УДК 519.44

Обобщенно факторизуемые группы

Т. М. Лозбень

В теории абстрактных групп существенную роль играет изучение групп, те или иные подгруппы которых удовлетворяют некоторым наперед заданным требованиям. Одним из требований, налагаемых на подгруппы, является требование дополняемости. Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если существует такая подгруппа B, что $G = AB$ и $A \cap B = 1$. Группа G называется вполне факторизуемой, если в ней дополняема каждая подгруппа. Конечные вполне факторизуемые группы изучал Ф. Холл [1]. Бесконечные группы такого рода изучались Н. В. Черниковой [2].

С. Н. Черниковым [3] была поставлена задача изучения групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп. Сужение системы дополняемых подгрупп в некоторых случаях привело к описанию новых классов групп, содержащих класс вполне факторизуемых групп, но не совпадающих с последним (см., например, [4]).

Расширение класса вполне факторизуемых групп в теории абстрактных групп было получено также путем изменения не системы дополняемых подгрупп, а самого условия дополняемости [5].

В. С. Чарин [6] начал изучать топологические вполне факторизуемые группы, приняв при этом следующее определение: топологическая группа G называется вполне факторизуемой, если для каждой замкнутой подгруппы A найдется замкнутая подгруппа B такая, что $G = AB$, $A \cap B = 1$.

Так же, как и для абстрактных групп в теории топологических групп, естественно поставить вопрос о нахождении некоторых расширений класса вполне факторизуемых групп. В данной работе изучаются топологические группы, в которых систему дополняемых подгрупп составляют все подгруппы, но некоторым образом изменено условие дополняемости.

Топологическая группа G называется f-факторизуемой, если для каждой замкнутой подгруппы A найдется замкнутая подгруппа B с условиями: $G = AB$ и пересечение $A \cap B$ — конечная группа. Подгруппа A называется при этом f-дополняемой. Абстрактные f-факторизуемые группы изучались в работе [5].

Заменяя в данном определении требование конечности пересечения $A \cap B$ следующими: подгруппа $A \cap B$ компактна, компактна с условием минимальности для замкнутых подгрупп, получим определение k-факторизуемых, соответственно, m-факторизуемых групп.

Группы f-факторизуемые, k-факторизуемые и m-факторизуемые объединены здесь под одним названием: обобщенно факторизуемые группы.

Уже из определения обобщенно факторизуемых групп вытекает, что класс абелевых f-факторизуемых групп шире класса абелевых вполне факторизуемых групп: абелевы f-факторизуемые группы содержат некоторые связные группы, например одномерную торовидную группу. Описание абелевых f-факторизуемых групп дает теорема 1 данной работы. В теореме 2 доказано, что для абелевых групп условия f-факторизуемости и m-факторизуемости равносильны. Однако для нильпотентных групп эти условия определяют различные классы групп (см. пример).

Тема данной работы предложена автору В. С. Чариным и выполнена под его руководством.

§ 1. Некоторые обозначения и вспомогательные предложения

Пусть группа G разлагается в прямое произведение подгрупп G_α, $\alpha \in \in \mathfrak{M}$. Этот факт мы будем записывать так: $G = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}} G_\alpha$.

Если же множество подгрупп G_α конечно, то мы будем пользоваться следующей записью: $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_k$.

В случае, когда группа G разлагается в алгебраическое прямое произведение подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_k$, в отличие от топологического, будем обозначать следующим образом: $G = G_1 \dot{\times} G_2 \dot{\times} \ldots \dot{\times} G_k$.

Аддитивную группу целых p-адических чисел будем называть группой типа I_p, а квазициклическую группу — группой типа p^∞.

В этой работе будут использованы некоторые свойства групп, удовлетворяющих условию минимальности для замкнутых подгрупп. Мы сформулируем нужные нам свойства без доказательств в виде следующей леммы.

Лемма 1. а) *Локально разрешимая локально компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп обладает замкнутой абелевой подгруппой конечного индекса, разложимой в прямое произведение* $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_s$, *где* B_j — *дискретная группа типа* p_j, p_j^∞ — *простое число* ($j = 1, 2, \ldots, k$), C_s — *одномерная торовидная группа* ($s = 1, 2, \ldots, m$).

б) *Если в топологической группе* G *инвариантная подгруппа* N *компактна или открыта, то условие минимальности в* G/N *и в* N *по замкнутым подгруппам влечет условие минимальности по замкнутым подгруппам в самой группе* G.

Доказательство этих предложений можно найти в работах [7, 8].

Укажем без доказательств несколько свойств обобщенно факторизуемых групп.

Лемма 2. *Фактор-группа $\mathfrak{f}$-факторизуемой (k-, m-факторизуемой) группы G по открытой или компактной инвариантной подгруппе является $\mathfrak{f}$-факторизуемой (k-, m-факторизуемой) группой.*

Если замкнутая подгруппа A $\mathfrak{f}$-дополняема (k, m-дополняема) в группе G, то подгруппа A $\mathfrak{f}$-дополняема (k-, m-дополняема) и в любой замкнутой подгруппе H, содержащей A, причем одним из $\mathfrak{f}$-дополнений (k,- m-дополнений) A в H служит пересечение $B \cap H$, где B является $\mathfrak{f}$-дополнением (k-, m-дополнением) подгруппы A в G.

Лемма 3. *Пусть G—$\mathfrak{f}$-факторизуемая группа, N — конечная инвариантная подгруппа. Тогда группа G/N $\mathfrak{f}$-факторизуема.*

Аналогичное предложение справедливо для k-, m-факторизуемых групп, если группа N является соответственно компактной, компактной с условием минимальности для замкнутых подгрупп группой.

Лемма 4. *Прямое произведение двух $\mathfrak{f}$-факторизуемых (m-факторизуемых) групп A и B, одна из которых компактна, является $\mathfrak{f}$-факторизуемой (m-факторизуемой) группой.*

Доказательство. Пусть в произведении $G = A \times B$ группа A компактна и оба сомножителя $\mathfrak{f}$-факторизуемы. Обозначим H произвольную замкнутую подгруппу группы G и H_0 проекцию этой подгруппы в группе B. Подгруппа H_0 является замкнутой ввиду компактности группы A. Из условий доказываемой леммы следует: $A = (H \cap A) A^*$, $B = H_0 B^*$, причем пересечения $H \cap A^*$ и $H_0 \cap B^*$ конечны. Очевидно, $G = HA^*B^*$. Докажем конечность пересечения $N = H \cap A^*B^*$. Допустим, что группа N—бесконечная. Проекция N_0 этой подгруппы в группе B^* содержится в пересечении $H_0 \cap B^*$

и потому конечна. Согласно предположению о бесконечности группы N для некоторого элемента $n \in N_0$ в группе A^* найдется бесконечно много различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots$ таких, что элементы $a_1 n, a_2 n, \ldots, a_s n, \ldots$ содержатся в группе N. Значит, элементы $a_2 a_1^{-1}, a_3 a_1^{-1}, \ldots, a_s a_1^{-1}, \ldots$ также содержатся в N. С другой стороны, эти элементы принадлежат A^*, что невозможно ввиду конечности пересечения $H \cap A^*$. Полученное противоречие показывает, что группа N конечна.

Пусть теперь группы A, B m-факторизуемы и H — снова произвольная замкнутая подгруппа группы G. Для полного доказательства леммы осталось установить, что пересечение $N = H \cap A^*B^*$ является в данном случае компактной подгруппой с условием минимальности для замкнутых подгрупп.

Действительно, группа N содержится, очевидно, в группе $A^*(H_0 \cap B^*)$. Так как группы A^* и $H_0 \cap B^*$ компактны, то N также компактна. Допустим теперь, что в группе N существует бесконечная убывающая цепочка замкнутых подгрупп: $N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_m \supset \ldots$ Обозначим P_i проекцию подгруппы N_i в группе B^* и $D_i = N_i \cap A^*$ $(i = 1, 2 \ldots)$. Из очевидного включения $P_i \subset H_0 \cap B^*$ $(i = 1, 2, \ldots)$ следует, что невозрастающая цепочка подгрупп $H_0 \supseteq P_1 \supseteq \ldots \supseteq P_m \supseteq \ldots$ стабилизируется, начиная с некоторого номера n. Если же для некоторого номера $k \geqslant n$ выполняется равенство $P_k = P_{k+1}$, то из соотношения $N_k \supset N_{k+1}$ следует $D_k \supset D_{k+1}$. Действительно, для некоторого элемента $x \in P_k = P_{k+1}$ в группе A^* найдется элемент a такой, что $ax \in N_k$, но $ax \bar{\in} N_{k+1}$. С другой стороны, в группе A^* должен существовать некоторый элемент a_1, отличный от a, такой, что $a_1 x \in N_{k+1} \subset \subset N_k$. Тогда элемент $aa_1^{-1} = ax(a_1x)^{-1}$ принадлежит $D_k \setminus D_{k+1}$ и потому $D_{k+1} \subset D_k$. Следовательно, в группе $H \cap A^*$ существует бесконечная убывающая цепочка замкнутых подгрупп: $D_k \supset D_{k+1} \supset \ldots$

Полученное противоречие доказывает, что цепочка подгрупп N_i конечна.

З а м е ч а н и е. Кроме свойств, указанных в леммах 2—4, следует отметить, что локально компактная m-факторизуемая группа — периодическая в топологическом смысле. Этот факт вытекает из определения m-факторизуемых групп, а также из известного предложения о том, что всякий элемент локально компактной группы порождает либо компактную, либо бесконечную циклическую подгруппу.

Отметим здесь же, что абелева m-факторизуемая группа не может быть группой типа I_p. Действительно, группа типа I_p и все ее истинные замкнутые подгруппы не удовлетворяют условию минимальности для замкнутых подгрупп [7, 8]. Следовательно, m-факторизуемая группа типа I_p должна быть вполне факторизуемой. Однако, ввиду результатов В. С. Чарина [6] это исключается. Таким образом, отсюда, а также из работы [9] вытекает, что каждый элемент m-факторизуемой локально компактной группы порождает компактную подгруппу, разлагающуюся в прямое произведение примарных циклических групп по различным простым числам.

§ 2. Абелевые обобщенно факторизуемые группы

Л е м м а 5. *Прямое произведение бесконечного множества примарных циклических групп непростых порядков не может быть m-факторизуемой группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} \{g_i\}, \; g_i^{p_i^2} = 1. \tag{1}$$

Обозначим $g_i^{p_i} = a_i$ и рассмотрим группу $A = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$. Заметим сразу, что все элементы простых порядков из группы G содержатся в подгруппе A.

Допустим теперь, что группа G является m-факторизуемой группой. Тогда подгруппа A m-дополняема в группе $G: G = AB$, причем пересечение $A \cap B$, ввиду нульмерности группы G и леммы 1,— конечная группа. Группа B разлагается в прямое произведение своих силовских p-подгрупп S_i:

$$B = \prod_{i \in \mathfrak{M}} S_i. \tag{2}$$

Из замечания следует, что все элементы каждой из подгрупп S_i имеют конечный порядок. В связи с этим, предположение о бесконечности совокупности множителей S_i в разложении (2), либо предположение о бесконечном нижнем слое хотя бы одной из них приводит к противоречию с конечностью группы $A \cap B$. Пользуясь предложением о конечности абелевой группы с конечным нижним слоем и порядками элементов, ограниченными в совокупности, получаем, что каждая из групп S_i конечна. Отсюда следует конечность группы B.

Так как группа A вполне факторизуема [10], то подгруппа $A \cap B$ дополняема в ней некоторой подгруппой $A_1 : A = A_1 \times (A \cap B)$. Таким образом,

$$G = A_1 \times B. \tag{3}$$

Пусть теперь $\widehat{G}$ — группа характеров группы G. Согласно теоремам двойственности из разложений (1) и (3) получаем соответственно

$$\widehat{G} = \prod_{i=1}^{\infty} \{\widehat{g}_i\} \tag{4}$$

и

$$\widehat{G} = \widehat{A}_1 \times \widehat{B}. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) показывают, что дискретная абелева группа $\widehat{G}$ допускает два неизоморфных разложения в прямое произведение примарных циклических групп, что невозможно.

Теорема 1. *Локально компактная абелева группа является $\mathfrak{f}$-факторизуемой тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое произведение вполне факторизуемой группы и группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть G — абелева $\mathfrak{f}$-факторизуемая группа. Так как она периодическая, то связная компонента G_0 единицы группы G компактна.

Покажем, что группа G_0 удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Группа G_0 содержит такую вполне несвязную замкнутую подгруппу C, фактор-группа G_0/C по которой торовидна [11, стр. 200]. Нетрудно убедиться, что группа C конечна.

Далее, фактор-группа G_0/C будучи торовидной группой обязана разлагаться в прямое произведение конечного числа одномерных торовидных групп. В противном случае, в группе G_0/C существует замкнутая подгруппа, которая разлагается в прямое произведение бесконечного множества примарных цикличных подгрупп непростых порядков, чего не может быть (см. лемму 5). Таким образом, G_0/C — конечномерная торовидная группа и потому группа G_0 удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп (лемма 1).

Так как торовидная подгруппа выделяется прямым множителем в содержащей ее абелевой группе, то $G = G_0 \times G_1$. Вполне несвязная группа G_1 разлагается в прямое произведение (с отмеченной открытой компактной подгруппой) своих силовских p-подгрупп S_i. Согласно лемме 5 в этом разложении может быть лишь конечное число силовских p-подгрупп S_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, у которых существуют элементы порядков, отличных от простого числа. Нетрудно убедиться, что каждая из подгрупп S_i $(i=m+1, m+2, \ldots)$

является вполне факторизуемой группой. Все подгруппы S_i ($i=m+1, m+2, \dots$) порождают, очевидно, вполне факторизуемую подгруппу F и группа G_1 может быть представлена в виде: $G_1 = F \times \prod_{i=1}^{m} S_i$. В группе S_i ($i = 1, 2, \dots, m$) нижний слой A_i по условию $\mathfrak{f}$-дополняем некоторой подгруппой $B_i : S_i = A_i B_i$, причем пересечение $A_i \cap B_i$ является конечной группой. Ввиду конечности нижнего слоя периодической группы B_i ($i = 1, 2, \dots, m$) последняя удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Обозначив $A^* = F \times \prod_{i=1}^{m} A_i$, $B^* = \prod_{i=1}^{m} B_i$, получим

$$G_1 = A^* B^*, \tag{6}$$

где A^* — характеристическая, вполне факторизуемая подгруппа группы G_1, а B^* — дискретная группа с условием минимальности для подгрупп. Учитывая, что $A^* = (A^* \cap B^*) \times A$ и что подгруппа $B = G_0 B^*$ замкнута с условием минимальности для замкнутых подгрупп, получаем окончательно следующее разложение группы $G : G = A \times B$, удовлетворяющее требованиям теоремы 1.

Обратно, пусть $G = A \times B$, где A — вполне факторизуемая группа, а B — группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп. Тогда $A = A_1 \times A_2$ и $B = B_1 \times B_2$, где A_1, B_1 — открытые компактные подгруппы и A_2, B_2 — дискретные группы. Из результатов М. И. Сергеева [5] следует, что дискретная группа $A_2 \times B_2$ $\mathfrak{f}$-факторизуема. $\mathfrak{f}$-факторизуемость компактной группы $A_1 \times B_1$ следует из леммы 4. Так как группу G можно представить в виде прямого произведения двух $\mathfrak{f}$-факторизуемых групп $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, то группа G также $\mathfrak{f}$-факторизуема.

С л е д с т в и е 1. *Локально компактная связная абелева $\mathfrak{f}$-факторизуемая группа компактна и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.*

С л е д с т в и е 2. *Абелева локально компактная вполне несвязная $\mathfrak{f}$-факторизуемая группа представима в виде произведения замкнутой характеристической вполне факторизуемой группы и группы с условием минимальности для подгрупп* (см. разложение (6)).

Повторяя рассуждения теоремы 1 относительно подгруппы G_0, нетрудно убедиться в том, что связная компонента единицы m-факторизуемой абелевой группы является конечномерной торовидной группой и выделяется в ней прямым сомножителем. Так как для вполне несвязных абелевых групп условия $\mathfrak{f}$-факторизуемости и m-факторизуемости, очевидно, равносильны, то отсюда вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Абелева локально компактная m-факторизуемая группа является $\mathfrak{f}$-факторизуемой группой.*

§ 3. Нильпотентные обобщенно факторизуемые группы

Л е м м а 6. *Если топологическая нильпотентная группа G представима в виде произведения замыкания коммутанта $\overline{G'}$ и некоторой замкнутой подгруппы H, то $G = H$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $1 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_m = G$ — центральный ряд группы G. Положим $H_0 = H$, $H_i = \overline{H_{i-1} Z_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда, очевидно, $H_m = G$. Допустим $H \neq G$. Если для некоторого номера i ($i = 1, 2, \dots, m$) справедливо условие $H_i \neq G$ и $H_{i+1} = G$, то H_i является замкнутой инвариантной подгруппой группы G. Рассмотрим фактор-группу $G/H_i = H_{i+1}/H_i = \overline{H_i Z_{i+1}}/H_i = \overline{H_i Z_{i+1}/H_i}$. По теореме об изоморфизме для абстрактной группы $H_i Z_{i+1}/H_i$ имеем $H_i Z_{i+1}/H_i \simeq Z_{i+1}/Z_{i+1} \cap H_i$. Так как $H_i \cap Z_{i+1}$ содержит группу Z_i, то группа $H_i Z_{i+1}/H_i$ абелева, поэтому и группа H_{i+1}/H_i абелева. Следовательно, $H_i \supseteq G'$ и потому справедливо соотношение $\overline{G}'H \subset \overline{G}'H_i = H_i \neq G$, противоречащее условию леммы.

Следствие 3. *Коммутант нильпотентной $\mathfrak{f}$-факторизуемой группы конечен.*

Лемма 7. *Нильпотентная локально компактная группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп является $\mathfrak{f}$-факторизуемой группой.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условиям леммы. Тогда она обладает подгруппой H конечного индекса, разлагающейся в прямое произведение конечномерной торовидной группы T, которая содержится в центре группы G и конечного числа квазициклических подгрупп B_j $(j = 1, 2, \ldots, n) : H = T \times B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$.

Покажем, что подгруппа H содержится в центре группы G. Для этого рассмотрим подгруппу M, порожденную представителями $g_1, g_2, \ldots, g_m$ смежных классов группы G по подгруппе H. Так как локально компактная локально разрешимая группа — локально конечна в топологическом смысле, то группа M компактна. Связная компонента M_0 единицы группы M является конечномерной торовидной группой, содержится в центре группы M, и фактор-группа M/M_0 конечна. Принимая во внимание теорему о конечности коммутанта группы, у которой фактор-группа по ее центру конечна [12], получаем, что M' — конечная группа. Далее, из разложения $M/M' = M_0M'/M' \times L/M'$ [11] фактор-группы M/M' следует, что $M = M_0L$, где L — конечная группа. Наконец, из указанного представления группы M, а также из соотношения $G = HM$ получаем $G = HL$.

Рассмотрим множество $G_j = (T \times B_j) L$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ элементов группы G. Так как квазициклическая группа B_jT/T содержится в центре группы G/T, то множество G_j является, очевидно, группой. Из компактности T и конечности L следует, что подгруппа G_j замкнута. Квазициклическая p-группа B_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ поэлементно перестановочна с группой L. Действительно, пусть g — произвольный элемент группы L и b_{ji} $(i = 1, 2, \ldots)$ — образующие элементы группы $B_j : b_{j1}^p = 1,\ b_{j2}^p = b_{j1}, \ldots, b_{jk}^p = b_{jk-1}, \ldots$ Тогда $g^{-1}b_{ji}g = b_{ji}t_{ji}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где t_{ji} — элемент группы T. Если $t_{ji} \neq 1$, то $b_{ji}t_{ji} = g^{-1}b_{ji}g = g^{-1}b_{ji+1}^p g = (g^{-1}b_{ji+1}g)^p = (b_{ji+1}t_{ji+1})^p = b_{ji+1}^p t_{ji+1}^p$ и, следовательно, $t_{ji+1}^p = t_{ji}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Это означает, что элементы t_{ji} $(i = 1, 2 \ldots)$ порождают в T квазициклическую подгруппу. С другой стороны, обозначив через s порядок элемента g, получаем $b_{ji} = g^{-s}b_{ji}g^s = b_{ji}t_{ji}^s$ и, следовательно, $t_{ji}^s = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Из этого соотношения вытекает, что порядки элементов t_{ji} $(i = 1, 2 \ldots)$ ограничены в совокупности числом s. Полученное противоречие доказывает, что $t_{ji} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и потому $g^{-1}b_{ji}g = b_{ji}$.

Таким образом, группа H содержится в центре группы G. Согласно упомянутой выше теореме из [12] коммутант G' группы G конечен. Абелева группа G/G' с условием минимальности для замкнутых подгрупп является $\mathfrak{f}$-факторизуемой группой. Но тогда в силу леммы 3 $\mathfrak{f}$-факторизуема и сама группа G. Лемма доказана. Пользуясь теоремой 1, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Нильпотентная локально компактная группа G $\mathfrak{f}$-факторизуема тогда и только тогда, когда она распадается в произведение двух замкнутых инвариантных подгрупп A и B; A является расширением конечной подгруппы центра группы G при помощи абелевой вполне факторизуемой группы, а B — группа с условием минимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — нильпотентная $\mathfrak{f}$-факторизуемая группа. Тогда связная компонента G_0 единицы группы G содержится в центре группы G [10] и дополняема в ней некоторой вполне несвязной подгруппой G_1:

$$G = G_0G_1. \tag{7}$$

Рассмотрим группу G_1. Так как коммутант группы G_1 конечен ввиду следствия леммы 6, то его централизатор C имеет в группе G_1 конечный индекс. Следовательно, группа C f-дополняема в G_1 некоторой конечной подгруппой M: $G_1 = CM$. Можем считать, что M содержит G_1'. Централизатор C_1 подгруппы M в группе C также f-дополняем в C : $C = C_1 M_1$. Тогда группу G_1 можем представить в виде: $G_1 = C_1 K$, где $K = MM_1$ — конечный нормальный делитель группы G_1.

Фактор-группа C_1/C_1' согласно следствию теоремы 1 представима в виде произведения вполне факторизуемой характеристической подгруппы A/C_1' и дискретной группы B_1/C_1' с условием минимальности для подгрупп: $C_1/C_1' = A/C_1' \cdot B_1/C_1'$. Следовательно, $C_1 = AB_1$ и потому

$$G_1 = AB_1K. \tag{8}$$

Таким образом, в силу соотношений (7) и (8) группу G можно представить в виде произведения подгруппы A и подгруппы $B = B_1KG_0$, замкнутость которой является следствием компактности групп G_0 и K': $G = AB$. Покажем, что каждая из групп A и B удовлетворяет требованиям доказываемой теоремы.

Группа G_0 абелева и согласно следствию 1 теоремы 1 удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Таким образом, группа $B = B_1KG_0$ инвариантна в G и удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.

Так как подгруппа A характеристична в группе C_1 и $C_1 \lhd G_1$, то из соотношения (7) следует инвариантность этой подгруппы в группе G. Легко видеть, что группа G_1' содержится в центре группы G_1. Из соотношения (7) вытекает, что она является центральной подгруппой группы G.

Достаточность. Пусть $G = AB$, $A \lhd G$, $B \lhd G$, B удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп и Z такая конечная подгруппа центра группы G, что A/Z — абелева вполне факторизуемая группа.

Следовательно, в этой группе дополняемо пересечение $D/Z = A/Z \cap BZ/Z$, которое является, очевидно, конечной группой: $A/Z = A_1/Z \times BZ/Z$. Тогда группа $\widetilde{G} = G/Z$ представима в виде произведения вполне факторизуемой абелевой группы $\widetilde{A} = A_1/Z$ и группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп $\widetilde{B} = BZ/Z : \widetilde{G} = \widetilde{A} \dot{\times} \widetilde{B}$. Согласно лемме 7 и следствию леммы 6 коммутант группы $\widetilde{B}$ конечен и, очевидно, совпадает с $\widetilde{G}_1'$. Обозначив $Q = \widetilde{G}/\widetilde{G}'$, $F = \widetilde{A}\widetilde{G}'/\widetilde{G}'$, $H = \widetilde{B}/\widetilde{G}'$, рассмотрим группу Q. Для нее справедливо соотношение: $Q = F \times H$. Группа F разлагается в прямое произведение некоторой открытой компактной подгруппы F_1 и дискретной подгруппы $F_2 : F_1 \times F_2$. Согласно лемме 1 группу можно представить в виде: $H = T \times R \times P$, где T — конечномерная торовидная группа, R — конечная группа и P — прямое произведение конечного числа квазициклических групп P_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. При доказательстве f-факторизуемости группы Q выделим два случая.

I. Группа Q вполне несвязна. В этом случае группа H представима в виде $H = R \times P$, а потому $Q = (F_1 \times F_2) \times (R \times P)$. Рассмотрим подгруппу F_2P_1 группы Q. В индуцированной топологии каждая окрестность единицы этой группы содержит открытую подгруппу. Пусть V — такая бесконечная открытая подгруппа группы F_2P_1, что $V \cap F_2 = 1$, $V \cap P_1 = 1$. Обозначив V_1 проекцию группы V в группе P_1, получаем $V_1 = P_1$. Это следует из бесконечности группы V и условия $F_2 \cap V = 1$. Тогда, очевидно, справедливо следующее равенство: $F_2 \times P_1 = V \times F_2$. Отсюда вытекает, что все истинные подгруппы группы V конечны и потому группа V дискретна. Следовательно, группа F_2P_1 также дискретна. Заменяя в предыдущих рассуждениях группы F_2 и P_1 соответственно группами F_2P_1 и P_2, докажем дискретность группы $F_2P_2P_1$. Продолжая эти рассуждения, через конечное число шагов получим, что группа F_2P дискретна, следовательно замкнута и, как следует из результатов М. И. Сергеева [5], f-факторизуема.

Так как группа F_1R компактна и f-факторизуема, то из работы В. М. Глушкова [10, лемма 7.1, а также лемма 4] вытекает, что и группа Q f-факторизуема.

II. Связная компонента единицы группы Q нетривиальна. Нетрудно убедиться, что она совпадает с группой T. Фактор-группа Q/T удовлетворяет условиям рассмотренного выше случая I и потому является f-факторизуемой группой. Так как группа $Q = T \times Q_1$ представима в виде топологического прямого произведения конечномерной торовидной группы T и вполне несвязной f-факторизуемой группы $Q_1 \simeq Q/T$, то группа Q ввиду леммы 4 также f-факторизуема.

Следовательно, группа $\widetilde{G}$, являясь расширением конечной группы $\widetilde{G}'$, при помощи f-факторизуемой группы Q согласно лемме 3 f-факторизуема. Так как Z — конечная группа, то отсюда вытекает f-факторизуемость группы G. Теорема доказана.

Теорема 4. *Нильпотентная локально компактная группа тогда и только тогда m-факторизуема, когда она является расширением некоторой центральной компактной подгруппы, удовлетворяющей условию минимальности для замкнутых подгрупп при помощи f-факторизуемой группы.*

Доказательство. Пусть группа G m-факторизуема. Связная компонентна G_0 единицы группы G содержится в центре, компактна и согласно следствию 1 удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Фактор-группа G/G_0 является вполне несвязной f-факторизуемой группой.

Достаточность условий теоремы следует из леммы 7.

Следующий пример показывает, что класс нильпотентных m-факторизуемых групп шире класса нильпотентных f-факторизуемых групп.

Пример. Пусть T — одномерная торовидная группа; A и B — дискретные группы, разлагающиеся в прямое произведение циклических групп простых порядков по различным простым числам:

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} \{a_i\},\ a_i^{p_i} = 1;\ B = \prod_{i=1}^{\infty} \{b_i\}\ b_i^{p_i} = 1.$$

Пусть далее

$$b_j^{-1} a_i b_j = \begin{cases} a_i \quad, \text{ если } i \neq j, \\ a_j t_j, \text{ если } i = j \ (t_j \in T), \end{cases} \tag{9}$$

$$b_i^{-1} t b_i = t,\ a_i^{-1} t a_i = t,\ t \in T.$$

Рассмотрим группу $G = (T \times A) \leftthreetimes B$. Нетрудно проверить, что полная система окрестностей единицы группы T в группе G удовлетворяет пяти аксиомам Понтрягина [13, стр. 107] и потому эту систему можем считать полной системой окрестностей единицы группы G. Группа G/T — дискретная абелева вполне факторизуемая группа. Тогда из теоремы 4 вытекает, что G является m-факторизуемой группой. Докажем, что в группе G подгруппа T не может быть f-дополняемой. Допустим обратное, т. е. существует такая замкнутая подгруппа H группы G, имеющая с T конечное пересечение и $G = TH$. Так как $TH/T \simeq H/T \cap H$, то $H' \subset T \cap H$. Из соотношений (9) следует, что $H' = G'$ и поэтому коммутант G' группы G конечен. С другой стороны, элементы $[a_i b_i] = t_i$ порождают в T всюду плотную подгруппу и значит $\overline{G'} = T$. Полученное противоречие доказывает, что подгруппа T не f-дополняема в G.

Теорема 5. *Локально компактная нильпотентная группа k-факторизуема тогда и только тогда, когда она является расширением компактной группы с помощью дискретной f-факторизуемой группы.*

Доказательство. Пусть нильпотентная группа G k-факторизуема. Тогда ввиду периодичности группы G связная компонента единицы, содержащаяся в центре группы G, компактна. Замыкание коммутанта также компактная группа, что является следствием леммы 6. Так как в фактор-группе $G/G_0\overline{G'}$ существует открытая компактная подгруппа, то ее прообраз H в группе G является открытой инвариантной подгруппой группы G. Фактор-группа G/H дискретна и ввиду леммы 2 f-факторизуема.

Достаточность условий теоремы очевидна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Hall, Complemented groups, J. London Math. Soc., 12, 1937, 201—204.
2. Н. В. Черникова, Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб., т. 39, 1956.
3. С. Н. Черников, Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб., т. 35, 1954.
4. Ю. М. Горчаков, Примитивно факторизуемые группы, Ученые зап. Пермского ун-та, т. 17, 1960.
5. М. И. Сергеев, Вполне FN-факторизуемые группы, ДАН СССР, т. 155, № 3, 1964.
6. В. С. Чарин, Группы с дополняемыми подгруппами, ДАН СССР, т. 173, № 1, 1967.
7. В. М. Глушков, Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп, УМЖ, т. VIII, № 2, 1956.
8. В. С. Чарин, Локально бикомпактные локально разрешимые группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп, Матем. зап. Уральского ун-та, т. 3, № 3, 1962.
9. Ю. Н. Мухин, С. П. Хоменко, Монотетичные группы и подгрупповая решетка, Матем. зап. Уральского ун-та, т. VI, 1967.
10. В. М. Глушков, Локально нильпотентные локально бикомпактные группы, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 4, 1954.
11. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, ИЛ, М., 1950.
12. Н. Капланский, Введение в дифференциальную алгебру, ИЛ, М., 1959.
13. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, ГИТТЛ, М., 1954.

Поступила 22.XII 1970 г.

Киевский педагогический институт