1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.44

О расширении индексиалов

С. А. Чунихин

§ 1. Основная теорема об индексиалах [1, теорема 6] утверждает, что для каждого индексиала h конечной группы (определение индексиала см. ниже) имеется непустое множество таких натуральных чисел c, что $\pi(c) \subseteq \subseteq \pi(h)$, где $\pi(c)$ и $\pi(h)$ — множества простых делителей соответственно c и h, и ch является порядком подгруппы данной группы (в [1] доказано даже значительно больше). Это и служит средством для обнаружения подгрупп. Так, например, в [2] показано, что эта теорема объединяет 14 ранее известных теорем о существовании подгрупп.

В данной работе предлагается способ нахождения множителя c, более общий чем в [3].

Полученная в § 3 теорема 1 дает в частном случае (см. § 5) значительное обобщение нашей теоремы [4] о существовании подгрупп у π-отделимых групп.

§ 2. Обозначения: G — конечная группа, $|G|$ — ее порядок; E — единичная подгруппа G; инвариантный ряд R — ряд $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_\nu = E$, $\nu > 0$, у которого каждый член — инвариантная подгруппа G; уплотнение его R_f — ряд $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_{\beta-1} \supseteq F_\beta \supseteq G_\beta \supseteq \ldots \supseteq F_\nu \supseteq G_\nu = E$, $1 \leqslant \beta$, при помощи таких подгрупп F_i, $i = \beta, \ldots, \nu$, что каждая F_i есть F_β-у. с. подгруппа (см. ниже P_1); G_{i-1} назовем индексиальным рядом группы G; ${}_{\beta}^{\nu}a(i) = a(\beta)\,a(\beta+1)\ldots a(\nu)$; $|F_i/G_i| = f_i$; произведение ${}_{\beta}^{\nu}|F_i/G_i| = = f_\beta f_{\beta+1} \ldots f_\nu = h$ назовем индексиалом ряда R или группы G и обозначим его через $(h)_R$; подгруппы F_i назовем факториальными (ф-подгруппами) ряда R_f или индексиала $(h)_R$; индексиал $(h)_R$ назовем правильным, если в F_β есть подгруппа H, для которой $F_i = (H \cap G_{i-1})\,G_i$, $i = \beta, \ldots, \nu$; H назовем подходящей подгруппой для $(h)_R$; очевидно, что $|H| = h$; если каждая ф-подгруппа $\widetilde{F}_i$ одного индексиала ${}_{\beta}^{\nu}|\widetilde{F}_i/G_i|$ есть расширение ф-подгруппы F_i другого индексиала ${}_{\beta}^{\nu}|F_j/G_i|$, то первый из них назовем расширением второго; если Γ — конечная последовательность натуральных чисел (подгрупп из G), то $\overline{\Gamma}$ при Γ непустом обозначает произведение всех чисел (всех подгрупп) из Γ, а при Γ пустом пусть $\overline{\Gamma} = 1$ ($\overline{\Gamma} = E$); $H \lhd G$ — H является инвариантной подгруппой G; $\wr$ — противоречие; ▮ — начало доказательства; ▮▮ — конец его; $\{f(x) \mid x \in M\}$ — множество всех $f(x)$, для которых $x \in M$.

§ 3. Введем определение P_1: пусть M, H и F — подгруппы G и $M \subseteq H$. Мы скажем, что M удовлетворяет условию сопряженности (у. с.) в H относительно F или что M есть F-у. с. подгруппа H, если каждая подгруппа из H, сопряженная с M, при помощи некоторого элемента F сопряжена с M уже в H.

Лемма 1. *Пусть* $N \subseteq M \subseteq H$ — *подгруппы* G *и* $H \lhd G$. *Если* N *есть* G-*у. с. подгруппа* M *и* M — G-*у. с. подгруппа* H, *то* N — G-*у. с. подгруппа* H.

▮ Если $a \in G$, то $a^{-1}Na \subseteq a^{-1}Ma \subseteq H$. Но $a^{-1}Ma = b^{-1}Mb$. $b \in H$. Тогда $N^* = ba^{-1}Nab^{-1}$ — подгруппа из M и, по условию $N^* = m^{-1}Nm, m \in M$. Тогда $a^{-1}Na = b^{-1}m^{-1}Nmb$ ▮

Лемма 2 [5]. *Пусть* $N \subseteq M$ — *подгруппы* G. *Если* N *есть* G-*у. с. подгруппа* M, *то и нормализатор* N *в* M — G-*у. с. подгруппа* M.

▮ Пусть N^* — нормализатор N в M и $a^{-1}N^*a \subseteq M, a \in G$. Тогда $a^{-1}Na \Delta \lhd a^{-1}N^*a \subseteq M$. Но $a^{-1}Na = m^{-1}Nm$, $m \in M$. Тогда $m^{-1}N^*m$ — нормализатор $m^{-1}Nm = a^{-1}Na$ в M. Отсюда $a^{-1}N^*a \subseteq m^{-1}N^*m$. Но $|a^{-1}N^*a| = |m^{-1}N^*m|$. Поэтому $a^{-1}N^*a = m^{-1}N^*m$. ▮

Пусть дан некоторый R_l и для каждого $i = \beta, \ldots, \nu$ N_i^0 обозначает нормализатор F_i в G_{i-1}. Пусть в N_i^0 взята некоторая F_β-у. с. подгруппа $M_i^1 \supseteq G_i$ и N_i^1 — ее нормализатор в N_i^0. Пусть, далее, в N_i^1 взята некоторая F_β-у. с. подгруппа $M_i^2 \supseteq G_i$. После некоторого произвольного числа $k_i \geqslant 0$ таких шагов мы придем к F_β-у. с. подгруппе $M_i^{k_i} \supseteq G_i$ подгруппы $N_i^{k_i-1}$, имеющей в $N_i^{k_i-1}$ нормализатор $N_i^{k_i}$. Мы пришли к непустой последовательности подгрупп $\Phi_i = \{F_i = M_i^0, M_i^1, \ldots, M_i^{k_i}\}$. Пусть Γ_i некоторая непустая подпоследовательность из Φ_i с первым членом $M_i^{a_i}$ и последним $M_i^{b_i}$ (не исключено, что $M_i^{a_i} = M_i^{b_i}$). Тогда можно составить подгруппы $\overline{\Gamma}_i$ и $\overline{\Gamma}_i N_i^{b_i}$, $i = \beta, \ldots, \nu$, которые мы назовем к.-подгруппами ряда R (в G_{i-1}), из них $\overline{\Gamma}_i$ — н. к.-подгруппой, а $\overline{\Gamma}_i N^{b_i}$ — в. к.-подгруппой (конструктивные подгруппы — нижняя и верхняя). Мы скажем, что для произвольной к.-подгруппы S_i дано сечение $S_i = A_i B_i$, если имеет место: $\Gamma_i = \Psi_i \cup \Omega_i$, $M_i^{b_i} \in \Omega_i$, $A_i = \overline{\Psi}_i$, $B_i = \overline{\Omega}_i$ или $B_i = \overline{\Omega}_i N_i^{b_i}$ — когда S_i, соответственно, есть н. к.- или в. к.-подгруппа (не исключаются случаи, когда Ψ_i пусто, $\Psi_i \cap \Omega_i$ не пусто, или когда некоторый член Ψ_i следует в Γ_i после некоторого члена Ω_i). Очевидно, что A_i и B_i являются к.-подгруппами ряда R. Назовем A_i — первой, а B_i — второй компонентой к.-подгруппы S_i.

Лемма 3. к.-*подгруппы ряда* R *в* G_{i-1} *являются* F_β-*у. с. подгруппами* G_{i-1}.

▮ При $i = \beta$ лемма 3, ввиду $F_\beta \subseteq G_{\beta-1}$, очевидна. Пусть $1 > \beta$. Из лемм 1 и 2 следует, что каждый элемент Φ_i есть F_β-у. с. подгруппа G_{i-1}. Если все элементы Φ_i инвариантны в G_{i-1}, то в силу того, что каждый из них есть F_β-у. с. подгруппа G_{i-1}, все они инвариантны в F_β. Но тогда $\overline{\Gamma}_i$ и $\overline{\Gamma}_i N_i^{b_i}$ тоже инвариантны в F_β, что и требовалось.

Пусть теперь среди элементов Φ_i имеются неинвариантные в G_{i-1} и пусть M_i^j — тот из них, у которого верхний номер наименьший. Тогда M_i^j — F_β-у. с. подгруппа G_{i-1}, откуда $F_\beta = VG_{i-1}$, где V — нормализатор M_i^j в F_β. Обозначим через $\Gamma_i^{<j}$ и $\Gamma_i^{\geqslant j}$ подпоследовательности всех тех членов Γ_i, верхние номера которых соответственно $< j$ и $\geqslant j$. Очевидно, что $V \cap G_{i-1}$ содержит подгруппу $\overline{\Gamma_i^{\geqslant j}} N_i^{b_i}$, которая, очевидно, будет в. к.-подгруппой V в $V \cap G_{i-1}$. Так как $|V| < |G|$, то, считая G за контрпример наименьшего порядка к доказываемой лемме, видим, что $\overline{\Gamma_i^{\geqslant j}}$ и $\overline{\Gamma_i^{\geqslant j}} N_i^{b_i}$ будут V-у. с. подгруппами $V \cap G_{i-1}$. Но тогда, учитывая $F_\beta = VG_{i-1}$, видим, что они будут и F_β-у. с. подгруппами G_{i-1}. Так как $\overline{\Gamma}_i = \overline{\Gamma_i^{<j}}\, \overline{\Gamma_i^{\geqslant j}}$, где $\Gamma_i^{<j}$ инвариантна в F_β, то получено $\wr$.

Введем определение: систему $\Sigma = \{S_\beta, S_{\beta+1}, \ldots, S_\nu\}$, у которой S_i, $i = \beta, \ldots, \nu$, является к.-подгруппой ряда R, назовем к.-системой (подгрупп) ряда R или группы G. Запись $\Sigma = \{A_\beta B_\beta, A_{\beta+1}, B_{\beta+1}, \ldots, A_\nu B_\nu\}$, в дальнейшем обозначающую, что для каждого члена S_i к.-системы Σ дано сечение $S_i = A_i B_i$, назовем сечением к.-системы Σ. Системы $\Sigma_1 = \{A_\beta, A_{\beta+1}, \ldots, A_\nu\}$ и $\Sigma_2 = \{B_\beta, B_{\beta+1}, \ldots, B_\nu\}$ назовем соответственно первой и второй компонентой к.-системы Σ. Ясно, что Σ_1 и Σ_2 тоже к.-системы. Лемма 3 показывает, что имеем P_2: любая подгруппа каждой из систем Σ, Σ_1 и Σ_2 является ф.-подгруппой ряда R. Введем определение: если для каждого $i = \beta, \ldots, \nu$ из $i > \beta$ и того, что $S_i \in \Sigma$ есть н. к.-подгруппа F_β в G_{i-1} следует, что $(|N_i^{b_i}/M_i^{b_i}|, {}_\beta^{i-1}|S_i/G_i|) = 1$, то данную к.-систему подгрупп Σ назовем слабо направленной к.-системой (сл. напр. к.-системой). Тогда и вторая компонента Σ_2 системы Σ тоже будет сл. напр. к.-системой (обратное неверно).

Из P_2 следует, что ${}_\beta^\nu|A_i/G_i| = h$, ${}_\beta^\nu|S_i/G_i| = ch$ и ${}_\beta^\nu|B_i/G_i| = n$ являются индексиалами $(h)_R$, $(ch)_R$ и $(n)_R$, причем $(ch)_R$ есть расширение $(h)_R$. Справедлива, далее, следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если* $\Sigma = \{A_\beta B_\beta, A_{\beta+1} B_{\beta+1}, \ldots, A_\nu B_\nu\}$ *— любое сечение сл. напр.* к.-*системы* $\Sigma = \{S_\beta, S_{\beta+1}, \ldots, S_\nu\}$, *то*

1) ${}_\beta^\nu|S_i/G_i| = (ch)_R$ *и* ${}_\beta^\nu|B_i/G_i| = (n)_R$ *являются правильными индексиалами;*

2) $(ch)_R$ *имеет подходящую подгруппу H, содержащую некоторую подходящую подгруппу N индексиала* $(n)_R$.

∎ Пусть G — контрпример наименьшего порядка к доказываемой теореме. Тогда имеется такое сечение $\Sigma = \{A_\beta B_\beta, A_{\beta+1} B_{\beta+1}, \ldots, A_\nu B_\nu\}$ сл. напр. к.-системы Σ ряда R группы G, что для него теорема не выполняется. Так как при $G = E$ теорема справедлива, то $|G| > 1$.

Среди членов ряда R, равных E, выберем тот G_λ, у которого номер λ наименьший. Тогда $G_{\lambda-1} \neq E$. Очевидно, что теорема не выполняется и для ряда R': $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_\lambda = E$ и сечения $\Sigma' = \{A_\beta B_\beta, A_{\beta+1} B_{\beta+1}, \ldots$ $\ldots, A_\lambda B_\lambda\}$ его сл. напр. к.-системы Σ'. При $\beta = \lambda$ числа $|A_\lambda B_\lambda/G_\lambda|$ и $|B_\lambda/G_\lambda|$ — правильные индексиалы, и подходящая подгруппа $A_\lambda B_\lambda$ первого содержит подходящую подгруппу B_λ второго. Поэтому верно P_3: $\beta < \lambda$.

1) В ряде $F_\lambda = M_\lambda^0, M_\lambda^1, \ldots, M_\lambda^{k_\lambda}$ имеется не инвариантная в $G_{\lambda-1}$ подгруппа M_λ^j, для которой из $t < j$ следует, что M_λ^t инвариантна в $G_{\lambda-1}$. По лемме 3 M_λ^j есть F_β-у. с. подгруппа $G_{\lambda-1}$, откуда $F_\beta = V_{\beta-1} G_{\lambda-1}$, где $V_{\beta-1}$ — нормализатор M_λ^j в F_β. Отсюда, с учетом P_3, имеем P_4: $F_\beta = V_{\beta-1} G_i$, $i = \beta, \ldots, \lambda - 1$. Пусть $V_i = V_{\beta-1} \cap G_i$, $i = \beta - 1, \ldots, \lambda$. Тогда ряд S: $V_{\beta-1} \supseteq V_\beta \supseteq \ldots \supseteq V_\lambda = E$ будет инвариантным рядом $V_{\beta-1}$. Согласно P_4 имеется изоморфизм φ_i, $i = \beta, \ldots, \lambda - 1$, группы F_β/G_i на $V_{\beta-1}/V_i$, который при $\beta < \lambda - 1$ и $i > \beta$ переводит подгруппу G_{i-1}/G_i из F_β/G_i в подгруппу V_{i-1}/V_i из $V_{\beta-1}/V_i$. Отсюда следует P_5: если при $i = \beta, \beta + 1, \ldots, \lambda - 1$ $\varphi_i(A_i/G_i) = \widetilde{A}_i/V_i$ и $\varphi_i(B_i/G_i) = \widetilde{B}_i/V_i$, то $\varphi_i(A_i B_i/G_i) = \widetilde{A}_i \widetilde{B}_i/V_i$ и $\widetilde{A}_i \widetilde{B}_i$ будет сечение к-подгруппы $\widetilde{A}_i \widetilde{B}_i$ ряда S. Очевидно, что при $j \leqslant a_\lambda$ $S_\lambda = A_\lambda B_\lambda \subseteq$ $\subseteq M_\lambda^j M_\lambda^{j+1} \ldots M_\lambda^{k_\lambda} N_\lambda^{k_\lambda} \subseteq V_{\lambda-1}$. Отсюда, учитывая P_5 и определение S_λ, получаем: при $j \leqslant a_\lambda$ ряд S имеет сл. напр. к.-систему $\{\widetilde{A}_\beta \widetilde{B}_\beta, \widetilde{A}_{\beta+1} \widetilde{B}_{\beta+1}, \ldots$

$\ldots, \widetilde{A}_{\lambda-1}\widetilde{B}_{\lambda-1}, A_\lambda B_\lambda\}$; при $a_\lambda < j \leqslant k_\lambda$ ряд S имеет сл. напр. к.-систему $\{\widetilde{A}_\beta\widetilde{B}_\beta, \widetilde{A}_{\beta+1}\widetilde{B}_{\beta+1}, \ldots, \widetilde{A}_{\lambda-1}\widetilde{B}_{\lambda-1}, A^*_\lambda B^*_\lambda\}$, где $A^*_\lambda = \overline{\Psi^{\geqslant j}_\lambda}$, $B^*_\lambda = \overline{\Omega^{\geqslant j}_\lambda}$, если S_λ есть н. к.-подгруппа и $B^*_\lambda = \overline{\Omega^{\geqslant j}_\lambda N^{b_\lambda}_\lambda}$, если S_λ — в. к.-подгруппа.

Так как $|V_{\beta-1}| < |F_\beta| \leqslant |G|$, то теорема верна для указанных выше к.-систем ряда S. Отсюда, учитывая P_5 и равенство порядков изоморфных подгрупп из P_5, получаем:

1.1) если $j \leqslant a_\lambda$, то ${}^{\lambda-1}_{\beta}|\widetilde{A}_i\widetilde{B}_i/V_i|\cdot|A_\lambda B_\lambda/G_\lambda| = ch$ и ${}^{\lambda-1}_{\beta}|\widetilde{B}_i/V_i|\cdot|B_\lambda/G_\lambda| = n$; к тому же ch и n являются правильными индексиалами $(ch)_S$ и $(n)_S$, причем первый из них имеет подходящую подгруппу H, содержащую некоторую подходящую подгруппу N второго.

Согласно P_2 ${}^{\lambda}_{\beta}|S_i/G_i| = ch$ и ${}^{\lambda}_{\beta}|B_i/G_i| = n$ являются индексиалами ряда R'. Покажем, что H и N будут соответственно подходящими подгруппами для $(ch)_{R'}$ и $(n)_{R'}$. Определение H и $V_i = V_{\beta-1} \cap G_i$ дают: $H \subseteq V_{\beta-1} \subseteq F_\beta$ и $H \cap V_i = H \cap (V_{\beta-1} \cap G_i)$, т. е. имеем P_6: $H \cap V_i = H \cap G_i$, $i = \beta-1, \ldots, \lambda$. Далее, по определению H, имеем P_7: $\widetilde{A}_i\widetilde{B}_i = (H \cap V_{i-1})V_i$, $i = \beta, \ldots, \lambda-1$. Как известно, $\varphi_1^{-1}(V_ia) = G_ia$, $a \in V_{\beta-1}$, $i = \beta, \ldots, \lambda-1$. Пусть $W = \{V_ia \mid a \in H \cap V_{i-1}\}$. Согласно P_7 $W = \widetilde{A}_i\widetilde{B}_i/V_i$. Отсюда, учитывая значение W, имеем:

$$\varphi_i^{-1}(W) = \varphi_i^{-1}(\widetilde{A}_i\widetilde{B}_i/V_i) = A_iB_i/G_i = \{G_ia \mid a \in H \cap V_{i-1}\},\ i = \beta, \ldots, \lambda-1.$$

Тогда, переходя к элементам G, получаем $A_iB_i = (H \cap V_{i-1})G_i$. Отсюда, ввиду P_6, следует P_8: $A_iB_i = (H \cap G_{i-1})G_i$, $i = \beta, \ldots, \lambda-1$. Кроме того, по определению H, имеем $A_\lambda B_\lambda = (H \cap V_{\lambda-1})V_\lambda$. Отсюда, ввиду P_6, $A_\lambda B_\lambda = (H \cap G_{\lambda-1})G_\lambda$. Это и P_8 дают требуемое свойство H. (Аналогично рассуждаем и относительно N.) ≀;

1.2) если $a_\lambda < j \leqslant k_\lambda$, то ${}^{\lambda-1}_{\beta}|\widetilde{A}_i\widetilde{B}_i/V_i|\cdot|A^*_\lambda B^*_\lambda/G_\lambda| = ch/f^*_\lambda$, где $f^*_\lambda = |\overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}|/|\overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda} \cap A^*_\lambda B^*_\lambda|$ и ${}^{\lambda-1}_{\beta}|\widetilde{B}_i/V_i|\cdot|B^*_\lambda/G_\lambda| = n/n^*_\lambda$, где $n^*_\lambda = |\overline{\Omega^{<j}_\lambda}|/|\overline{\Omega^{<j}_\lambda} \cap B^*_\lambda|$; к тому же ch/f^*_λ и n/n_λ являются правильными индексиалами $(ch/f^*_\lambda)_S$ и $(n/n^*_\lambda)_S$, причем первый из них имеет подходящую подгруппу H_1, содержащую некоторую подходящую подгруппу N_1 второго. Далее, как и в 1.1), показываем, что $ch/f^*_\lambda = {}^{\lambda-1}_{\beta}|S_i/G_i|\cdot|A^*_\lambda B^*_\lambda/G_\lambda|$ и $n/n^*_\lambda = {}^{\lambda-1}_{\beta}|B_i/G_i|\cdot|B^*_\lambda/G_\lambda|$ будут правильными индексиалами ряда R' с подходящими подгруппами H_1 и N_1 соответственно. Отсюда, учитывая, что при $a_\lambda < j \leqslant k_\lambda$ подгруппы M^t_λ, $t = 0, \ldots, j-1$, как F_β-у. с. подгруппы $G_{\lambda-1}$, будут инвариантны в F_β, следует, что $\overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}A^*_\lambda B^*_\lambda = A_\lambda B_\lambda$ — F_β-у. с. подгруппа $G_{\lambda-1}$. Тогда ${}^{\lambda}_{\beta}|S_i/G_i| = ch$ есть индексиал $(ch)_{R'}$. Покажем, что $H = H_1\overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}$ является подходящей подгруппой для $(ch)_{R'}$. Учитывая определение H_1, при $i = \beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$ имеем:

$$(H \cap G_{i-1})G_i = \overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}(H_1 \cap G_{i-1})G_i = (H_1 \cap G_{i-1})G_i = S_i.$$

Кроме того,

$$(H \cap G_{\lambda-1})G_\lambda = \overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}(H_1 \cap G_{\lambda-1})G_\lambda = \overline{\Psi^{<j}_\lambda}\,\overline{\Omega^{<j}_\lambda}A^*_\lambda B^*_\lambda = A_\lambda B_\lambda = S_\lambda.$$

Аналогично рассуждаем относительно $N = N_1\overline{\Omega^{<j}_\lambda}$. ≀.

2) В ряде $F_\lambda = M_\lambda^0, M_\lambda^1, \ldots, M_\lambda^{k_\lambda}$ все подгруппы инвариантны в $G_{\lambda-1}$. Тогда они как F_β-у. с. подгруппы $G_{\lambda-1}$ инвариантны в F_β. Тогда и S_λ инвариантны в F_β.

2. 1) $S_\lambda = E$. Прямая проверка показывает, что ряд T: $F_\beta/G_{\lambda-1} \supseteq \supseteq G_\beta/G_{\lambda-1} \supseteq \ldots \supseteq G_{\lambda-1}/G_{\lambda-1}$ имеет сл. напр. к-систему $\{S_\beta/G_{\lambda-1}, \ldots, S_{\lambda-1}/G_{\lambda-1}\}$, имеющую сечение $\{(A_\beta/G_{\lambda-1})(B_\beta/G_{\lambda-1}), \ldots, (A_{\lambda-1}/G_{\lambda-1})(B_{\lambda-1}/G_{\lambda-1})\}$. Так как $|F_\beta/G_{\lambda-1}| < |F_\beta| \leqslant |G|$, то теорема верна для указанных сл. напр. к-системы и ее сечения. Отсюда, учитывая равенство порядков изоморфных подгрупп, заключаем, что ${}_\beta^{\lambda-1}|\dot{A_i}\dot{B_i}/\dot{G_i}| = ch$; ${}_\beta^{\lambda-1}|\dot{B_i}/\dot{G_i}| = n$, где $\dot{A_i} = A_i/G_{\lambda-1}$, $\dot{B_i} = B_i/G_{\lambda-1}$ и $\dot{G_i} = G_i/G_{\lambda-1}$, и что верно P_9: произведения ch и n являются правильными индексиалами $(ch)_T$ и $(n)_T$, причем первый из них имеет подходящую подгруппу $H_1/G_{\lambda-1}$, содержащую некоторую подходящую подгруппу $N_1/G_{\lambda-1}$ второго.

Согласно P_2 ${}_\beta^\lambda|S_i/G_i| = ch$ и ${}_\beta^\lambda|B_i/G_i| = n$ являются индексиалами $(ch)_{R'}$ и $(n)_{R'}$. Далее, по условию, $M_\lambda^{b_\lambda} \subseteq S_\lambda = E$, отсюда $M_\lambda^{b_\lambda} = E$. Поэтому $N_\lambda^{b_\lambda} = G_{\lambda-1} \neq E$. Это значит, что $S_\lambda = E$ — н. к.-подгруппа ряда R. Отсюда с учетом того, что $\{S_\beta, S_{\beta+1}, \ldots, S_\lambda\}$ есть сл. напр. к-система ряда R' следует, что $(|G_{\lambda-1}|, ch) = 1$. Отсюда следует P_{10}: $H_1 = HG_{\lambda-1}$, $|H| = ch$, $(|H|, |G_{\lambda-1}|) = 1$. Но $H_1 \supseteq N_1 \supseteq G_{\lambda-1}$. Поэтому с учетом P_{10} получаем $H_1 = HN_1$ и $|HN_1| = |HG_{\lambda-1}|$. Отсюда, используя опять P_{10} и $|N_1/G_{\lambda-1}| = n$, получаем $P_{11}: H \cap N_1 = N$, где $|N| = n$. Так как n делит очевидно ch, то с учетом P_{10} видим, что верно P_{12}: $(n, |G_{\lambda-1}|) = 1$. Отсюда следует $P_{13}: N_1 = NG_{\lambda-1}$. Докажем, что H будет подходящей подгруппой для $(ch)_{R'}$. Из определения подходящей подгруппы и P_9 следует: $S_i = (H_1 \cap G_{i-1})G_i$, $i = \beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$, или с учетом P_{10} $S_i = (HG_{\lambda-1} \cap G_{i-1})G_i = (H \cap G_{i-1})G_i$. Кроме того, учитывая опять P_{10}, имеем: $E = S_\lambda = (H \cap G_{\lambda-1})G_\lambda$. Требуемое получено. Покажем, что N из P_{11} — подходящая подгруппа для $(n)_{R'}$. Из определения подходящей подгруппы и P_{13} следует: $B_i = (N_1 \cap G_{i-1})G_i = (NG_{\lambda-1} \cap \cap G_{i-1})G_i = (N \cap G_{i-1})G_i$, $i = \beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$. Кроме того, с учетом P_{12} $E = S_\lambda = (N \cap G_{\lambda-1})G_\lambda$. Требуемое получено. К тому же $N = H \cap N_1 \subseteq H$. Получено $\wr$.

2. 2) $S_\lambda \neq E$. Как и в 2. 1), убеждаемся, что ряд $T': F_\beta/S_\lambda \supseteq G_\beta/S_\lambda \supseteq \supseteq \ldots \supseteq G_{\lambda-1}/S_\lambda \supseteq S_\lambda/S_\lambda$ имеет сл. напр. к-систему $\{S_\beta/S_\lambda, \ldots, S_{\lambda-1}/S_\lambda, S_\lambda/S_\lambda\}$, имеющую сечение $\{(A_\beta/S_\lambda)(B_\beta/S_\lambda), \ldots, (A_{\lambda-1}/S_\lambda)(B_{\lambda-1}/S_\lambda), (S_\lambda/S_\lambda)(S_\lambda/S_\lambda)\}$. Так как $|F_\beta/S_\lambda| < |F_\beta| \leqslant |G|$, то теорема верна для указанных сл. напр. к-системы и ее сечения. Отсюда, как и в 2. 1), заключаем, что

$${}_\beta^{\lambda-1}|\dot{A_i}\dot{B_i}/\dot{G_i}| \cdot |\dot{S_\lambda}/\dot{S_\lambda}| = ch/|S_\lambda|;\ {}_\beta^{\lambda-1}|\dot{B_i}/\dot{G_i}| \cdot |\dot{S_\lambda}/\dot{S_\lambda}| = n/|S_\lambda|,$$

где $\dot{A_i} = A_i/S_\lambda$, $\dot{B_i} = B_i/S_\lambda$ и $\dot{S_\lambda} = S_\lambda/S_\lambda$, и что верно P_{14}: произведения $ch/|S_\lambda|$ и $n/|S_\lambda|$ являются правильными индексиалами $(ch/|S_\lambda|)_{T'}$ и $(n/|S_\lambda|)_{T'}$, причем первый из них имеет подходящую подгруппу H/S_λ, содержащую некоторую подходящую подгруппу N/S_λ второго.

Согласно P_2 ${}_\beta^\lambda|S_i/G_i| = ch$ и ${}_\beta^\lambda|B_i/G_i| = n$ являются индексиалами $(ch)_{R'}$ и $(n)_{R'}$. Докажем, что H — подходящая подгруппа для $(ch)_{R'}$. Из определения подходящей подгруппы, P_{14} и $S_\lambda \subseteq H$ следует: при $i = \beta, \beta+1, \ldots, \lambda-1$ будет $A_iB_i = (H \cap G_{i-1})G_i$ и, кроме того, с учетом $S_\lambda \subseteq H \cap \cap G_{\lambda-1}$ будет $S_\lambda = (H \cap G_{\lambda-1})S_\lambda = (H \cap G_{\lambda-1})G_\lambda$. Получили требуемое. Покажем, что N — подходящая подгруппа для $(n)_{R'}$. Из определения под-

ходящей подгруппы, P_{14} и $S_\lambda \subseteq N$ следует: $B_i = (N \cap G_{i-1}) G_i$, $i = \beta, \beta+1, \ldots$
$\ldots, \lambda - 1$. Кроме того, с учетом $S_\lambda \subseteq N \cap G_{\lambda-1}$ будет $S_\lambda = (N \cap G_{\lambda-1}) S_\lambda =$
$= (N \cap G_{\lambda-1}) G_\lambda$. Требуемое получено. К тому же $H \supseteq N$. ■

§ 4. Очевидно, что предложенный нами в [3] способ получения н. к. является частным случаем процесса получения к.-подгруппы. Теорема 8 из [3] также является частным случаем доказанной выше теоремы.

§ 5. Положим в теореме 1 Ψ_i пустым, $a_i = b_i$; и S_i/G_i — силовской подгруппе из $N_i^{b_i-1}/G_i$, $i = \beta, \beta+1, \ldots, \nu$. Тогда $h = 1$ и такую сл. напр. к-систему подгрупп $\{S_\beta, S_{\beta+1}, \ldots, S_\nu\}$ ряда R назовем отделимой системой подгрупп группы G. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $\{S_\beta, S_{\beta+1}, \ldots, S_\nu\}$ — *отделимая система подгрупп группы* G, *то* $\prod_\beta^\nu |S_i/G_i| = c$ *является правильным индексиалом и, следовательно,* G *имеет разрешимую подгруппу порядка* c (*разрешимость здесь есть следствие теоремы* 2 *из* [1]).

Очевидно, частным случаем теоремы 2 является наша теорема о существовании подгрупп у π-отделимых групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чунихин, Об одном общем признаке существования подгрупп у конечных групп, Матем. сб., т. 55(97), № 2, 1961.
2. С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, «Наука и техника», Минск, 1964.
3. С. А. Чунихин, О конструировании подгрупп у конечных групп, ДАН СССР, т. 177, № 5, 1967.
4. С. А. Чунихин, О π-отделимых группах, ДАН СССР, т. 59, № 3, 1948.
5. С. А. Чунихин, Об индексиалах и нормализаторах, Изв. АН БССР, серия физ.-матем. наук, № 1, 1968.

Поступила 4.V 1971 г.

Гомельская лаборатория Института математики АН БССР