1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.44

Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп

Л. А. Шеметков

Введение

Пусть задана некоторая нормальная подгруппа K группы G. Когда в G имеется по крайней мере одно дополнение к K? Эта задача о существовании дополнений рассматривалась во многих работах (см. обзор [1]). В работах [2, 3] было замечено, что при ее изучении полезно использовать так называемые добавления — наименьшие (по вложению) подгруппы, порождающие с K группу G. Другой прием, использованный в [3], состоял во введении понятия П-дополнения (см. определение в § 1), совпадающего с понятием дополнения, когда П—множество всех простых чисел. При разыскании П-дополнений имеется возможность вести доказательство не только индукцией по порядку группы, но и индукцией по числу элементов из П, делящих порядок группы.

Можно также использовать следующий принцип, навеянный работой Г. Виландта [4]. Если множество П разбить на непересекающиеся подмножества $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_t$, то П-дополняемые подгруппы, очевидно, имеет смысл искать среди тех нормальных подгрупп, которые Π_i-дополняемы для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Следуя этой идее, доказываем теорему 2.1, обобщающую основной результат работы [3]. Отметим также полученную нами теорему 2.6, устраняющую условие разрешимости из одной теоремы Ф. Холла (см. [1, стр. 272]).

В § 3 устанавливается связь задачи о дополнениях со следующей *задачей о коммутативных треугольниках*. Пусть даны три группы A, B, C и гомоморфизмы $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$. В каких случаях существует гомоморфизм $\gamma : A \to B$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна? Доказанная нами теорема 3.3 сводит эту задачу к аналогичной задаче для силовских подгрупп из A при условии абелевости некоторых силовских подгрупп из $\operatorname{Ker} \beta$. Обратим внимание на некоторое сходство теоремы 3.3 с теоремой 2 из [3].

Приложениям теорем о коммутативных треугольниках к исследованию свойств добавлений и более широкого семейства П-добавлений посвящен § 4. Из полученных в нем результатов вытекают некоторые теоремы, опубликованные ранее без доказательства в работе [2].

§ 1. Основные понятия. Леммы

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы будем использовать общепринятые обозначения и определения; их перечень приведен в обзоре [5] (см. также [6]). Напомним только, что через Π обозначается некоторое множество простых чисел, через Π' — дополнение к Π во множестве всех простых чисел; p — простое число; $O^{\Pi}(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми ее Π'-элементами.

Добавлением к нормальной подгруппе K группы G мы назвали в [2] такую подгруппу H из G, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H. В частности, если $K = G$, то $H = 1$. Дополнение M к подгруппе K определяется условиями $MK = G$, $M \cap K = 1$ и, следовательно, является добавлением. Отметим, что каждая нормальная подгруппа обладает добавлениями.

Другое определение добавления дает следующая очень простая лемма.

Лемма 1.1. *Подгруппа H тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

Доказательство. Пусть подгруппа H удовлетворяет условию леммы, но не является добавлением. Тогда в H имеется собственная подгруппа H_1 с условием $H_1K = G$. Но тогда $H_1(H \cap K) = H \cap H_1K = H$. Отсюда, ввиду $H \cap K \subseteq \Phi(H)$, получаем $H_1 = H$. Противоречие.

Обратно, пусть H — добавление к K в G. Если $H \cap K$ не входит в $\Phi(H)$, то H обладает максимальной подгруппой M, не содержащей $H \cap K$. Поэтому $H = M(H \cap K)$, а значит, $HK = MK = G$, что противоречит определению добавления.

Лемма 1.2. *Пусть H — добавление к нормальной подгруппе K группы G. Тогда множества простых делителей порядков групп H и G/K совпадают.*

Доказательство следует из леммы 1.1 и хорошо известного факта о том, что подгруппа Фраттини не содержит силовских подгрупп $\neq 1$ группы.

Пусть Π — некоторое множество простых чисел. Скажем, что подгруппа N группы G обладает Π-*дополнением* H в G, если $HN = G$ и $|H \cap N|$ не делится на числа из Π; подгруппу H с этим свойством будем называть Π-дополнением для N в G. Ясно, что Π-дополнение является ω-дополнением для любого подмножества ω из Π. Если Π — множество всех простых чисел, то понятия Π-дополнения и дополнения совпадают.

Ввиду леммы 1.1 естественно ввести следующее определение. Π-*добавлением* к нормальной подгруппе K группы G назовем подгруппу H, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $HK = G$;
2) $H \cap K$ обладает нормальной $S_{\Pi'}$-подгруппой R;
3) $H \cap K/R$ содержится в $\Phi(H/R)$.

Очевидно, каждое добавление к K является также Π-добавлением для любого множества простых чисел Π. Понятия Π-добавления и добавления совпадают, если Π — множество всех простых чисел.

Лемма 1.3. *Π-добавление к нормальной подгруппе K группы G является также ω-добавлением для любого подмножества ω из Π.*

Доказательство. Пусть H — Π-добавление к нормальной подгруппе K группы G и ω — любое подмножество из Π. Пусть $H \cap K = H_1$; R и R_1 — соответственно $S_{\Pi'}$- и $S_{\omega'}$-подгруппа из H_1. Очевидно, $R_1 \supseteq R$. Пусть $H/R = \overline{H}$, $H_1/R = \overline{H}_1$, $R_1/R = \overline{R}_1$. По условию, $\overline{H}_1 \subseteq \Phi(\overline{H})$. Так как $\overline{R}_1$ входит в $\overline{H}_1$ и нормальна в $\overline{H}$ то $\overline{H}_1/\overline{R}_1$ содержится в $\Phi(\overline{H}/\overline{R}_1)$. Хорошо известно что существует изоморфизм δ, переводящий $\overline{H}/\overline{R}_1$ в H/R_1, а $\overline{H}_1/\overline{R}_1$ в H_1/R_1 (см. [7, лемма 3.6.2]). Поэтому H_1/R_1 содержится в $\Phi(H/R_1)$. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и A — такая подгруппа из G, что $AK = G$. Тогда любое Π-добавление к $A \cap K$ в A является Π-добавлением к K в группе G. В частности, любое добавление к $A \cap K$ в A является добавлением к K в G.*

Доказательство. Пусть H — Π-добавление к $A \cap K$ в A. Так как $H(A \cap K) = A$ и $AK = G$, то $HK = G$. Кроме того, $H \cap (A \cap K) = H \cap K$. Поэтому ясно, что H — Π-добавление к K в G.

Очевидно, справедлива и следующая лемма.

Лемма 1.5. *Пусть K — нормальная подгруппа группы G и A — такая подгруппа из G, что $AK = G$. Тогда любое Π-дополнение к $A \cap K$ в A является Π-дополнением к K в группе G. В частности, любое дополнение к $A \cap K$ в A является дополнением к K в G.*

Лемма 1.6. *Пусть группа G для некоторого простого p имеет абелеву силовскую p-подгруппу. Тогда G обладает характеристической подгруппой R со следующими свойствами:*

а) *R не имеет композиционных факторов порядка p;*

б) *G/R обладает нормальной силовской p-подгруппой.*

Доказательство. По теореме 3.3 [8] G имеет такую нормальную подгруппу N, что G/N p-разрешима, а N не имеет композиционных факторов порядка p. По теореме Ф. Холла и Г. Хигмэна [6, стр. 691] группа $\overline{G} = G/N$ имеет такую нормальную p'-подгруппу $\overline{S} = S/N$, что $\overline{G}/\overline{S} \cong G/S$ обладает нормальной силовской p-подгруппой. Произведение всех подгрупп вида S^{α}, $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$, будет искомой характеристической подгруппой группы G.

§ 2. Существование Π-дополнений и дополнений

Напомним, что через G_p обозначается некоторая силовская p-подгруппа группы G.

Теорема 2.1. *Пусть $\Pi = \sigma \cup \tau$. Нормальная подгруппа K группы G обладает Π-дополнением в G, если выполняются следующие условия:*

а) *любое добавление к K в G является σ-дополнением;*

б) *для любого $p \in \tau$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема не выполняется. Выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок. Существует, следовательно, множество Π, являющееся суммой двух своих подмножеств σ и τ, нормальная подгруппа K группы G, относительно которых выполняется условие теоремы, но не ее утверждение.

Возьмем теперь наименьшее подмножество ω из Π, содержащее σ и такое, что K не обладает ω-дополнением в G. Другими словами, выбираем такое подмножество ω множества Π, для которого выполняются следующие условия: 1) $\omega \supseteq \sigma$; 2) подгруппа K обладает ω_1-дополнением в G для любого подмножества ω_1 из ω такого, что $\omega_1 \supseteq \sigma$ и $\omega_1 \neq \omega$; 3) не существует ни одного ω-дополнения к подгруппе K в группе G. Множество ω не пусто, так как в случае пустого ω группа G является ω-дополнением для K. Кроме того, $\omega \setminus \sigma$ содержит по крайней мере один простой делитель порядка K, так как в противном случае любое σ-дополнение к K, существующее по условию, было бы одновременно и ω-дополнением.

Пусть p — некоторый элемент из $\omega \setminus \sigma$, делящий $|K|$. Пусть $\omega_1 = \omega \setminus \{p\}$. Тогда K обладает ω_1-дополнением H в группе G.

Так как $HK = G$, то в H содержится некоторое добавление M к подгруппе K. По лемме 1.1 $M \cap K$ лежит в подгруппе Фраттини $\Phi(M)$, а потому нильпотентна. Так как $M \cap K$ входит в $H \cap K$, а H является ω_1-дополнением для K, то и M является ω_1-дополнением для K в G. Заметим также, что p делит $|M \cap K|$, так как K не обладает ω-дополнениями.

Так как $MK=G$, то по теореме VI. 4. 7 [6] найдутся такие силовские p-подгруппы M_p, P и G_p соответственно из M, K и G, что

$$M_pP=G_p. \tag{2.1}$$

Обозначим через P_1 пересечение $M_p \cap K$. Очевидны следующие равенства:

$$P_1=M_p \cap (M \cap K)=M_p \cap K=M_p \cap G_p \cap K=M_p \cap P. \tag{2.2}$$

Так как $M \cap K$ нормальна в M, то из (2.2) вытекает, что P_1 является силовской p-подгруппой в $M \cap K$ (см. [6, лемма I.7.7]). Порядок $M \cap K$ делится на p, поэтому P_1 отлична от единицы. Рассмотрим нормализатор N подгруппы P_1 в группе G.

Предположим сначала, что $N \neq G$. Так как $M \cap K$ нильпотентна и нормальна в M, то N содержит подгруппу M. Так как P по условию абелева и согласно (2.2) содержит P_1, то $P \subseteq N$. Учитывая (2.1), получаем теперь, что $G_p=M_pP$ содержится в N.

Покажем, что условия теоремы выполняются для N и ее нормальной подгруппы $N \cap K$. Пусть A — добавление к $N \cap K$ в N. По лемме 1.4 A — добавление к K в G. Согласно условию A является σ-дополнением для K. Так как $A \cap K=A \cap (N \cap K)$, то ясно, что A является также σ-дополнением для $N \cap K$ в N. Проверим теперь выполнимость условия б) теоремы 2. 1. Так как $G_p=M_pP$ входит в N, причем $P=G_p \cap K=G_p \cap (N \cap K)$, то ввиду условия P абелева и обладает дополнением в G_p. Пусть $q \in \omega \setminus \sigma$, $q \neq p$. Так как $M(N \cap K)=N$, то по лемме VI.4.7 [6] существуют такие силовские подгруппы M_q и N_q соответственно из M и N, что $N_q=M_qQ$, где $Q=N_q \cap (N \cap K)=N_q \cap K$ есть силовская q-подгруппа из $N \cap K$. Пересечение $M_q \cap Q$ равно единице, так как $M_q \cap Q$ содержится в $M \cap K$, порядок которой не делится на q. Таким образом, $N_q \cap (N \cap K)$ абелева и дополняема в N_q. Так как $N \neq G$, то для N теорема верна, т. е. $N \cap K$ обладает ω-дополнением в N, являющимся ввиду леммы 1. 5 ω-дополнением для K в G. Противоречие.

Предположим теперь, что $N=G$, т. е. подгруппа P_1 является нормальной в G. По лемме 1. 6 K обладает характеристической подгруппой R со следующими свойствами: а) PR/R является нормальной силовской p-подгруппой группы K/R (здесь мы применяем еще лемму I.7.7 из [6]); б) R не имеет композиционных факторов порядка p. По условию, имеет место факторизация $G_p=P\overline{P}$, $P \cap \overline{P}=1$. Так как $G_p \cap K=P$ есть силовская подгруппа в K, то $\overline{P} \cap K=1$, а значит:

$$\overline{P}R/R \cap PR/R=(\overline{P}R \cap PR)/R=R(\overline{P} \cap PR)/R=R/R.$$

Таким образом, $\overline{P}R/R$ является дополнением к PR/R в силовской p-подгруппе G_pR/R группы MPR/R. По теореме Гашюца [6, стр. 121] существует дополнение U/R к подгруппе PR/R в группе MPR/R. Отсюда

$$UPR=MPR,\ U \cap PR=R. \tag{2.3}$$

Так как $P_1 \subseteq K$ и R не имеет композиционных факторов порядка p, то $P_1 \cap R=1$, а значит $PR \neq R$. Поэтому, учитывая (2. 3), получаем

$$U \neq G,\ UK=G. \tag{2.4}$$

Из (2. 3) и из того, что $M \cap PR$ входит в $M \cap K$, являющуюся ω_1'-группой, вытекает еще следующее соотношение:

$$|U|_{\omega_1} = |M|_{\omega_1} |R|_{\omega_1} = |MPR|_{\omega_1}. \tag{2.5}$$

(Напомним, что через $|X|_\Pi$ обозначают наибольший П-делитель порядка группы X.) Согласно (2. 4) $|U| = |G:K||U \cap K|$. Отсюда, учитывая (2.5) и то, что $|M|_{\omega_1} = |G/K|_{\omega_1}$, получаем равенство

$$|U \cap K|_{\omega_1} = |R|_{\omega_1}. \tag{2.6}$$

Пусть P_2 — силовская p-подгруппа из $U \cap K$. Так как $P_2 \subseteq PR$ (напомним, что PR нормальна в K и содержит ее силовскую подгруппу P), то ввиду (2. 3) $P_2 \subseteq R$, а значит:

$$|U \cap K|_p = |R|_p. \tag{2.7}$$

Применяя полученные сведения о подгруппе U, покажем, что U и ее нормальная подгруппа $U \cap K$ удовлетворяют условию теоремы. Если A — добавление к $U \cap K$ в U, то из условия теоремы и леммы 1.4 вытекает, что $|A \cap K|$ не делится на числа из σ. Отсюда, учитывая равенство $A \cap K = A \cap (U \cap K)$, получаем, что A — σ-дополнение для $U \cap K$ в U.

Пусть $q \in \omega_1 \setminus \sigma$. Согласно теореме VI. 4.7 [6] существуют силовские q-подгруппы M_q и Q_1 из M и PR такие, что $Q = M_q Q_1$ — силовская q-подгруппа из MPR. Так как P — p-группа и $p \neq q$, то $Q_1 \subseteq R$. Учитывая, что $|M \cap K|$ не делится на q, получаем, что $M_q \cap Q_1 = 1$. Ввиду (2. 5), силовские q-подгруппы в U и MPR имеют одинаковые порядки, поэтому $Q^x \subseteq U$ для некоторого $x \in MPR$. Так как согласно (2. 6) Q_1 есть силовская подгруппа как в R, так и в $U \cap K$, то $Q \cap R = Q \cap K = Q_1$. Отсюда $Q^x \cap (U \cap K) = Q^x \cap K = Q_1^x$. Таким образом, получается, что силовская q-подгруппа из $U \cap K$ абелева и дополняема в ее содержащей силовской q-подгруппе из U.

Ввиду (2. 7) и отмеченного выше свойства R, проходящий через R композиционный ряд группы $U \cap K$ не имеет факторов порядка p. Поэтому $U \cap K = O^p(U \cap K)$, причем, как мы знаем, силовская p-подгруппа из $U \cap K$ абелева. Следовательно, ввиду теорем IV. 3. 8 и VI. 4. 7 [6] силовская p-подгруппа из $U \cap K$ дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из U.

Итак, условие теоремы для U и ее нормальной подгруппы $U \cap K$ выполняется. Так как по (2.4) $|U| < |G|$, то для U теорема верна. Значит, $U \cap K$ обладает ω-дополнением L в группе U. По лемме 1. 5 подгруппа L является ω-дополнением к K в G. Снова пришли к противоречию.

Теорема 2.1 полностью доказана.

В случае, когда множество σ пусто, теорема 2.1 была доказана в [3]. В дальнейшем нам потребуется следующий частный случай теоремы 2.1, также полученный в [3].

Теорема 2.2. *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G:K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Доказательство. *Пусть* П — множество всех простых чисел, σ — множество всех тех простых q, которые делят $|G|$, но не делят $|G:K|$. По лемме 1.2 каждое добавление к K в G является σ-дополнением. Теперь применяем теорему 2.1.

Покажем, что условие теоремы Ф. Холла (см. [1. стр. 272]) может быть значительно ослаблено. Нам потребуются некоторые дополнительные определения. A_Π-группой будем называть группу, у которой для любого $p \in \Pi$ силовская p-подгруппа является абелевой. A-группа — это группа (необязательно разрешимая), у которой все силовские подгруппы абелевы (здесь мы немного расходимся с [6], где в определение A-группы включена разрешимость). П-коммутантом группы G будем называть пересечение всех тех ее нормальных подгрупп, фактор-группы по которым являются абелевыми П-группами.

Теорема 2.3. *Пусть нормальная подгруппа K группы G является A_{Π}-группой. Тогда П-коммутант группы K обладает П-дополнением в G.*

Доказательство. Пусть R — П-коммутант группы K, S — пересечение всех тех нормальных подгрупп N из K, для которых K/N есть разрешимая П-группа. Ясно, что S характеристична в K и не имеет нетривиальных p-фактор-групп ни при каком $p \in \Pi$. Поэтому, согласно теоремам IV.3.8 и VI.4.7 [6], $G_p \cap S$ имеет дополнение в G_p при любом $p \in \Pi$. Полагая $\sigma = \varnothing$ и применяя теорему 2.1, получаем теперь, что S обладает П-дополнением H в G.

Рассмотрим группу H и ее нормальную подгруппу $K_1 = H \cap K$, являющуюся A-группой. Пусть R_1 — П-коммутант группы K_1. Так как $K_1/K_1 \cap R$ изоморфна K_1R/R, являющейся подгруппой абелевой П-группы K/R, то ясно, что

$$R_1 \subseteq K_1 \cap R. \tag{2.8}$$

Так как $(H \cap K)S = HS \cap K = K$, то ясно, что $K_1 = H \cap K$ есть П-дополнение к S в K. Значит, $K_1 \cap S$ является П$'$-группой. Поэтому

$$K_1 \cap R_1S = R_1(K_1 \cap S) = R_1. \tag{2.9}$$

Ввиду изоморфизма

$$K/R_1S = K_1R_1S/R_1S \cong K_1/K_1 \cap R_1S = K_1/R_1$$

получаем включение $R \subseteq R_1S$, а следовательно, $K_1 \cap R$ входит в $K_1 \cap R_1S$, совпадающую ввиду (2.9) с R_1. Итак,

$$K_1 \cap R \subseteq R_1. \tag{2.10}$$

Из (2.8) и (2.10) вытекает равенство

$$R_1 = K_1 \cap R = H \cap R. \tag{2.11}$$

Далее будем различать три случая.

Первый случай. Пусть $|S|$ делится на числа из П. Тогда ввиду того, что $HS = G$ и $|H \cap S|$ не делится на числа из П H не совпадает с G. По индукции R_1 обладает П-дополнением L в H. Ввиду (2.11) мы можем применить лемму 1.5, согласно которой L есть П-дополнение к R в G.

Второй случай. Пусть порядок S не равен 1 и не делится на числа из П. Тогда $|K/S|$ есть наибольший П-делитель порядка K. По индукции R/S обладает дополнением L/S в группе G/S. Тогда $G = RL, R \cap L = S$, т. е. L — искомое П-дополнение к R в G.

Третий случай. Пусть теперь $|S| = 1$, т. е. K является разрешимой П-группой, все силовские подгруппы которой абелевы. Здесь мы воспользуемся теоремой VI.14.4 из [6]. Если $\mathfrak{S}$ — силовская система группы K, а N — ее нормализатор в G, то $NK = G$. Подгруппа $D = N \cap K$ есть системный нормализатор группы K. Согласно теореме VI.14.4 из [6] $DR = K, D \cap R = 1$. Поэтому $G = NK = NDR = NR, N \cap R = D \cap R = 1$, т. е. N — дополнение к R в G.

Теорема 2.3 полностью доказана.

Отметим некоторые следствия теоремы 2.3.

Теорема 2.4. *Пусть П содержит все простые делители индекса $|G:K|$ нормальной подгруппы K группы G. Если K является A_{Π}-группой, то ее П-коммутант обладает дополнением в G.*

Доказательство. По теореме 2.3 П-коммутант R группы K обладает П-дополнением H в G. Так как $H \cap R$ является П$'$-группой, а $H/H \cap R \cong G/R$ есть П-группа, то существует дополнение к $H \cap R$ в H, являющееся дополнением к R в G.

Из теоремы 2.4 непосредственно вытекает следующий результат (см. [3]).

Теорема 2.5. *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если K является A_Π-группой, совпадает со своим Π-коммутантом и G/K есть Π-группа.*

Если Π — множество всех простых чисел, то из теоремы 2.3, а также и из теоремы 2.4 вытекает следующий результат.

Теорема 2.6. *Если K — нормальная подгруппа группы G и все силовские подгруппы из K абелевы, то в группе G существует дополнение S к коммутанту группы K.*

§ 3. Коммутативные треугольники гомоморфизмов

Пусть даны группы A, B, C и гомоморфизмы $\alpha : A \to C$, $\beta : B \to C$. Рассмотрим следующую задачу: при каких условиях существует гомоморфизм $\gamma : A \to B$ такой, что треугольник

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

коммутативен в том смысле, что $(a^\gamma)^\beta = a^\alpha$ при любом $a \in A$?

Обозначим через $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ множество всех упорядоченных пар (a,b) таких, что $a \in A$, $b \in B$, $a^\alpha = b^\beta$. Если α, β — эпиморфизмы, то $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ совпадает с прямым произведением групп A и B с объединенной фактор-группой C [6, стр. 50] Так же, как и теорема I. 9.11 из [6], легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть даны гомоморфизмы $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$. Тогда:*

1) *$A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ является подгруппой группы $A \times B$;*

2) *отображение $\delta_1 : (a, b) \to a$, где $(a, b) \in A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$, является гомоморфизмом группы $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ в группу A;*

3) *отображение $\delta_2 : (a, b) \to b$, где $(a, b) \in A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$, является гомоморфизмом группы $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ в группу B;*

4) $\operatorname{Ker} \delta_1 \cong \operatorname{Ker} \beta$, $\operatorname{Ker} \delta_2 \cong \operatorname{Ker} \alpha$.

Доказательство. Если (a, b) и (a_1, b_1) — элементы из $\mathfrak{G} = A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$, то $a^\alpha = b^\beta$, $a_1^\alpha = b_1^\beta$. Так как $(aa_1)^\alpha = a^\alpha a_1^\alpha$, $(bb_1)^\beta = b^\beta b_1^\beta$, то $(aa_1)^\alpha = (bb_1)^\beta$, т. е. $\mathfrak{G}$ — подгруппа прямого произведения $A \times B$. То, что δ_1 и δ_2 — гомоморфизмы, очевидно.

Если $(1, b) \in \operatorname{Ker} \delta_1$, то $1^\alpha = b^\beta = 1$, т. е. $b \in \operatorname{Ker} \beta$. Обратно, если $b \in \operatorname{Ker} \beta$, то $b^\beta = 1$, откуда $(1, b) \in \mathfrak{G}$, т. е. $(1, b) \in \operatorname{Ker} \delta_1$. Следовательно, отображение $(1, b) \to b$ является изоморфным отображением $\operatorname{Ker} \delta_1$ на $\operatorname{Ker} \beta$.

Аналогично, отображение $(a, 1) \to a$ дает изоморфизм $\operatorname{Ker} \delta_2$ на $\operatorname{Ker} \alpha$.

В дальнейшем $\operatorname{Ker} \delta_1$ будем называть левым ядром группы $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$, а $\operatorname{Ker} \delta_2$ — ее правым ядром.

Л е м м а 3.2. *Пусть треугольник гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[ld, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

коммутативен, т. е. $\alpha = \gamma\beta$. *Тогда* $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ *и* $\operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta$ *совпадает с полным прообразом группы* $\operatorname{Im}\alpha$ *при гомоморфизме* β. *В частности, если* $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$, *то* $B = \operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ между образами гомоморфизмов α и β вытекает из того, что $a^{\alpha} = (a^{\gamma})^{\beta}$ для всех $a \in A$. Функция β осуществляет эпиморфизм группы $\operatorname{Im}\gamma$ на $\operatorname{Im}\alpha$. Поэтому

$$\operatorname{Ker}\beta \operatorname{Im}\gamma/\operatorname{Ker}\beta \cong \operatorname{Im}\gamma/\operatorname{Im}\gamma \cap \operatorname{Ker}\beta \cong \operatorname{Im}\alpha. \tag{3.1}$$

Пусть $S = (\operatorname{Im}\alpha)^{\beta^{-1}}$ — полный прообраз группы $\operatorname{Im}\alpha$ при гомоморфизме β. Тогда

$$S/\operatorname{Ker}\beta \cong \operatorname{Im}\alpha. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) вытекает равенство порядков

$$|S| = |\operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta|.$$

Отсюда, ввиду включения $\operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta \subseteq S$, получаем требуемую факторизацию: $S = \operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть даны гомоморфизмы* $\alpha : A \to C$ и $\beta : B \to C$. *Для существования гомоморфизма* $\gamma : A \to B$ *такого, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[ld, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

коммутативна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$;
2) *в группе* $A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ *ее левое ядро дополняемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ и в группе $\mathfrak{G} = A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$ ее левое ядро $\mathfrak{K}$ обладает дополнением $\mathfrak{H}$.

Для любого $a \in A$ найдется такой $b \in B$, что $(a, b) \in \mathfrak{G}$. Действительно, если $a \in A$, то по условию $a^{\alpha} \in \operatorname{Im}\beta$, т. е. $a^{\alpha} = b^{\beta}$ для некоторого $b \in B$. Следовательно, отображение δ_1 из леммы 3.1 является эпиморфизмом группы $\mathfrak{G}$ на A. Поэтому $\mathfrak{G}/\mathfrak{K} \cong A$ и если δ — ограничение δ_1 на $\mathfrak{H}$, то

$$\delta : \mathfrak{H} \to A$$

есть изоморфизм. Определим теперь отображение γ по правилу: если $(a,b) \in \mathfrak{H}$, то $a^{\gamma} = b$. Так как $\delta : \mathfrak{H} \to A$ есть изоморфизм, то областью определения функции γ является A. Кроме того, для любых двух элементов $(a, b), (a_1, b_1)$ из $\mathfrak{H}$

$$(a, b)(a_1, b_1) = (aa_1, bb_1) \in \mathfrak{H},$$

откуда $(aa_1)^{\gamma} = bb_1 = a^{\gamma}a_1^{\gamma}$. Поэтому $\gamma : A \to B$ есть гомоморфизм.

Пусть $x \in A$, $(x, y) \in \mathfrak{H}$. Согласно построению, $x^\alpha = y^\beta$, $x^\gamma = y$. Таким образом, $(x^\gamma)^\beta = x^\alpha$.

Необходимость. Пусть имеется гомоморфизм $\gamma: A \to B$ такой, что $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta$ при всех $a \in A$. По лемме 3.2 $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех пар вида (a, a^γ). Так как $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta$, то $(a, a^\gamma) \in \mathfrak{G} = A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$. Пусть (x, y), (x_1, y_1) — любые элементы из $\mathfrak{H}$. Тогда $(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1, yy_1)$, $(xx_1)^\gamma = x^\gamma x_1^\gamma = yy_1$. Значит, $(xx_1, yy_1) \in \mathfrak{H}$, т. е. $\mathfrak{H}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, изоморфная, как легко заметить, группе A. Ясно, что отображение δ_1 из леммы 3.1 есть эпиморфизм, поэтому $\mathfrak{G}/\operatorname{Ker}\delta_1 \cong A$. Так как $\mathfrak{H}$ изоморфна A и пересекается с $\operatorname{Ker}\delta_1$ лишь по единице, то $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}\operatorname{Ker}\delta_1$.

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть даны гомоморфизмы $\alpha: A \to C$ и $\beta: B \to C$, причем $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. И пусть для любого простого p, делящего $(|\operatorname{Ker}\beta|, |A|)$, выполняются следующие условия:*

1) *силовская p-подгруппа из $\operatorname{Ker}\beta$ абелева;*

2) *существует гомоморфизм γ_p некоторой силовской p-подгруппы A_p группы A в группу B такой, что $\gamma_p\beta = \alpha \mid A_p$, где $\alpha \mid A_p$ — ограничение α на A_p.*

Тогда существует гомоморфизм $\gamma: A \to B$ такой, что $\alpha = \gamma\beta$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G} = A \underset{\alpha,\beta}{\times} B$, $\mathfrak{K}$ — левое ядро группы $\mathfrak{G}$. Ввиду теоремы 3.1 достаточно показать, что $\mathfrak{K}$ обладает дополнением в $\mathfrak{G}$. Так как по условию $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$, то отображение δ_1 из леммы 3.1 есть эпиморфизм, откуда

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{K} \cong A. \tag{3.3}$$

Так как по лемме 3.1 $\operatorname{Ker}\beta \cong \mathfrak{K}$, то учитывая условие и (3.3), получаем, что для любого простого p, делящего $|\mathfrak{G} : \mathfrak{K}|$, силовские p-подгруппы в $\mathfrak{K}$ абелевы.

Зафиксируем простое число p, делящее $(|\mathfrak{K}|, |A|)$. По условию существует гомоморфизм $\gamma_p: A_p \to B$ такой, что $a^\alpha = (a^{\gamma_p})^\beta$ для любого $a \in A_p$. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всех пар вида (a, a^{γ_p}), где $a \in A_p$. Так как $a^\alpha = (a^{\gamma_p})^\beta$, то $(a, a^{\gamma_p}) \in \mathfrak{G}$. Пусть (a, a^{γ_p}), $(a_1, a_1^{\gamma_p})$ — любые элементы из $\mathfrak{P}$. Так как $(aa_1)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}a_1^{\gamma_p}$, то $(a, a^{\gamma_p})(a_1, a_1^{\gamma_p}) \in \mathfrak{P}$. Значит, $\mathfrak{P}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, причем отображение $(a, a^{\gamma_p}) \to a$ есть изоморфизм $\mathfrak{P}$ на A_p. Так как $|\mathfrak{G}/\mathfrak{K}|_p = |A_p| = |\mathfrak{P}|$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K} \cong \mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{P}$, то $\mathfrak{P}\mathfrak{K}/\mathfrak{K}$ — силовская p-подгруппа в $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. По теореме VI.4.7 из [6] в $\mathfrak{K}$ имеется такая силовская p-подгруппа $\mathfrak{K}_p$, что $\mathfrak{K}_p\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа в $\mathfrak{P}\mathfrak{K}$. Ясно, что $\mathfrak{K}_p\mathfrak{P}$ будет силовской подгруппой и в $\mathfrak{G}$. Таким образом, получается, что силовская p-подгруппа из $\mathfrak{K}$ дополняема в некоторой силовской подгруппе из $\mathfrak{G}$.

По теореме 2.2 $\mathfrak{K}$ обладает дополнением в $\mathfrak{G}$. Остается применить теорему 3.1.

Из теоремы 3.2 следует, что если $(|\operatorname{Ker}\beta|, |A|) = 1$, то условие $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ необходимо и достаточно для существования указанного гомоморфизма γ.

Теорема 3.3. *Пусть даны гомоморфизмы $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$ и пусть для любого простого p, делящего $|A|$, выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3.2. *Тогда существует гомоморфизм $\gamma: A \to B$ такой, что $\alpha = \gamma\beta$.*

Доказательство. Так как A_p^α входит, по лемме 3.2, в $\operatorname{Im}\beta$ и является силовской p-подгруппой в $\operatorname{Im}\alpha$, то ясно, что $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. Теперь применяем теорему 3.2.

Теорема 3.4. *Пусть даны гомоморфизмы $\alpha: A \to C$ и $\beta: B \to C$, причем $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. И пусть для любого простого p, делящего $(|\operatorname{Ker}\beta|, |A|)$, выполняются следующие условия:*

1) *силовская p-подгруппа из $\operatorname{Ker}\beta$ абелева;*

2) *некоторая силовская p-подгруппа A_p из A представима в виде $A_p = L \leftthreetimes P$, где $L \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$, причем существует гомоморфизм $\gamma_p : P \to B$ такой, что $\gamma_p\beta = \alpha \mid P$.*

Тогда существует гомоморфизм $\gamma : A \to B$ такой, что $\alpha = \gamma\beta$.

Доказательство. Покажем, что гомоморфизм $\gamma_p : P \to B$ можно продолжить до гомоморфизма A_p в B, удовлетворяющего условию 2) теоремы 3.2.

Пусть x, x_1 — любые элементы из A_p. Они единственным образом представимы в виде $x = l\,a, x_1 = l_1a_1$, где $l, l_1 \in L, a, a_1 \in P$. Очевидно, найдется такой элемент $l_2 \in L$, что $xx_1 = la \cdot l_1a_1 = l_2aa_1$.

Расширим теперь область определения функции γ_p, полагая $x^{\gamma_p} = (la)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}$. Тогда $(xx_1)^{\gamma_p} = (l_2 \cdot aa_1)^{\gamma_p} = (aa_1)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}a_1^{\gamma_p} = x^{\gamma_p}x_1^{\gamma_p}$, т. е. $\gamma_p : A_p \to B$ есть гомоморфизм. Кроме того, $(x^{\gamma_p})^\beta = (a^{\gamma_p})^\beta = a^\alpha = (la)^\alpha = x^\alpha$. Теперь применяем теорему 3.2.

§ 4. Свойства П-добавлений и добавлений

Применим результаты предыдущего параграфа для изучения П-добавлений и добавлений.

Теорема 4.1. *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Пусть некоторая силовская p-подгруппа G_p группы G представима в виде $G_p = L \leftthreetimes P$, где $L \subseteq K$, а $P \subseteq H$. Если $|H \cap K|$ делится на p, то $O^p(K) \neq K$.*

Доказательство. Предположим, что $|H \cap K|$ делится на p. Так как по условию $H \cap K$ p-нильпотентна, то в H существует такая нормальная подгруппа R, что $R \subseteq H \cap K$ и $H \cap K/R$ является неединичной абелевой p-группой. Легко показать (см. доказательство леммы 1.3), что $H \cap K/R$ содержится в $\Phi(H/R)$.

Пусть α — естественный гомоморфизм группы G на G/K, т. е. $x^\alpha = xK$ для любого $x \in G$. Отображение $\beta : hR \to hK$, где $h \in H$, является гомоморфизмом группы H/R на G/K. Ясно, что $\operatorname{Ker}\beta = H \cap K/R$, а значит, $\operatorname{Ker}\beta$ — абелева p-группа.

Очевидно, отображение $\gamma_p : a \to aR$, где $a \in P$, является гомоморфизмом группы P в H/R. Пусть x — любой элемент из P. Тогда $x^\alpha = xK, x^{\gamma_p} = xR$, $(x^{\gamma_p})^\beta = (xR)^\beta = xK$. Таким образом, $x^\alpha = (x^{\gamma_p})^\beta$ для всех $x \in P$.

Применим теперь теорему 3.4, полагая в ней $A = G, B = H/R, C = G/K$. По теореме 3.4 существует гомоморфизм $\gamma : G \to H/R$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ H/R \arrow[r, "\beta"'] & G/K \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

коммутативна. Так как $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta = G/K$, то по лемме 3.2 $H/R = \operatorname{Im}\gamma \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\gamma\,(H \cap K/R)$. Так как $H \cap K/R$ содержится в $\Phi(H/R)$, то отсюда вытекает, что $H/R = \operatorname{Im}\gamma$, т. е. γ — эпиморфизм. Ввиду коммутативности диаграммы (4.1), из $x^\gamma = R$ вытекает $x^\alpha = K$. Таким образом,

$$G/K^* \cong H/R,\ K^* \subseteq K, \tag{4.2}$$

где через K^* мы обозначили $\operatorname{Ker}\gamma$. Используя (4.2) и равенство $HK = G$, получаем

$$|K:K^*|=|H\cap K:R|=p^\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

Тем самым теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если H содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу группы K, то K p-нильпотентна.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по $|K|$. Если $|H\cap K|$ не делится на p, то ввиду условия $|K|$ не делится на p, т. е. K p-нильпотентна. Предположим, что p делит $|H\cap K|$. Тогда по теореме 4.1 подгруппа $K_1=O^p(K)$ отлична от K, т. е.

$$|K:K_1|=p^\varepsilon,\ \varepsilon>0. \tag{4.3}$$

Так как $H\cap K$ содержит силовские p-подгруппы из K, то $(H\cap K)K_1=K$, а значит, $HK_1=G$. Покажем, что H является p-добавлением к K_1 в G. Пусть S — нормальная $S_{p'}$-подгруппа из $H\cap K$. Ввиду (4.3) $S\subseteq K_1$. Поэтому $H\cap K\supseteq H\cap K_1\supseteq S$. Так как H — p-добавление к K в G, то $\Phi(H/S)$ содержит $H\cap K/S$, а значит, и $H\cap K_1/S$. Следовательно, H — p-добавление к K_1 в G. Так как $|K_1|<|K|$, то по индукции K_1 p-нильпотентна, а значит, ввиду (4.3) p-нильпотентна и подгруппа K.

Непосредственным следствием теоремы 4.2 является следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть H — добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если для некоторого простого p подгруппа H содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу из K, то K p-нильпотентна.*

Частный случай теоремы 4.3 был получен Рокеттом (см. [6, стр. 429]).

Теорема 4.4. *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если $G_p\cap K\subseteq\Omega_1(Z(G_p))$, то G имеет нормальную подгруппу N такую, что $N\subseteq K$, $HN=G$, $(p,|H\cap N|)=1$.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы H. В K найдется такая силовская p-подгруппа K_p, что $PK_p=G_p$ — силовская p-подгруппа из G (см. [6, теорема VI.4.7]). Так как по условию $K_p\subseteq\Omega_1(Z(G_p))$, то в K_p найдется такая подгруппа L, что $PL=P\times L=G_p$. По теореме 4.1 в G найдется такая нормальная подгруппа K^*, что

$$|K:K^*|=p^\varepsilon,\ \varepsilon>0. \tag{4.4}$$

Рассмотрим группу $G^*=HK^*$. Нетрудно показать, что H является p-добавлением к K^* в G^*. Ввиду условия $G_p^*\cap K^*\subseteq\Omega_1(Z(G_p^*))$. Так как $|K^*|<|K|$, то по индукции G^* имеет такую нормальную подгруппу K_1, что $K_1\subseteq K^*$, $HK_1=G^*$ и $|H\cap K_1|$ не делится на p. Пусть $S=O^p(K^*)$. Тогда S нормальна в G и обладает следующими свойствами:

$$|K:S|=p^\omega,\ \omega>0,\ (|S\cap H|,p)=1. \tag{4.5}$$

Рассмотрим группу $\mathfrak{G}=G/S$ и ее подгруппы $\mathfrak{H}=HS/S$ и $\mathfrak{K}=K/S$. Так как $G_p\cap K\subseteq\Omega_1(Z(G_p))$, то $\mathfrak{K}$ — элементарная абелева подгруппа и порядок группы $\mathfrak{X}=\mathfrak{G}/C_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{K})$ не делится на p. Группу $\mathfrak{X}$ можно рассматривать как группу автоморфизмов для $\mathfrak{K}$. По теореме о полной приводимости (см. [6, теорема I.17.6]) $\mathfrak{K}$ разлагается в прямое произведение своих $\mathfrak{X}$-допустимых подгрупп:

$$\mathfrak{K}=(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K})\times\mathfrak{N}.$$

Если $\mathfrak{N}=N/S$, то N — искомая подгруппа группы G. Действительно,

$$\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}=(H\cap K)S/S,\ \mathfrak{H}\mathfrak{N}=\mathfrak{G},\ \mathfrak{H}\cap\mathfrak{N}=S/S,$$

поэтому $HN = G$, $HS \cap N = S$, $H \cap N \subseteq H \cap S$. Используя (4.5), получаем, что $|H \cap N|$ не делится на p. Теорема доказана.

Теорема 4.5. *Пусть H — некоторое Π-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Пусть для любого $p \in \Pi$ выполнено одно из следующих условий:*

а) $|H|_p = |G|_p$;

б) $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(Z(G_p))$.

Тогда H является Π-дополнением к некоторой, содержащейся в K, нормальной подгруппе группы G.

Доказательство. Индукцией по $|G|_\Pi$. Пусть p — делитель $|G|$, входящий в Π, $\omega = \Pi \setminus \{p\}$. По индукции H является ω-дополнением к содержащейся в K нормальной подгруппе R из G. Так как $H \cap K$ обладает инвариантной $S_{\Pi'}$-подгруппой A, то можно считать, что $A \subseteq R$. Легко проверить, что H есть Π-добавление, а значит, и p-добавление к R в G. Теперь применяем теоремы 4.2 и 4.4 к группе G и ее подгруппам H и R.

Теорема 4.6. *Пусть H — некоторое добавление к нормальной подгруппе K группы G. Подгруппа H обладает в G нормальным дополнением, содержащимся в K, если для любого простого p либо $|H_p| = |G_p|$, либо $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(Z(G_p))$.*

Эта теорема получается из теоремы 4.5 при $\Pi = \Pi(G)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Виландт, Пути развития структурной теории конечных групп, Международный математический конгресс в Эдинбурге в 1958 г. (обзорные доклады), М., 1962.
2. Л. А. Шеметков, Факторизация конечных групп, ДАН СССР, т. 178, № 3, 1968.
3. Л. А. Шеметков, О существовании Π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп, ДАН СССР, т. 195, № 1, 1970.
4. H. Wielandt, Zum Satz von Sylow. II, Math. Z., **71**, 1959, 461—462.
5. С. А. Чунихин, Л. А. Шеметков, Конечные группы, сб. Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия 1969, ВИНИТИ, М., 1971.
6. B. Huppert, Endliche Gruppen. I, Berlin — Heidelberg — New York, 1967.
7. С. А. Чунихин, Подгруппы конечных групп, «Наука и техника», Минск, 1964.
8. B. Huppert, Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen, Acta Sci. Math. Szeged, 22, № 1—2, 1961, 46—61.

Поступила 4.V 1971 г.

Гомельская лаборатория Института математики АН БССР