УДК 519.44

О p-нильпотентных и p-разложимых подгруппах конечных групп

С. А. Чунихин

§ 1. Сравнимость с 1 по простому модулю встречается в ряде вопросов теории конечных групп. Мы назовем ее конгруэнт-условием или С-условием. В работах [1, 2] с помощью C-условий были найдены признаки p-разложимости и p-нильпотентности конечных групп. Идеи этих работ (см. также [3—6]) мы сейчас прилагаем к обнаружению p-нильпотентных и p-разложимых подгрупп у конечных групп, результатом чего является приводимая ниже теорема 1. Эта теорема затем объединяется в теореме 2 с нашей теоремой о слабо направленных индексиалах [7, теорема 6; 8]. Предельным случаем теоремы 1 является одна сторона теоремы 9.1 из [2] и теоремы VII из [1].

§ 2. Обозначения: p — простое число; $a \mid b$ — натуральное a делит натуральное b; примарный делитель натурального числа — делитель, являющийся степенью простого числа (включая 1); если Γ — конечная последовательность натуральных чисел, то $\overline{\Gamma}$ при Γ непустом обозначает произведение всех элементов Γ, а при Γ пустом равно 1; G — конечная группа; $|G|$ — ее порядок; k — порядок ее коммутанта; E — ее единичная подгруппа; максимальная подгруппа (м-подгруппа) — при $G \neq E$ истинная подгруппа G (т. е. $\neq G$), не являющаяся истинной подгруппой никакой истинной подгруппы G (а при $G = E$ — сама G); группы Шмидта — минимальные не нильпотентные группы [9], их порядок делится только на два различных простых числа; если p не делит $|G|$, то E считаем p-силовской подгруппой G; p-нильпотентная группа (p-н-группа) — конечная группа, имеющая инвариантное p-силовское дополнение; p-разложимая группа (p-разл. группа) — р-н-группа, у которой p-силовская подгруппа инвариантна; инвариантный ряд R группы G — ряд $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_\nu = E$, $\nu \geqslant 1$, все члены которого инвариантные подгруппы G; его уплотнение (ср. [10]) $R_f : G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_{\beta-1} \supseteq F_\beta \supseteq G_\beta \supseteq F_{\beta+1} \supseteq G_{\beta+1} \supseteq \ldots \supseteq G_{\nu-1} \supseteq F_\nu \supseteq G_\nu = E$, $1 \leqslant \beta$, при помощи подгрупп F_i, $i = \beta, \ldots, \nu$, назовем индексиальным рядом (инд. рядом) G, если каждая подгруппа F_i удовлетворяет «условию сопряженности»: всякая подгруппа из G_{i-1}, сопряженная с F_i в F_β, сопряжена с F_i уже с помощью некоторого элемента из G_{i-1}; подгруппы F_i назовем факториальными (ф-подгруппами) ряда R или ряда R_f; если $|F_i/G_i| = f_i$, то $f_\beta f_{\beta+1} \ldots f_\nu = h$ назовем индексиалом группы G или индексиалом ряда R, а F_i/G_i — его факторами; пусть $n_i |F_i|$ — порядок нормализатора группы F_i в G_{i-1}, тогда n_i назовем нормализаторным индексом (норм. индексом) ф-подгруппы F_i; назовем h слабо направленным (сл. напр.) индексиалом [7, 8] G, если из $\beta < i \leqslant \nu$ следует $(n_i, f_\beta f_{\beta+1} \ldots f_{i-1}) = 1$; доказано [7, теорема 6; 8], что сл. напр. индексиал является правильным (т. е. таким, что выполнено:

в F_β есть подгруппа H порядка h, для которой $F_i = (H \cap G_{i-1}) G_i$, $i = \beta, \ldots, \nu$; (1)

H назовем подходящей (подх.) подгруппой для h; если $|A/B| = d$, то группу A назовем d-расширением B; последовательность всех индексов некоторого ряда подгрупп группы G (необязательно обрывающегося на E) назовем трассой этого ряда; $\{f(x) \mid x \in M\}$ — множество всех объектов $f(x)$, у которых $x \in M$; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини G.

§ 3. Определение 1. Пусть $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$ — непустая подпоследовательность последовательности некоторых натуральных чисел Δ^* и пусть фиксированы некоторые числа — натуральное r и простое p. Пусть $i = 1, \ldots, m$ и d_i — произвольный примарный > 1 делитель числа (δ_i, r). Пусть еще $\Delta_i = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i\}$. Введем два условия:

1) из $p \mid d_i$ следует $(d_i - 1, \overline{\Delta_i}) = 1$; 2) из p не делит d_i и $p \mid \overline{\Delta}_i$ следует $(d_i - 1, p) = 1$. Тогда Δ назовем rC_jp-последовательностью (кратко: rC_jp-п), где $j = 1, 2$, если при $j = 1$ она удовлетворяет условию 1), а при $j = 2$ условиям 1) и 2). Очевидно, что любая Δ, все члены которой не делятся на p, является rC_jp-п при $j = 1, 2$. При $m = 1$ rC_jp-п назовем rC_jp-числом. Пусть Δ_a обозначает последовательность всех членов Δ, предшествующих в Δ^* ее члену a из $\Delta^* \setminus \Delta$. Если rC_jp-п Δ такова, что для каждого $a \in \Delta^* \setminus \Delta$ число $(a, \overline{\Delta}_a)$ есть степень p (включая и нулевую), то Δ назовем rC_jp-п в Δ^*. Если Δ^* есть трасса некоторого инвариантного ряда R группы G, то rC_jp-п Δ в Δ^* назовем rC_jp-п группы G или rC_jp-п ряда R группы G. Во всех этих обозначениях условимся опускать r, если $r = \overline{\Delta}$. К rC_jp-п отнесем и пустую последовательность.

Теорема 1. *Пусть фиксированы некоторые числа — натуральное d и простое p. Если Δ является kdC_jp-п (C_jp-п) инвариантного ряда R группы G, то G имеет при $j = 1$ p-н-подгруппу, а при $j = 2$ p-разл. подгруппу порядка $\overline{\Delta}$. Если R — главный ряд G, то при $j = 1, 2$ делящиеся на p члены Δ — примарные числа.*

Доказательство. Так как C_jp-п и kdC_jp-п $(j = 1, 2)$ являются и kC_jp-п, то теорему достаточно доказать для kC_jp-п. Очевидно, можно считать, что R не имеет повторений. Тогда при уплотнении ряда R до главного R_1 каждый член Δ будет произведением некоторых индексов ряда R_1. Значит, и у R_1 имеется такая kC_jp-п Δ_1, что $\overline{\Delta_1} = \overline{\Delta}$. Поэтому для доказательства теоремы можно предположить, что ряд R уже главный. По условию, каждый делящийся на p член δ_i из Δ есть kC_jp-число. Отсюда, учитывая, что порядок коммутанта соответствующей δ_i фактор-группы ряда R делит k, заключаем при $j = 1$ по теореме 9.1 из [2] и при $j = 2$ по теореме VII из [1], что эта фактор-группа есть p-н-группа (соответственно p-разл. группа). Но в качестве фактора главного ряда она элементарная. Поэтому ее порядок δ_i — примарное число.

Пусть теперь G — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме и Δ — та kC_jp-п $(j = 1, 2)$ группы G, для которой в G нет соответствующей подгруппы. Тогда $\overline{\Delta} > 1$, т. е. $|G| > 1$. Пусть $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \ldots \supset G_\lambda = E$ — ряд R, считаемый нами за главный для G, и $|G_{\lambda-1}| = h_\lambda$. Конечно, $h_\lambda > 1$ и $\lambda > 1$. Пусть $\overline{\Delta} = p^\alpha t$, $(p, t) = 1$, $\alpha \geqslant 0$.

1) $h_\lambda \in \Delta$. Теорема, очевидно, верна для $G/G_{\lambda-1}$ относительно ее kC_jp-п $\Delta \setminus \{h_\lambda\}$. Поэтому $G/G_{\lambda-1}$ имеет подгруппу $N/G_{\lambda-1}$ порядка $\overline{\Delta}/h_\lambda$, которая при $j = 1$ будет p-н-группой, а при $j = 2$ p-разл. группой.

1.1) p не делит h_λ, $j = 2$. Так как $N/G_{\lambda-1}$ — p-разл. группа, то ее p-силовская подгруппа $P/G_{\lambda-1}$ порядка p^{α_1}, $\alpha_1 = \alpha$, в ней инвариантна. Поэтому P порядка $p^{\alpha_1} h_\lambda$ инвариантна в N Если $\alpha_1 = 0$, то N порядка $\overline{\Delta}$ будет, ввиду p не делит $\overline{\Delta}$, p-разл. подгруппой. Противоречие. Пусть $\alpha_1 > 0$. Если p-силовская подгруппа из P будет в P инвариантной, то она будет инвариантной p-силовской подгруппой и из N Пусть p-силовская подгруппа из P в ней не инвариантна. Тогда P p-н-группа, но не p-разл. группа, откуда по 2) теоремы 3.2 из [2] заключаем, что P содержит p-н-подгруппу Шмидта

S порядка $p^{\alpha_2}q^{\beta}$, α_2, $\beta > 0$. Очевидно, что $q^{\beta} \mid h_{\lambda}$. По лемме 1 из [3], q^{β}—порядок коммутанта группы S, поэтому $q^{\beta} \mid k$. По условию, $h_{\lambda} \in \Delta$ и p^{α_2} делит $\overline{\Delta}/h_{\lambda}$. Отсюда, ввиду того, что Δ есть $kC_j p$-п при $j = 2$, следует, что $q^x \not\equiv 1 \pmod p$ для всех $1 \leqslant x \leqslant \beta$. Но тогда p-силовская подгруппа из S в ней инвариантна, что невозможно.

1.2) $p \mid h_{\lambda}$, $j = 2$. Тогда h_{λ} — степень p и P будет инвариантной p-силовской подгруппой в N. Итак, при $j = 2$ p-силовская подгруппа группы N порядка $\overline{\Delta}$ в ней инвариантна.

1.1′) p не делит h_{λ}, $j = 1, 2$. Так как $N/G_{\lambda-1}$ — p-н-группа, то ее p-силовское дополнение $N^*/G_{\lambda-1}$ инвариантно в $N/G_{\lambda-1}$. Отсюда, ввиду еще p не делит h_{λ}, следует, что N^* будет инвариантным p-силовским дополнением подгруппы N порядка $\overline{\Delta}$.

1.2′) $p \mid h_{\lambda}$, $j = 1, 2$. Тогда согласно предыдущему $h_{\lambda} = p^{\omega}$, $\omega > 0$. Если N^* — p-н-группа, то ее p-силовское дополнение в ней инвариантно и будет инвариантным p-силовским дополнением в N. Пусть теперь N^* не p-н-группа. Тогда она, по 1) теоремы 3.2 из [2], содержит q-н-подгруппу Шмидта S_1 порядка $p^{\alpha_3}q^{\beta_1}$; α_3, $\beta_1 > 0$, $\alpha_3 \leqslant \omega$, причем q^{β_1} делит $\overline{\Delta}/h_{\lambda}$. По лемме 1 из [3], p^{α_3} — порядок коммутанта группы S_1, поэтому $p^{\alpha_3} \mid k$. Кроме того, $h_{\lambda} \in \Delta$. Отсюда, ввиду того, что Δ есть $kC_j p$-п, $j = 1, 2$, следует, что $p^x \not\equiv 1 \pmod q$ для всех $1 \leqslant x \leqslant \alpha_3$. Но тогда q-силовская подгруппа из S_1 в ней инвариантна, что невозможно. Итак, при $j = 1, 2$ p-силовское дополнение подгруппы N порядка $\overline{\Delta}$ в ней инвариантно. Мы видим, что в случае 1) подгруппа N порядка $\overline{\Delta}$ будет для $j = 1$ p-н-группой, а для $j = 2$ — p-разл. группой. Случай 1) дает противоречие.

2) $h_{\lambda} \overline{\in} \Delta$. В этом случае теорема верна для $G/G_{\lambda-1}$ относительно ее $kC_j p$-пΔ. Поэтому $G/G_{\lambda-1}$ имеет подгруппу $N/G_{\lambda-1}$ порядка $\overline{\Delta}$, которая при $j = 1$ будет p-н-группой, а при $j = 2$ — p-разл. группой. Пусть $P/G_{\lambda-1}$ и $N^*/G_{\lambda-1}$— соответственно p-силовская подгруппа из $N/G_{\lambda-1}$ и ее дополнение в $N/G_{\lambda-1}$. Очевидно, что P при $j = 2$ и N^* при $j = 1, 2$ будут инвариантны в N. Далее $h_{\lambda} \overline{\in} \Delta$. Отсюда, по определению 1, $(h_{\lambda}, \overline{\Delta}) = p^{\gamma}$, $\gamma \geqslant 0$.

2.1) $\gamma = 0$, $j = 1, 2$. Тогда $N = G_{\lambda-1}H$, где $H \simeq N/G_{\lambda-1}$, т. е. подгруппа H порядка $\overline{\Delta}$ при $j = 1$ будет p-н-группой, а при $j = 2$ — p-разл. группой. Противоречие.

2.2) $\gamma > 0$. Пусть $h_{\lambda} = p^{\alpha_4}t_1$, $\alpha_4 \geqslant 0$, $t_1 \geqslant 1$, $(p, t_1) = 1$.

2.2.1) $G_{\lambda-1}$ входит в каждую м-подгруппу из N. Тогда $G_{\lambda-1} \subseteq \Phi(N)$. В этом случае N наследует от $N/G_{\lambda-1}$ свойства p-нильпотентности и p-разложимости. Следовательно, при $j = 1, 2$ N имеет инвариантную подгруппу A порядка tt_1, а при $j = 2$ еще и инвариантную силовскую подгруппу $P_{\alpha+\alpha_4}$ порядка $p^{\alpha+\alpha_4}$. Очевидно, что $A_{\lambda-1} = A \cap G_{\lambda-1}$ будет порядка t_1 и что $A_{\lambda-1}$ инвариантна в N. Так как $(h_{\lambda}, \overline{\Delta}) = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, то $(t, t_1) = 1$. Но тогда $A = BA_{\lambda-1}$, где B — подгруппа порядка t. Так как все подгруппы порядка $|B|$ из A сопряжены в ней, то $N = VA$, где V — нормализатор B в N. Но p не делит $|A|$; отсюда следует, что $p^{\alpha+\alpha_4} \mid |V|$. Отсюда, ввиду p не делит $|B|$, заключаем, что V имеет подгруппу P_{α} порядка p^{α}, а также и подгруппу BP_{α} порядка $tp^{\alpha} = \overline{\Delta}$. При $j = 1$ получили противоречие. При $j = 2$ $P_{\alpha+\alpha_4}$ инвариантна в N и, значит, в V. Тогда V содержит p-разл. подгруппу BP_{α} порядка $tp^{\alpha} = \overline{\Delta}$. Противоречие.

2.2.2) $G_{\lambda-1}$ не входит в некоторую м-подгруппу M_1 из N и $j = 1,2$. Тогда $N = M_1G_{\lambda-1}$. В силу $N/G_{\lambda-1} \simeq M_1/M_1 \cap G_{\lambda-1}$ группа $M_1/M_1 \cap G_{\lambda-1}$ порядка $\overline{\Delta}$ будет при $j = 1$ p-н-группой, а при $j = 2$ — p-разл. группой. Положим $D_1 = M_1 \cap G_{\lambda-1}$.

2.2.2.1) D_1 входит в каждую м-подгруппу из M_1. Применяя рассуждения из 2.2.1, но уже к паре подгрупп M_1 и D_1, мы также как и в 2.2.1) придем к подгруппе порядка $\overline{\Delta}$, которая при $j=1$ будет p-н-группой, а при $j=2$ p-разл. группой. Это дает противоречие при $j=1, 2$.

2.2.2.2) D_1 не входит в некоторую м-подгруппу M_2 из M_1. Тогда $M_1=M_2D_1$. В силу $M_1/D_1 \simeq M_2/M_2 \cap D_1$ группа $M_2/M_2 \cap D_1$ порядка $\overline{\Delta}$ будет при $j=1$ p-н-группой, а при $j=2$ — p-разл. группой. Положим $D_2 = M_2 \cap D_1$. Очевидно, что $|D_1| > |D_2|$. Теперь можно к M_2 и D_2 применить рассуждения, проведенные выше относительно M_1 и D_1.

Продолжая так и далее, мы после некоторого числа шагов σ либо придем, как в 2.2.1), к подгруппе порядка $\overline{\Delta}$, которая при $j=1, 2$ будет искомого типа, т. е. к противоречию, либо к равенству $M_\sigma = M_{\sigma+1}D_\sigma$, причем, если $D_{\sigma+1} = M_{\sigma+1} \cap D_\sigma$, то $M_{\sigma+1}/D_{\sigma+1}$ порядка $\overline{\Delta}$ будет при $j=1$ p-н-группой, а при $j=2$ — p-разл. группой и $|D_{\sigma+1}|=1$. Поэтому $M_{\sigma+1}$ порядка $\overline{\Delta}$ будет как при $j=1$, так и при $j=2$, подгруппой искомого типа. Итак, в случае 2) мы тоже приходим к противоречию. Теорема 1 доказана.

Интересен случай $kd=|G|$, не требующий знания числа k.

§ 4. Если Δ удовлетворяет определению kdC_jp-п для всех $p \in \pi$, где π — некоторое множество простых, то Δ назовем $kdC_j\pi$-п и теорема 1 будет в этом случае признаком существования π-нильпотентных и π-разложимых подгрупп.

§ 5. Пусть F — некоторая произвольная подгруппа G. Для дальнейшего мы несколько обобщим понятие индексиала (§ 2), заменив в его определении слова: «сопряженная с F_i в F_β» на «сопряженная с F_i при помощи некоторого элемента F». Полученный таким путем индексиал назовем F-индексиалом, а его инд. ряд — F-инд. рядом. При $F=F_\beta$ возвращаемся к обычному индексиалу. Пусть Φ обозначает последовательность $f_\beta, f_{\beta+1}, \ldots, f_\nu$. Ввиду $\beta \geqslant 1$ она непустая. Пусть $\overline{\Phi}$ является сл. напр. индексиалом ряда R с трассой Δ^*. Отбросим в R все члены, номера которых $> \beta-1$, и получим ряд $G=G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_{\beta-1}$, трассу которого обозначим через $\Delta^*_{\beta-1}$ (при $\beta=1$ она пустая).

О п р е д е л е н и е 2. Всякую подпоследовательность последовательности $\Delta^*_{\beta-1}$ назовем лежащей впереди индексиала $\overline{\Phi}$ в трассе ряда R.

Т е о р е м а 2. *Пусть $kd\ C_jp$-п Δ инвариантного ряда R группы G лежит в трассе ряда R впереди сл. напр. G-индексиала $\overline{\Phi}$ этого ряда и $H_{\beta-1}$ — любая подх. подгруппа $\overline{\Phi}$. Тогда G имеет подгруппу H порядка $\overline{\Delta}\overline{\Phi}$, которая является $\overline{\Delta}$-расширением подгруппы $H_{\beta-1}$, причем $H/H_{\beta-1}$ при $j=1$ будет p-н-группой и при $j=2$ — p-разл. группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме. Тогда для G и ее некоторого инвариантного ряда R можно составить такое $\overline{\Delta}\overline{\Phi}$, для которого в G нет соответствующей подгруппы. Если $\overline{\Delta}=1$, то в G имеется, по теореме 6 из [7, 8], подгруппа H, подходящая для Φ. Противоречие. Если же $\overline{\Phi}=1$, то в G имеется, по теореме 1, искомая подгруппа. Значит, $\overline{\Delta}>1$ и $\overline{\Phi}>1$, откуда $|G|>1$. Из $\overline{\Phi}>1$ следует, что среди членов Φ существуют >1. Возьмем среди них f_μ с наибольшим номером $\mu \leqslant \nu$. Тогда $\beta-1<\mu$. Из $\overline{\Delta}>1$ следует, что $\beta>1$. Итак, имеем

$$1 \leqslant \beta-1 \leqslant \mu-1 < \mu \leqslant \nu. \tag{2}$$

Из определения числа μ, учитывая сл. направленность $\overline{\Phi}$, заключаем, что выполняется

$$(f_\mu, |G_\mu|)=1. \tag{3}$$

Но тогда F_μ содержит подгруппу M порядка $f_\mu>1$, причем

$$F_\mu = MG_\mu, \ (|M|, |G_\mu|)=1. \tag{4}$$

Докажем (5): все подгруппы из $G_{\mu-1}$, сопряженные с M в G, сопряжены с M уже в $G_{\mu-1}$. По определению G-индексиала, это верно для подгруппы F_μ, т. е. из $g^{-1}F_\mu g \subseteq G_{\mu-1}$, $g \in G$, следует $g^{-1}F_\mu g = g_1^{-1}F_\mu g_1^{-1}$, $g_1 \in G_{\mu-1}$. Это значит, что $g^{-1}MgG_\mu = g_1^{-1}Mg_1G_\mu = N$. Тогда, на основании (3) и разрешимости групп нечетного порядка, заключаем, что $g^{-1}Mg$ и $g_1^{-1}Mg_1$ сопряжены уже в $N \subseteq G_{\mu-1}$, что и требовалось.

Докажем еще (6): если $H_{\beta-1}$ — любая подх. подгруппа индексиала $\overline{\Phi}$, то $H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1} = M^* \subseteq F_\mu$, где $|M^*| = f_\mu$ и M^* сопряжена с M в F_μ, а если $i > \mu$, то $H_{\beta-1} \cap G_{i-1} = E$. Из (1) и (4) следует, что $F_\mu = (H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1})\, G_\mu = MG_\mu$. Если $\mu = \nu$, то $G_\mu = E$ и $H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1} = M$. Если $\mu < \nu$, то при $i = \mu + 1, \ldots, \nu$, согласно определению числа μ, имеем: $F_i = G_i = (H_{\beta-1} \cap G_{i-1})\, G_i$, т. е. $H_{\beta-1} \cap G_{i-1} \subseteq G_i$. Но $G_{i-1} \supseteq G_i$. Значит $H_{\beta-1} \cap G_{i-1} = H_{\beta-1} \cap G_i$. Тогда, ввиду $H_{\beta-1} \cap G_\lambda = E$, получаем: $H_{\beta-1} \cap G_{i-1} = E$, $i = \mu + 1, \ldots, \nu$. Далее $F_\mu/G_\mu \simeq H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1}/H_{\beta-1} \cap G_\mu \simeq H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1} = M^*$. Отсюда, учитывая (4), разрешимость групп нечетного порядка и очевидное $H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1} \subseteq F_\mu$, заключаем, что M^* сопряжена с M в F_μ.

α) M инвариантна в G. Тогда на основании (2) и (4) составим ряд

$$G/M = G_0/M \supseteq G_1/M \supseteq \ldots \supseteq G_{\beta-1}/M \supseteq F_\beta/M \supseteq G_\beta/M \supseteq \ldots$$
$$\ldots \supseteq F_{\mu-1}/M \supseteq G_{\mu-1}/M \supseteq MG_\mu/M \supseteq \ldots \supseteq MG_\nu/M. \tag{7}$$

Ряд (7) можно считать G-инд. рядом, если взять в качестве его ф-подгрупп $F_\beta/M, \ldots, F_{\mu-1}/M, MG_\mu/M, \ldots, MG_\nu/M$. Соответствующий им индексиал будет, очевидно, равен $\overline{\Phi}/f_\mu$. Очевидно также, что: 1) норм-индексы ф-подгрупп F_i и F_i/M, $\beta \leqslant i \leqslant \mu - 1$, равны; 2) из определения числа μ, сл. направленности $\overline{\Phi}$ ряда R и инвариантности M в G следует, что $(|G_{\mu-1}/M|, \overline{\Phi}/f_\mu) = 1$. Из 1) и 2) вытекает, что сл. направленность $\overline{\Phi}$ ряда R влечет таковую же для $\overline{\Phi}/f_\mu$ ряда (7). Далее, очевидно, что Δ есть подпоследовательность трассы ряда $G_0/M \supseteq G_1/M \supseteq \ldots \supseteq G_{\beta-1}/M$. Кроме того, трасса ряда, полученного из (7) удалением всех членов вида F_i/G_i, $i = \beta, \ldots, \mu-1$, отличается от трассы ряда R лишь одним индексом $|G_{\mu-1}/M| / |F_\mu/M|$, который, ввиду (4), равен $|G_{\mu-1}| / |G_\mu||M|$. Если еще учесть, что порядок коммутанта G/M есть делитель k, то из всего этого следует, что Δ удовлетворяет всем требованиям теоремы по отношению к $\overline{\Phi}/f_\mu$ ряда (7). Из (6) и инвариантности M в G следует $M \subseteq H_{\beta-1}$. Покажем, что $H_{\beta-1}/M$ будет подх. подгруппой для индексиала Φ/f_μ ряда (7). Так как M инвариантна в G, то из (1) и (6) получаем: при $\beta \leqslant i \leqslant \mu - 1$ $F_i/M = (H_{\beta-1}/M \cap G_{i-1}/M)\, G_i/M$; при $i = \mu$ $MG_\mu/M = (H_{\beta-1}/M \cap G_{\mu-1}/M)\, MG_\mu/M$; при $\mu < i \leqslant \nu$ $MG_i/M = (H_{\beta-1}/M \cap MG_{i-1}/M)\, MG_i/M$. Получено требуемое. Так как, ввиду $f_\mu > 1$, теорема верна для G/M, то G/M имеет подгруппу H/M порядка $\overline{\Delta}\overline{\Phi}/f_\mu$, которая будет $\overline{\Delta}$-расширением $H_{\beta-1}/M$, причем $H/H_{\beta-1}$ будет при $j = 1$ p-н-группой, а при $j = 2$ p-разл. группой. Тогда H порядка $\overline{\Delta}\overline{\Phi}$ будет искомой подгруппой из G. Противоречие.

β) M не инвариантна в G. Из (5) следует, что $G = VG_{\mu-1}$, где V — нормализатор M в G. Отсюда $G = VG_i$, $i = 1, \ldots, \mu - 1$. Согласно (6), M^* инвариантна в $H_{\beta-1}$, т. е. $H_{\beta-1}$ входит в нормализатор V^* подгруппы M^* в G. Далее из (6) следует, что M^* сопряжена с M в F_μ. Отсюда:

$$G = V^*G_i, \quad i = 1, \ldots, \mu - 1. \tag{8}$$

Пусть $\mathbb{W} = \{G_ig \mid g \in V^*\}$. Из (8) следует:

$$\mathbb{W} = G/G_i. \tag{9}$$

Пусть $V_i^* = V^* \cap G_i$, $i = 0, \ldots, \mu$. Рассмотрим ряд:

$$V^* = V_0^* \supseteq V_1^* \supseteq \ldots \supseteq V_{\mu-1}^* \supseteq M^* \supset V_\mu^* = E. \tag{10}$$

Ввиду (8) и (9) на области W можно определить функцию:

$$\varphi_i(G_i g) = V_i^* g, \quad i = 1, \ldots, \mu - 1, \tag{11}$$

которая, как известно (см., например, [10]), является изоморфизмом G/G_i на $V^*_{\beta-1}/V^*_i$, отображающим при $i = 1, \ldots, \mu - 1$ подгруппу G_{i-1}/G_i из G/G_i на V^*_{i-1}/V^*_i из $V^*_{\beta-1}/V^*_i$. Из определения числа μ и сл. направленности G-индексиала $\overline{\Phi}$ ряда R следует $(n_\mu | G_\mu|, \overline{\Phi}/f_\mu) = 1$. Кроме того, M^* инвариантна в V^*. Это и (11) показывают, что для ряда (10) можно составить V^*-индексиал $\overline{\Phi}$. Норм-индекс M^* в ряде (10) делит $n_\mu | G_\mu |$ и потому взаимно прост с $\overline{\Phi}/f_\mu$. Это показывает, что V^*-индексиал $\overline{\Phi}$ ряда (10) слабо направленный. Теперь, применяя опять (11), убеждаемся в существовании для ряда (10) числа $\overline{\Delta\Phi}$, требуемого теоремой вида. Покажем еще, что $H_{\beta-1}$ будет подх. подгруппой для сл. напр. V^*-индексиала $\overline{\Phi}$ ряда (10). Из $H_{\beta-1} \subseteq V^*$ и $V_i^* = V^* \cap G_i$ следует, что:

$$H_{\beta-1} \cap V_i^* = H_{\beta-1} \cap (V^* \cap G_i) = H_{\beta-1} \cap G_i. \tag{12}$$

Далее, если $\beta < \mu$, то из $F_i = (H_{\beta-1} \cap G_{i-1}) G_i$, $i = \beta, \ldots, \mu - 1$, следует, что $F_i/G_i = \{G_i g \mid g \in H_{\beta-1} \cap G_{i-1}\}$. Отсюда при $\beta < \mu$, ввиду (11), $\varphi_i(F_i/G_i) = \{V_i^* g \mid g \in H_{\beta-1} \cap G_{i-1}\}$, $i = \beta, \ldots, \mu - 1$. Но $\varphi_i(F_i/G_i) = F_i^*/V_i^*$, $i = \beta, \ldots, \mu - 1$, где F_i^*/V_i^* уже фактор V^*-индексиала $\overline{\Phi}$ ряда (10). Но тогда, с учетом (12), будет:

$$F_i^* = (H_{\beta-1} \cap G_{i-1}) V_i^* = (H_{\beta-1} \cap V_{i-1}^*) V_i^*, \quad i = \beta, \ldots, \mu - 1 \tag{13}$$

и, кроме того, согласно (6) и (12), будет:

$$F_\mu^* = M^* = (H_{\beta-1} \cap G_{\mu-1}) V_\mu^* = (H_{\beta-1} \cap V_{\mu-1}^*) V_\mu^* \tag{14}$$

(при $\beta = \mu$ останется лишь (14)). Равенства (13) и (14) при $\beta < \mu$ и (14) при $\beta = \mu$ дают требуемое свойство $H_{\beta-1}$. Так как M (а тем самым и M^*) не инвариантна в G, то $|V^*| < |G|$. Поэтому V^* (а тем самым и G) имеет подгруппу H порядка $\overline{\Delta\Phi}$, которая является $\overline{\Delta}$-расширением подгруппы $H_{\beta-1}$, причем $H/H_{\beta-1}$ при $j = 1$ p-н-группа, а при $j = 2$ p-разл. группа. Противоречие. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. К. Чунихина, С. А. Чунихин, О p-разложимых группах, Матем. сб., т. 15 (57), № 2, 1944.
2. С. А. Чунихин, О комплектах неспециальных подгрупп и p-нильпотентности конечных групп, Матем. сб., т. 62 (104), № 1, 1963.
3. С. А. Чунихин, О специальных группах. I, Матем. сб., т. 36, № 2, 1929.
4. С. А. Чунихин, О специальных группах. II, Матем. сб., т. 40, № 1, 1933.
5. С. А. Чунихин, О группах с заданными подгруппами, Матем. сб., 4 (46), № 3, 1938.
6. С. А. Чунихин, О нильпотентных и сверхразрешимых подгруппах конечных групп, ДАН СССР, т. 193, № 6, 1970.
7. С. А. Чунихин, Индексиалы и нормализаторы, ДАН СССР, т. 167, № 3, 1966.
8. С. А. Чунихин, Об индексиалах и нормализаторах, Изв. АН БССР, серия физ.-матем. наук, № 1, 1968.
9. О. Ю. Шмидт, Группы, все подгруппы которых специальные, Матем. сб., т. 31, 1924.
10. С. А. Чунихин, Об одном общем признаке существования подгрупп у конечных групп, Матем. сб., т. 55 (97), № 2, 19[illegible]

Поступила 4.V 1971 г.

Гомельская лаборатория Института математики АН БССР