1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.41/47

Об абелевых вполне M (m)-факторизуемых группах

М. В. Цыбанев

Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что $G=AB$ и $A \cap B=e$. Группы, в которых дополняемы те или иные подгруппы, изучаются уже более тридцати лет. Конечные группы, у которых дополняемы все подгруппы, изучались еще Ф. Холлом [1]. Произвольные (как конечные, так и бесконечные) группы такого рода — вполне факторизуемые группы — изучались Н. В. Черниковой [2]. Группам с разного рода системами дополняемых подгрупп посвящены многочисленные работы и, в частности, работа С. Н. Черникова [3], положившая начало исследованиям групп с системами дополняемых подгрупп.

В ряде исследований, относящихся к группам с дополняемыми подгруппами, подвергалось тем или иным обобщениям и само понятие дополняемости подгруппы. В частности, в работе М. И. Сергеева [4] рассматриваются группы G, у которых для каждой подгруппы $A \subset G$ существует такая подгруппа $B \subset G$, что $AB = G$, а пересечение $A \cap B$ является конечным (полная F-факторизуемость) или входит в конечный нормальный делитель из G (полная FN-факторизуемость). Это определение может быть обобщено следующим образом.

Назовем подгруппу A группы G M (m)-дополняемой в G, если существует такая подгруппа $B \subset G$, что $AB = G$ и пересечение $A \cap B$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности). Подгруппу B назовем при этом M (m)-дополнением подгруппы A в G. Если в группе G существует M (m)-дополнение для любой подгруппы, то такую группу G назовем вполне M (m)-факторизуемой.

В данной работе решается поставленный С. Н. Черниковым (автором этих определений) вопрос о строении вполне M (m)-факторизуемых абелевых групп. В ней получены, в частности, следующие результаты.

1. Класс всех вполне m-факторизуемых абелевых групп совпадает с классом всех периодических вполне M-факторизуемых абелевых групп, а также с классом всех абелевых вполне F-факторизуемых групп (см. [4]).

2. Всякая смешанная вполне M-факторизуемая абелева группа расщепляема. Всякая абелева вполне M-факторизуемая группа без кручения изоморфно вкладывается в конечную прямую сумму абелевых вполне M-факторизуемых групп без кручения ранга I.

§ 1. Некоторые предварительные предложения

Лемма 1. *Всякая подгруппа H вполне M (m)-факторизуемой группы G вполне M (m)-факторизуема.*

Доказательство. Пусть A — произвольная подгруппа группы H. Так как A — подгруппа вполне M (m)-факторизуемой группы G, то существует такая подгруппа $B \subset G$, что

$$AB = G \tag{1}$$

и $A \cap B$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности). Подгруппа $B \cap H$ является M (m)-дополнением подгруппы A в группе H. Действительно, ввиду (1) для любого элемента $h \in H$ существуют такие элементы $b \in B$ и $a \in A \subset H$, что $ab = h$; но тогда $b = a^{-1}h \in H$, а, значит, $b \in B \cap H$ и, следовательно, $H \subset A\,(B \cap H)$. Обратное включение является очевидным и потому

$$A(B \cap H) = H.$$

Группа $A \cap (B \cap H) = (A \cap B) \cap H$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности) как подгруппа группы $A \cap B$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Всякая фактор-группа $\overline{G}$ вполне M (m)-факторизуемой группы G вполне M (m)-факторизуема.*

Доказательство. Пусть $\overline{G} = G/D$ — фактор-группа произвольной вполне M (m)-факторизуемой группы G по некоторому ее нормальному делителю D и $\overline{A}$ — произвольная подгруппа группы $\overline{G}$. Докажем, что подгруппа $\overline{A}$ M (m)-дополняема в группе G.

Рассмотрим полный прообраз A группы $\overline{A}$. Так как A — подгруппа вполне M (m)-факторизуемой группы G, то существует такая подгруппа $B \subset G$, что $AB = G$ и группа $C = A \cap B$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности). Возьмем подгруппу $BD \subset G$; в фактор-группе $\overline{G}$ ей отвечает подгруппа $BD/D = \overline{B}$. Подгруппа $\overline{B}$ является M (m)-дополнением подгруппы $\overline{A}$ в группе $\overline{G}$. Действительно, полный прообраз группы $\overline{A}\overline{B}$ содержит группы A и B, а значит и группу $AB = G$, и потому группа $\overline{A} \cdot \overline{B}$ совпадает с группой $\overline{G}$. С другой стороны,

$$\overline{A} \cap B = A/D \cap BD/D = CD/D,$$

так как для любого класса $aD \in A/D \cap BD/D$ имеем $a \in A$, $a \in BD$ и далее

$$a \in A \cap (BD) = (AD) \cap (BD) = (A \cap B)\,D = CD.$$

Предпоследнее соотношение здесь справедливо потому, что из $bD \in AD$, где $b \in B$, следует существование таких элементов $a \in A$ и $d \in D$, что $b = ad$; так как $d \in D \subset A$, то отсюда получаем, что $b \in A$. Но тогда $(AD) \cap (BD) \subset \subset (A \cap B)\,D$. Обратное включение является очевидным. Так как $CD/D \simeq \simeq C/C \cap D$, то группа $CD/D = \overline{A} \cap \overline{B}$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности). Лемма доказана.

Лемма 3. *Всякая вполне m-факторизуемая группа является периодической.*

Справедливость леммы следует из наличия в непериодической группе G бесконечной циклической группы, которая, очевидно, не является вполне m-факторизуемой.

Лемма 4. *Всякая смешанная вполне M-факторизуемая абелева группа G расщепляема.*

Доказательство. Пусть P — периодическая часть группы G. Так как группа G вполне M-факторизуема, то существует такая подгруппа $B \subset G$, что $G = PB$ и пересечение $P \cap B$ — конечнопорожденная группа. Так как P — периодическая часть группы G, то $P \cap B$ — периодическая часть группы B. Ввиду того, что группа $P \cap B$ — конечнопорожденная, она является конечной, и поэтому имеет место разложение

$$B = (P \cap B) \times B_1,$$

где B_1 — группа без кручения. Очевидно, $P \cap B_1 = e$ и $PB_1 = PB = G$; следовательно, $G = P \times B_1$. Лемма доказана.

Изучение вполне M-факторизуемых абелевых групп, как следует из леммы 4, полностью сводится к изучению периодических вполне M-факторизуемых групп и вполне M-факторизуемых групп без кручения.

Лемма 5. *Прямое произведение конечного числа абелевых вполне M (m)-факторизуемых групп является вполне M (m)-факторизуемой группой.*

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая двух абелевых вполне $M(m)$-факторизуемых групп.

Пусть G_1 и G_2 — некоторые абелевы вполне $M(m)$-факторизуемые группы. Возьмем произвольную подгруппу $A \subset G_1 \times G_2$. Обозначим через A_1 и A_2 компоненты подгруппы A соответственно в G_1 и G_2. Подгруппа $A_2 \subset \subset G_2$ $M(m)$-дополняемая в группе G_2 и, значит, существует такая подгруппа $B_2 \subset G_2$, что $G_2 = A_2B_2$ и $C_2 = A_2 \cap B_2$ — группа, удовлетворяющая условию максимальности (минимальности). Рассмотрим подгруппу $A'_1 \subset G_1$, которую составляют первые компоненты тех элементов группы A, вторые компоненты которых входят в группу C_2. Для подгруппы $A'_1 \subset \subset G_1$, очевидно, существует такая подгруппа $B_1 \subset G_1$, что $G_1 = A'_1B_1$, и группа $C_1 = A'_1 \cap B_1$ удовлетворяет условию максимальности (минимальности).

Докажем, что подгруппа $B_1 \times B_2$ является $M(m)$-дополнением подгруппы A в группе $G_1 \times G_2$. Так как $C_2 \subset B_2$, то $C_2 \subset A\,(B_1 \times B_2)$ и тогда $A'_1 \subset A\,(B_1 \times B_2)$, а, значит, $A'_1B_1 = G_1 \subset A\,(B_1 \times B_2)$; отсюда получаем, что $A_2 \subset A\,(B_1 \times B_2)$ и далее $A_2B_2 = G_2 \subset A\,(B_1 \times B_2)$. Следовательно, $A\,(B_1 \times B_2) = G_1 \times G_2$. Далее имеем $A\,(B_1 \times B_2) \subset (A_1 \cap B_1) \times \times (A_2 \cap B_2)$; отсюда получаем

$$A \cap (B_1 \times B_2) \subset A \cap [(A_1 \cap B_1) \times C_2] \subset (A'_1 \cap A_1 \cap B_1) \times C_2 = C_1 \times C_2.$$

Последнее произведение удовлетворяет условию максимальности (минимальности). Лемма доказана.

Заметим для дальнейшего, что в случае абелевых групп условие максимальности равносильно условию существования конечной системы образующих элементов в группе, а также, что всякая бесконечная абелева группа с условием минимальности является прямым произведением конечной абелевой группы и конечного числа групп типа p^∞ по некоторым простым p, не обязательно различным [5].

§ 2. Периодические вполне $M(m)$-факторизуемые абелевы группы

Лемма 6. *Прямая сумма*

$$G = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_n\} + \ldots$$

примарных циклических групп порядков $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2, \ldots$ не является вполне $M(m)$-факторизуемой группой.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $A \subset G$

$$A = \{p_1a_1\} + \{p_2a_2\} + \ldots + \{p_na_n\} + \ldots$$

Пусть для некоторой подгруппы $B \subset G$ $A + B = G$. Тогда существуют такие элементы $c_n \in A$, $x_n \in B$, что $-c_n + x_n = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда получаем $a_n + c_n = x_n \in B$, и далее $p_nx_n = p_na_n + p_nc_n$. Так как $p_n^2a_n = 0$, то из последнего соотношения вытекает, что компонента элемента p_nx_n в группе $\{a_n\}$ есть p_na_n. Поэтому подгруппа $C = \{p_1x_1, p_2x_2, \ldots, p_nx_n, \ldots\} \subset A \cap B$ не может быть конечнопорожденной. Тем самым C является прямым произведением бесконечного числа циклических групп и, следовательно, не может удовлетворять условию максимальности (минимальности). Лемма доказана.

Следствие 1. *Прямая сумма бесконечного числа примарных циклических групп непростых порядков не является вполне $M(m)$-факторизуемой группой.*

Следствие 2. *Прямая сумма бесконечного числа групп типа p^∞ не является вполне $M(m)$-факторизуемой группой.*

Теорема 1. *Периодические вполне $M(m)$-факторизуемые абелевы группы исчерпываются прямыми суммами*

$$G = P + S + Q, \tag{2}$$

где P — прямая сумма произвольного множества примарных групп простых порядков или нулевая группа, S — прямая сумма конечного числа примарных циклических групп непростых порядков или нулевая группа и Q — прямая сумма конечного числа групп типа p^∞ или нулевая группа.

Доказательство. Прежде всего, всякая группа, разлагающаяся в прямую сумму вида (2), является вполне $M(m)$-факторизуемой. Действительно, слагаемое S является вполне $M(m)$-факторизуемой группой, потому что оно является конечной абелевой группой. Так как всякая группа типа p^∞ очевидно вполне $M(m)$-факторизуема, то ввиду леммы 5 и слагаемое Q является вполне $M(m)$-факторизуемой группой. Слагаемое P вполне факторизуемо, а значит и вполне $M(m)$-факторизуемо. Таким образом, каждое из трех слагаемых разложения $G=P+S+Q$ вполне $M(m)$-факторизуемо, тогда ввиду леммы 5 и группа G является вполне $M(m)$-факторизуемой.

Докажем теперь, что любая периодическая вполне $M(m)$-факторизуемая абелева группа G разлагается в прямую сумму вида (2). Рассмотрим сперва случай примарной p-группы G; в силу следствия 1 ее базисная подгруппа H может содержать не более чем конечное число циклических слагаемых непростых порядков и, значит, изоморфна прямой сумме $P+S$, где P — прямая сумма определенного множества групп порядка p или нулевая группа и S — прямая сумма конечного числа циклических p-групп непростых порядков или нулевая группа.

Таким образом, порядки элементов подгруппы H ограничены в совокупности. Будучи, кроме того, еще сервантной в группе G, подгруппа H выделяется в ней прямым слагаемым. Если фактор-группа G/H отлична от нулевой, то она является прямой суммой квазициклических p-групп. По следствию 2 эта прямая сумма состоит не более чем из конечного числа слагаемых. Таким образом,

$$G=P+S+Q, \tag{3}$$

где Q — прямая сумма конечного числа квазициклических p-групп или нулевая группа.

В общем случае периодическая абелева группа G разлагается в прямую сумму примарных групп, а каждое из примарных слагаемых, ввиду того, что группа G вполне $M(m)$-факторизуема, разлагается в прямую сумму вида (3). В силу следствия 1 число примарных циклических слагаемых группы G непростых порядков не более чем конечно. В силу следствия 2 число квазициклических слагаемых в полученном разложении также не более чем конечно. Тем самым рассматриваемая группа G разлагается в прямую сумму вида (2). Теорема доказана.

В силу леммы 3 теорема 1 описывает, в частности, весь класс вполне m-факторизуемых абелевых групп. Этот класс, ввиду теоремы 1, совпадает с классом периодических вполне M-факторизуемых абелевых групп. Ввиду результатов работы [4] (см. в ней следствие теоремы 4), каждый из этих классов совпадает с классом абелевых вполне F-факторизуемых групп.

§ 3. Абелевы вполне M-факторизуемые группы без кручения

Лемма 7. *Абелева группа G без кручения ранга* I *вполне M-факторизуема тогда и только тогда, когда ее тип не превосходит типа, содержащего характеристику, которая состоит из единиц и конечного числа бесконечностей.*

Необходимость. Абелеву группу G без кручения ранга I будем рассматривать как подгруппу аддитивной группы рациональных чисел. Пусть группа G вполне M-факторизуема и имеет тип больший, чем указанный в формулировке теоремы. Тогда группа G содержит подгруппу с характеристикой, имеющей бесконечное число двоек. Таким образом, в G найдется подгруппа

$$G_1=\left\{\frac{d}{p_1^2},\ \frac{d}{p_2^2},\ \ldots,\frac{d}{p_n^2},\ldots\right\},$$

где p_n, $n=1,\ 2,\ \ldots,$— различные простые числа, а d — некоторое целое число.

Рассмотрим фактор-группу группы G_1 по подгруппе $\{d\}$. В силу леммы 6 она не является вполне M-факторизуемой группой, что противоречит лемме 2. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть абелева группа G без кручения ранга I имеет тип, содержащий характеристику, состоящую из единиц и конечного числа бесконечностей, тогда

$$G=\left\{\frac{1}{p_1},\frac{1}{p_1^2},\ldots,\frac{1}{p_1^{n_1}},\ldots;\frac{1}{p_2},\frac{1}{p_2^2},\ldots,\frac{1}{p_2^{n_2}},\ldots;\ldots;\right.$$
$$\left.\frac{1}{p_s},\frac{1}{p_s^2},\ldots,\frac{1}{p_s^{n_s}},\ldots;\frac{1}{p_{s+1}},\frac{1}{p_{s+2}},\ldots\right\},$$

где $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s,\ p_{s+1},\ \ p_{s+2},\ldots$ — последовательность всех простых чисел, причем числам $p_1,\ \ldots,\ p_s$ соответствует символ ∞ в характеристике, остальным — 1. Покажем, что G — вполне M-факторизуемая группа.

Рассмотрим произвольную бесконечнопорожденную подгруппу $A\subset G$

$$A=\left\{\frac{b_1}{p_{11}^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot p_{1i_1}^{m_{1i_1}}},\ \frac{b_2}{p_{21}^{m_{21}}\cdot\ldots\cdot p_{2i_2}^{m_{2i_2}}},\ldots,\ \frac{b_t}{p_{t1}^{m_{t1}}\cdot\ldots\cdot p_{ti_t}^{m_{ti_t}}},\ldots\right\},$$

где числители образующих элементов взаимно просты со знаменателями.

Разобьем множество простых чисел, встречающихся в знаменателях образующих элементов группы A, на 3 части:

I) $r_{11},\ r_{12},\ \ldots,\ r_{1j_1}$ — подмножество тех простых чисел из множества $p_1,\ \ldots,\ p_s$, для которых показатели их степеней в знаменателях образующих элементов группы A ограничены некоторым числом N;

II) $r_{21},\ r_{22},\ \ldots,\ r_{2j_2}$ — подмножество тех простых чисел из множества $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_s$, для которых показатели их степеней в знаменателях образующих элементов группы A неограничены;

III) $r_{31},\ r_{32},\ \ldots,\ r_{3j_3}$ — те из чисел $p_{s+1},\ \ p_{s+2},\ \ldots,$ которые встречаются в знаменателе хотя бы одного из образующих элементов группы A. В группе G возьмем подгруппу

$$B=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{q_{11}},\dfrac{1}{q_{11}^2},\ldots,\dfrac{1}{q_{11}^{u_{11}}},\ldots;\dfrac{1}{q_{1v_1}},\dfrac{1}{q_{1v_1}^2},\ldots,\dfrac{1}{q_{1v_1}^{u_{v_1}}},\ldots;\dfrac{1}{q_{21}},\dfrac{1}{q_{22}},\ldots;\\[2mm] \dfrac{1}{r_{11}},\dfrac{1}{r_{11}^2},\ldots\dfrac{1}{r_{11}^{w_1}},\ldots;\ldots;\dfrac{1}{r_{1j_1}},\dfrac{1}{r_{1j_1}^2},\ldots,\dfrac{1}{r_{1j_1}^{w_{j_1}}},\ldots\end{array}\right\},$$

где $q_{11},\ \ldots,\ q_{1v_1}$ — простые числа из множества $p_1,\ \ldots,\ p_s$, не встречающиеся в знаменателях образующих элементов группы A, $q_{21},\ q_{22},\ \ldots$ — простые числа из множества $p_{s+1},\ \ p_{s+2},\ \ldots,$ обладающие тем же свойством.

Докажем, что подгруппа B является M-дополнением подгруппы A в группе G. Так как подгруппа B содержит все образующие элементы группы G, знаменатели которых являются такими простыми числами или степенями таких простых чисел, которые либо не встречаются в знаменателях образующих элементов группы A, либо встречаются и входят в (1), то $G=A+B$, если только группа $A+B$ содержит как те образующие элементы группы G, знаменатели которых являются числами из III), так и те образующие, знаменатели которых являются степенями чисел из II). Пусть r_{3j_3} — любое из чисел III). Так как оно входит в знаменатель хотя бы одного из образующих элементов группы A, то в ней содержится число $\frac{a}{r_{3j_3}}$, где a — целое и $(a, r_{3j_3}) = 1$; учитывая, что $\frac{r_{3j_3}}{r_{3j_3}} = 1 \in B$, получаем далее, что некоторая линейная комбинация элементов $\frac{a}{r_{3j_3}}$ и $\frac{r_{3j_3}}{r_{3j_3}}$ с целыми коэффициентами дает элемент $\frac{1}{r_{3j_3}} \in A + B$.

Если r_{2j_2} — какое-нибудь из чисел II) и $(r_{2j_2})^m$ — его степень, входящая в знаменатель хотя бы одного из образующих элементов группы A, то точно также получаем, что $\frac{1}{(r_{2j_2})^m} \in A + B$. Показатели степеней, с которыми число r_{2j_2} входит в эти знаменатели, неограничены, отсюда вытекает, что группа $A + B$ содержит все r_{2j_2}-е дроби. Таким образом,

$$G = A + B.$$

Осталось доказать, что группа $A \cap B$ удовлетворяет условию максимальности, другими словами, что $A \cap B$ — конечнопорожденная группа.

Дробь, входящая как в группу A, так и в группу B, имеет знаменатель, разлагающийся в произведение простых чисел, встречающихся в разложениях на простые множители знаменателей образующих элементов как группы A, так и группы B. Такими являются лишь числа I). Подгруппа группы A, содержащая лишь элементы со знаменателями, разлагающимися в произведение простых чисел из I), является конечнопорожденной, так как она входит, очевидно, в группу

$$C = \left\{\frac{1}{r_{11}^N}, \frac{1}{r_{12}^N}, \ldots, \frac{1}{r_{1j_1}^N}\right\}.$$

Общая часть групп A и B входит в группу C и, следовательно, удовлетворяет условию максимальности. Таким образом, группа G вполне M-факторизуема.

Все группы типа меньшего, чем тип группы G, изоморфны некоторым подгруппам из G и по лемме 1 являются вполне M-факторизуемыми. Лемма доказана.

Примечание. Пользуясь теоремой 1, можно получить более короткое доказательство леммы 7; однако оно не дает алгоритма для построения M-дополнения произвольной подгруппы.

Лемма 8. *Абелевы вполне M-факторизуемые группы без кручения имеют конечный ранг.*

Доказательство. Возьмем абелеву группу G без кручения бесконечного ранга. Лемма будет доказана, если в группе G найдется такая подгруппа, которая не является вполне M-факторизуемой группой.

Так как ранг группы G бесконечен, то в ней можно выделить подгруппу H, разлагающуюся в прямую сумму бесконечного множества бесконечных циклических групп. Покажем, что подгруппа H не является вполне M-факторизуемой группой.

Пусть

$$H = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_n\} + \ldots,$$

где $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — бесконечные циклические группы. В самом деле, если группа H вполне M-факторизуема, то ее фактор-группа по подгруппе

$$A = \{p_1^2 a_1\} + \{p_2^2 a_2\} + \ldots + \{p_n^2 a_n\} + \ldots,$$

где p_n, $n = 1, 2, \ldots$, — некоторые простые числа, должна быть вполне M-факторизуемой, однако это противоречит лемме 6. Лемма доказана.

Теорема 2. *Всякая абелева вполне M-факторизуемая группа G без кручения изоморфно вкладывается в конечную прямую сумму абелевых вполне M-факторизуемых групп без кручения ранга* I.

Доказательство. В силу леммы 8 данная группа G должна иметь некоторый конечный ранг n. Тогда

$$G \subset R_+^{(1)} + R_+^{(2)} + \ldots + R_+^{(n)}, \tag{4}$$

где каждая из групп R_+^i, $i = 1, 2, \ldots, n$, изоморфна аддитивной группе рациональных чисел. Ввиду соотношения (4)

$$G \subset R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \tag{5}$$

где R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ — группа i-х компонент элементов группы G в прямой сумме (4). Ранг каждой компоненты, очевидно, равен 1. Отображение, ставящее в соответствие всякому элементу из G его i-ю компоненту, является гомоморфизмом группы G на группу R_i. Тогда в силу леммы 2 каждая из групп R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, является вполне M-факторизуемой. Теорема доказана.

Следствие 3. *Абелевы вполне M-факторизуемые группы без кручения исчерпываются всеми подгруппами конечных прямых сумм абелевых вполне M-факторизуемых групп без кручения ранга* I.

Определение. Стержневой подгруппой абелевой группы без кручения G назовем подгруппу, порожденную произвольной максимальной системой линейно независимых элементов группы G.

Теорема 3. *Для того чтобы абелева группа G без кручения была вполне M-факторизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она имела конечный ранг и ее фактор-группа G/H по стержневой подгруппе H была вполне M-факторизуемой группой.*

Необходимость. Если G — абелева вполне M-факторизуемая группа без кручения, то в силу леммы 8 она имеет конечный ранг. Кроме того, любая ее фактор-группа и, в частности, фактор-группа G/H по стержневой подгруппе является вполне M-факторизуемой группой.

Достаточность. Пусть G — абелева группа без кручения ранга n и ее фактор-группа G/H по стержневой подгруппе является вполне M-факторизуемой группой. Выделим в группе G стержневую подгруппу $H = \{a_1\} + \{a_2\} + \ldots + \{a_n\}$, после чего вложим группу G в прямую сумму

$$R_+^{(1)} + R_+^{(2)} + \ldots + R_+^{(n)} \tag{6}$$

групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, так, чтобы $\{a_i\} \subset R_+^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Затем вложим группу G в прямую сумму

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \tag{7}$$

где R_i — группа i-х компонент элементов группы G в прямой сумме (6), $i = 1, 2, \ldots, n$.

По условию группа G/H является вполне M-факторизуемой. Допустим, что при этом группа G не является вполне M-факторизуемой, тогда группа R, а с ней, ввиду леммы 5, хотя бы одно из прямых слагаемых в (7), например R_1, не является вполне M-факторизуемой группой. Но R_1 — группа ранга I, тогда она содержит подгруппу P, изоморфную подгруппе

$$R_1' = \left\{\frac{1}{q_1^2}, \frac{1}{q_2^2}, \ldots, \frac{1}{q_k^2}, \ldots\right\}$$

аддитивной группы рациональных чисел R_+; здесь $q_1, \ldots, q_k, \ldots$ — некоторое бесконечное подмножество множества всех простых чисел. Так как

$P \simeq R_1'$, то и $\{P, a_1\} \simeq R_1'$. Пусть $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ — подмножество тех чисел из множества $q_1, \ldots, q_k, \ldots$, на квадраты которых делится элемент a_1 в группе $\{P, a_1\}$; это подмножество, очевидно, бесконечно. Подгруппа $Q = \left\{\frac{a_1}{p_1^2}, \frac{a_1}{p_2^2}, \ldots, \frac{a_1}{p_i^2}, \ldots\right\}$ группы $\{P, a_1\} \subset R_1$ изоморфна подгруппе $R_1'' = \left\{\frac{1}{p_1^2}, \frac{1}{p_2^2}, \ldots, \frac{1}{p_i^2}, \ldots\right\}$ группы R_+, при этом элементу $a_1 \in Q$ соответствует элемент $1 \in R_1''$. Рассмотрим фактор-группу $\{H, Q\}/H$, которая, очевидно, изоморфна группе $Q/Q \cap H$. Так как $Q \cap H = \{a_1\}$, то группа $Q/Q \cap H$ разлагается в прямую сумму бесконечного числа циклических групп с порядками, равными квадратам простых чисел. Но тогда, ввиду теоремы 1, группа $Q/Q \cap H$, а значит и группа $\{H, Q\}/H$ не может быть вполне M-факторизуемой. Однако ввиду лемм 1 и 2 это противоречит предположению о полной M-факторизуемости группы G/H. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Hall, Complemented groups, Journ. L. Math. Soc., **12**, 1937, 201—204.
2. Н. В. Черникова, Группы с дополняемыми подгруппами, Матем. сб., т. 39, 1956.
3. С. Н. Черников, Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб., т. 35, 1954.
4. М. И. Сергеев, Вполне FN-факторизуемые группы, ДАН СССР, т. 155, № 3, 1964.
5. А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», М., 1967.

Поступила 1.VI 1971 г.

Институт математики АН УССР