно ввиду финитной неотделимости H от G. Тем самым доказано, что $P = A$, поэтому A и, значит, G удовлетворяют условию $\min - \infty$.

5) G — неабелева почти разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\widetilde{\min} - \infty$.

Пусть S — разрешимая нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Если S содержится в центре, то достаточно применить следствие 3. Если S абелева и не содержится в центре, то при помощи случая 4) получаем, что S удовлетворяет условию $\min - \infty$. В случае, когда S неабелева разрешима, то в G можно выбрать нормальную неабелеву подгруппу S_1 с абелевым коммутантом. Опираясь на случай 4) и на следствие 2, можно показать, что S_1 удовлетворяет условию $\min - \infty$. Так как S_1 неабелева, то G/S_1 удовлетворяет условию $\min - \infty$. Следовательно, условию $\min - \infty$ удовлетворяет и группа G. Лемма доказана.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 работы [5] с незначительными изменениями. При этом используется лемма 4 и теорема В. П. Шункова об экстремальности неабелевой локально конечной группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп [3]. Достаточно сделать лишь следующие замечания.

Локально разрешимая неабелева группа G с условием $\widetilde{\min} - \infty$ удовлетворяет условию $\min - \infty$. Ввиду леммы 4 требуется показать только разрешимость группы G. Для этого предположим, что группа G неразрешима и обозначим через Q пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Фактор-группа G/Q разрешима, так как она финитно аппроксимируема и ввиду леммы 1 G/Q содержит конечнопорожденную подгруппу, финитно неотделимую от G/Q. Следовательно, Q — неразрешимая группа. Группа Q не содержит истинных подгрупп конечного индекса, так как в противном случае Q содержит истинную нормальную подгруппу Q_1 группы G, определяющую разрешимую фактор-группу G/Q_1 и не содержащую полных подгрупп, отличных от единицы. Вместе с этим G/Q_1 удовлетворяет условию $\min - \infty$ и поэтому финитно аппроксимируема. Это противоречит выбору подгруппы Q. Таким образом, Q не содержит истинных подгрупп конечного индекса. Пусть (Q_α) — некоторая ее инвариантная система с абелевыми факторами. Если Q_α — неабелева подгруппа, то Q/Q_α удовлетворяет условию $\min - \infty$ и, значит, группа Q/Q_α абелева [4]. Отсюда следует, что фактор-группа Q/Q_β группы Q по пересечению Q_β всех неабелевых членов системы (Q_α) абелева. Объединение Q_γ всех абелевых членов системы (Q_α) определяет абелеву (возможно, единичную) фактор-группу Q_β/Q_γ. Следовательно, Q разрешима. Поэтому и группа G должна быть разрешимой. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп, ДАН СССР, т. 159, № 4, 1964.
2. С. Н. Черников, Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп, сб. Группы с ограничениями для подгрупп, «Наукова думка», К., 1971.
3. В. П. Шунков, Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп, сб. Алгебра. Матрицы и матричные группы, ротапринт Института физики АН СССР, Красноярск, 1970.
4. Д. И. Зайцев, Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности, УМЖ, т. 20, № 4, 1968.
5. Д. И. Зайцев, К теории минимаксных групп, УМЖ, т. 23, № 5, 1971.
6. С. Н. Черников, О бесконечных специальных группах с конечным центром. Матем. сб., т. 27, № 1, 1945.
7. P. Hall, On the finiteness of certain soluble groups, Proc. London Math. Soc., vol. 9, № 36, 1959.

Поступила 15.V 1971 г.

Институт математики АН УССР