К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях

Л. Д. Акуленко

Постановка задачи. В настоящей статье рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где независимая переменная t изменяется на неограниченном интервале $t \in (-\infty, \infty)$; переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ изменяются, вообще говоря, в бесконечной области евклидова пространства E^n; числовой параметр λ принимает значения из сегмента $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Относительно функций F_i предположим выполненными следующие требования. По $t, x_1, x_2, \ldots, x_p (p \leqslant n)$ они периодичны с периодами T, $T_1, T_2, \ldots, T_p$, соответственно, не зависящими от λ. Пусть далее F_i непрерывны по t и имеют частные производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$ до второго порядка включительно, удовлетворяющие условиям Липшица с независящими от t постоянными в неограниченной по координатам $x_1, x_2, \ldots, x_p$ области $G \in E^n$.

Предположим, что при некотором частном значении $\lambda = \lambda_0$ система (1) допускает семейство решений вида [1]

$$x_i^0 = \varphi_i(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \delta_i \frac{T_i}{2\pi} \omega t + \psi_i(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \tag{2}$$

(зависимость от числового параметра λ_0 не указываем), где $\delta_i = 1$ при $i \leqslant p$ и $\delta_i = 0$. если $i > p$; $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ — частота внешнего воздействия; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ $(m \leqslant n)$ — совокупность параметров, которые могут изменяться в некоторой области Γ; ψ_i — периодические функции t периода T Таким образом, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_p$ соответствуют вращению: за любой промежуток времени $\Delta t = T$ они получают приращения $\Delta x_i = T_i$. Переменные $x_{p+1}, \ldots, x_n$ — чисто периодические функции периода T для всех $\{\gamma_i\} \in \Gamma$.

Системы типа

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) + \mu f_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu), \tag{3}$$

где $\mu \in [0, \mu_2]$ — малый параметр, в случае, когда все x^0_1 периодичны, рассматривались в [2] методами Ляпунова и Пуанкаре. В случае, когда X_s и f_s аналитические функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu$, указана схема построения возмущенного решения. Система (1) является обобщением возмущенных колебательных систем вида (3).

Системы с колеблющимися и вращающимися переменными, аналогичные (1), с помощью различных модификаций метода усреднения [1, 3] исследовались на ограниченном промежутке времени $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ или $\sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ([1, 5—12]), где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Колебательные системы типа

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \varepsilon Y(t, x; \varepsilon) \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = X(t, x) + \varepsilon Y(t, x; \varepsilon)$$

(x, X, Y — векторы), а также подобные системы с медленным параметром $\tau = \varepsilon t$ и скалярной фазой «внешней силы» θ: $\theta = \nu(\tau) > 0$ для $\tau \in [0, L]$ ($L = \text{const}$) рассматривались методом интегральных многообразий в работах [3, 13—23].

Поставим задачу построить и исследовать стационарное [2, 3] вращательно-колебательное решение системы (1) для всех $t \in (-\infty, \infty)$ при достаточно близких к λ_0 значениях λ (но $\lambda \neq \lambda_0$), обращающееся в (2) при $\lambda = \lambda_0$.

Так как решение (2) зависит от m произвольных параметров, то система в вариациях

$$\frac{dz_i}{dt} = p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + \ldots + p_{in}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

где $p_{ik}(t) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ x_i=\varphi_i}}$ — периодические функции t периода T, имеет m независимых частных решений

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(t, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)}{\partial \gamma_j} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, будут иметь период T. Следовательно, характеристическое уравнение для системы в вариациях (4) имеет m корней, равных 1, которым соответствует m групп решений [2, 4]. Будем предполагать, что остальные $(n - m)$ корней этого уравнения отличны от 1. Тогда каждая из m групп состоит из одного периодического решения периода T. В этом случае система, сопряженная (4), имеет m и только m периодических решений, которые мы обозначим через $\psi_{i1}, \psi_{i2}, \ldots, \psi_{im} (i = 1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что функции ψ_{ij} выбраны такими, что выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ik}\psi_{ij} = \delta_{kj} \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, m), \tag{5}$$

где σ_{kj} — символ Кронекера. При сделанных предположениях относительно характеристического уравнения для системы в вариациях (4) такой выбор функций ψ_{ij} всегда возможен [2].

Основные результаты. Введем обозначение

$$P_j(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_k}{\partial \lambda}\right)_0 \psi_{kj} dt,$$

где символ $\left(\frac{\partial F_k}{\partial \lambda}\right)_0$ означает, что производная $\frac{\partial F_k}{\partial \lambda}$ взята при $\lambda = \lambda_0$, $x_i = \varphi_i$.

Тогда можно сформулировать утверждение:

Теорема. *Если при $\lambda = \lambda_0$ система (1) допускает m-параметрическое семейство решений (2), принадлежащее области определения G функций F_i, для которого параметры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, порождающие семейство*

(2), *удовлетворяют m нелинейным уравнениям*

$$P_j(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = 0 \tag{6}$$

и при этом

$$\Delta(\varrho) = \left| \begin{matrix} \frac{\partial P_1}{\partial \gamma_1} - \varrho & \frac{\partial P_1}{\partial \gamma_2} & \ldots \frac{\partial P_1}{\partial \gamma_m} \\ \frac{\partial P_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial P_2}{\partial \gamma_2} - \varrho & \ldots \frac{\partial P_2}{\partial \gamma_m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{\partial P_m}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial P_m}{\partial \gamma_2} & \ldots \frac{\partial P_m}{\partial \gamma_m} - \varrho \end{matrix} \right|_{\gamma_j = \gamma_j^*} = 0 \tag{7}$$

не имеет нулевых корней, то существует для всех $t \in (-\infty, \infty)$ при достаточно близких к λ_0 значениях λ единственное решение основной системы (1) *вида*

$$x_i(t, \lambda) = \varphi_i(t, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_m^*) + (\lambda - \lambda_0)\,\overline{\varphi}_i,$$

где $\overline{\varphi}_i$ имеют период T, лежащее в области G и обращающееся в $\varphi_i(t, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_m^*)$ при $\lambda = \lambda_0$.

Это вращательно-колебательное решение системы (1) будет асимптотически устойчивым при $\lambda > \lambda_0$, для $t \geqslant t_0$, если все корни уравнения (7) и $(n - m)$ характеристических показателей системы в вариациях (4) имеют отрицательные вещественные части и неустойчиво, если хотя бы одна из них положительна.

Замечания. 1. Аналогичное утверждение справедливо для $\lambda < \lambda_0$ ($\lambda, \lambda_0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$). 2. Единственность решения понимается здесь в том смысле, что каждому простому корню уравнений (6) : $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_m^*$ соответствует одно решение системы (1). Теорема предполагает, что таких изолированных корней может быть несколько, даже счетное множество.

Доказательство теоремы. Построение формального решения. В системе (1) положим

$$x_i = \varphi_i + \varepsilon y_i, \qquad \varepsilon = \lambda - \lambda_0, \tag{8}$$

где y_i — периодические добавки периода T. (1) примет вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right)_0 + \varepsilon Y(t, y_1, y_2, \ldots, y_n; \varepsilon), \tag{9}$$

где

$$Y_i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_l \partial x_k}\right)_0 y_l y_k + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial x_l}\right) y_l +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda^2}\right)_0 + Y_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n; \varepsilon),$$

причем $Y_i^*|_{\varepsilon=0} \equiv 0$. Затем в системе (9) сделаем еще замену

$$y_i = y_i^0 + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где y_i^{0*} — частное решение порождающей системы для y_i:

$$\frac{dy_i^0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} y_k^0 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}\right)_0. \tag{10}$$

Система (9) примет вид

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k + \varepsilon Y_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n; \varepsilon). \tag{11}$$

Заметим, что условия (6) для параметров γ_j получаются из требований периодичности функции y_i^{0*} и выражают общеизвестный факт ортогональности свободных членов уравнений (10) фундаментальному периодическому решению сопряженной системы.

Периодическое решение системы (11) ищем методом последовательных приближений по схеме

$$\frac{dv_i^{(l)}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k^{(l)} + \varepsilon Y_i(t, y_1^{(l-1)}, y_2^{(l-1)}, \ldots, y_n^{(l-1)}; \varepsilon), \tag{12}$$

которое имеет вид (см. [2]):

$$v_i^{(l)} = \varepsilon v_i^{(l)*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(l)}\varphi_{ij} \equiv \varepsilon L_i[t, Y^{(l-1)}] + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(l)}\varphi_{ij}, \tag{13}$$

где $v_i^{(l)*}$ — частное решение, $M_j^{(l)}$ — некоторые постоянные, а L_i — линейные относительно $Y_k^{(l-1)}$ операторы, удовлетворяющие условиям

$$|L_i[t, Y^{(l)}]| < A \cdot B, \qquad (Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}) \tag{14}$$

для всех $t \in (-\infty, \infty)$, где $A = \max |Y_i^{(l)}|$, а величина B зависит только от коэффициентов $p_{ik}(t)$. Общий вид этих операторов можно найти в [2]. Покажем, как практически найти любое по ε приближение решения.

1) Нулевое приближение найдем из системы

$$\frac{dv_i^{(0)}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k^{(0)}.$$

Ее решение $v_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{m} M_j^{(0)}\varphi_{ij}$, где $M_j^{(0)}$ — пока произвольные постоянные.

2) Следующее приближение $v_i^{(1)}$ определим из системы

$$\frac{dv_i^{(1)}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}v_k^{(1)} + \varepsilon Y_i(t, y_1^{0*} + v_1^{(0)}, \ldots, y_n^{0*} + v_n^{(0)}; 0),$$

решение которой имеет вид

$$v_i^{(1)} = \varepsilon v_i^{(1)*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(1)}\varphi_{ij} \equiv \varepsilon L_i[t, Y^{(0)}] + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(1)}\varphi_{ij}.$$

Условия периодичности величин $v_i^{(1)*}$ дают m уравнений для определения постоянных $M_j^{(0)}$. Как нетрудно показать [2], эти уравнения будут линейными вида

$$\sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial P_i}{\partial \gamma_j}\right|_{\gamma_j=\gamma_j^*} M_j^{(0)} = -\left.\int_0^T \sum_{k=1}^{n} (Y_k)_0\Big|_{M_j^{(0)}=0} \psi_{ki}\,dt\,\right|_{\gamma_j=\gamma_j^*}. \tag{15}$$

Определитель системы (15) отличен от нуля, так как по условиям теоремы уравнение (7) не имеет нулевых корней. Следовательно, существует единственное ее решение $M_j^{(0)*} = M_j^{(0)}(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_m^*)$.

3) Вообще, любое l-приближение определяется из системы (12). Условие периодичности частного решения $v_i^{(l)*}$ определяет величины $M_j^{(l-1)}$ как функции γ_i^* и ε. Однако для $l \geqslant 2$ уравнения для определения постоянных $M_j^{(l-1)}$ будут уже нелинейными вида

$$\sum_{j=1} \frac{\partial P_i}{\partial \gamma_j}\bigg|_{\gamma_j=\gamma_j^*} M_j^{(l-1)} = -\int_0^T \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial \lambda^2}\right)_0 + \sum_{p,q=1}^n \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_p \partial x_q}\right)_0 y_p^{0*} y_q^{0*} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial \lambda \partial x_p}\right)_0 y_p^{0*} + \overline{Y}(t, M_1^{(l-1)}, M_2^{(l-1)}, \ldots, M_m^{(l-1)}; \varepsilon) \right] \psi_{ki} dt, \tag{16}$$

где $\overline{Y}_k|_{\varepsilon=0} \equiv 0$, т. е. $M_j^{(l-1)}(\gamma^*, 0) \equiv M_j^{(0)*}$. Величины $M_j^{(l-1)}$ из системы (16) можно определять последовательными приближениями по схеме

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial P_i}{\partial \gamma_j^*} M_{j,p}^{(l-1)} = -\int_0^T \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial \lambda^2}\right)_0 + \sum_{p,q=1}^n \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial x_p \partial x_q}\right)_0 y_p^{0*} y_q^{0*} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^n \left(\frac{\partial^2 F_k}{\partial \lambda \partial x_p}\right)_0 y_p^{0*} + \overline{Y}_k(t, M_{1,p-1}^{(l-1)}, M_{2,p-1}^{(l-1)}, \ldots, M_{m,p-1}^{(l-1)}; \varepsilon) \right] \psi_{ki} dt,$$

взяв в качестве нулевого приближения $M_{j,0}^{(l-1)} = M_j^{(0)*}$. В силу гладкости $\overline{Y}_k$ при достаточно малом $|\varepsilon|$ эти приближения, очевидно, будут сходящимися.

Таким образом, формально построено единственное решение системы (1) в виде

$$x_i = \varphi_i(t, \gamma^*) + \varepsilon \left\{ y_i^{0*} + \varepsilon L_i[t, Y] + \sum_{j=1}^m M_j \varphi_{ij} \right\}.$$

Обоснование полученных приближений. Для доказательства сходимости приближений (12) при $(\lambda - \lambda_0)$ достаточно малом будем исходить из системы (9), которую запишем в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)\, y_j + f_i(t) + \varepsilon \Phi_i(t, y; \varepsilon), \tag{17}$$

где $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ — малая величина, а функции Φ_i обладают для всех $t \in (-\infty, \infty)$ первыми частными производными по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и ε в некоторой ограниченной области g и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при достаточно малом $|\varepsilon|$.

Периодическое решение системы (17) будем искать последовательными приближениями по схеме

$$\frac{dy_i^{(l)}}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)\, y_j^{(l)} + f_i(t) + \varepsilon \Phi_i(t, y^{(l-1)}; \varepsilon).$$

Предположим, что $\{y_i^{0*}\} \in g$, так что при достаточно малом $|\varepsilon|$

$$x_i^{(1)} = \varphi_i(t, \gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*) + \varepsilon \left(y_i^{0*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(0)*} \varphi_{ij} \right) \in G.$$

где y_i^{0*} — частное решение порождающей системы для (17).

В [2] обоснование последовательных приближений систем типа (17) проведено для случая $p_{ij} = \text{const}$. Очевидно, аналогичные рассуждения могут быть проведены и в случае периодических коэффициентов $p_{ij}(t)$ при условиях, наложенных в главе I на систему в вариациях (4)

Введем обозначения

$$\sigma_i^{(l)} = \sigma_i^{(l)}(t, M_1, M_2, \ldots, M_m; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_{ij} + \varepsilon L_i[t, \Phi_1^{(l-1)}, \Phi_2^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}],$$

$$R_j^{(l)} = R_j^{(l)}(M_1, M_2, \ldots, M_m; \varepsilon) = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(t, \sigma_1^{(l)}, \sigma_2^{(l)}, \ldots, \sigma_n^{(l)}; \varepsilon)\, \psi_{kj} dt.$$

Покажем, что $y_i^{(l)} \in g$. Для этого предположим, что эти условия выполняются для $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(l-1)}$, то есть имеют место неравенства

$$|L_i[t, \Phi_1^{(k)}, \ldots, \Phi_n^{(k)}]| < A \cdot B \qquad (k = 0, 1, \ldots, l-1),$$

где $A = \max \Phi_i^{(k)}$ в области g их определения, а B зависит только от p_{ij}. Тогда из выражений

$$\frac{\partial R_i^{(l)}}{\partial M_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \int_0^T \frac{\partial \Phi_k(t, \sigma_1^{(l)}, \ldots, \sigma_n^{(l)}; \varepsilon)}{\partial \sigma_q} \psi_{ki} \varphi_{qj} dt$$

легко видеть, что существуют такие два независящие от индекса l положительные числа μ и η, что при

$$|M_i - M_i^{(0)*}| < \mu \tag{18}$$

и

$$|\varepsilon| \leqslant \eta, \tag{19}$$

справедливо неравенство

$$\left| \frac{D(R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)})}{D(M_1, M_2, \ldots, M_m)} \right| > \gamma_0 > 0, \tag{20}$$

где γ_0 не зависит от индекса l. Будем предполагать, что μ и η выбраны настолько малыми, что $\{\sigma_i^{(l)}\} \in g$.

Потребуем, чтобы при $|\varepsilon| \leqslant \eta$ постоянные $M_i^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon)$ лежали в области (18) за счет выбора величины η. Тогда будет выполняться при достаточно малом η условие $\{y_i^{(l)}\} \in g$. Покажем, что действительно величину η можно выбрать настолько малой, что при выполнении условия (19) выполняются неравенства

$$|M_i^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon) - M_j^{(0)*}| \leqslant \mu \qquad (\gamma^* = \{\gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*\}). \tag{21}$$

Обозначим с этой целью

$$c = \max \left| \frac{D(R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}}{D(M_1, \ldots, M_{j-1}, \varepsilon, M_{j+1}, M_m)} \right| \tag{22}$$

во всей области определения величин $R_i^{(l)}$. При этом, очевидно, можно считать, что величина c не зависит от l. Предположим, что величина η удовлетворяет условию $\eta < \frac{\gamma_0 \mu}{c}$.

Покажем, что тогда имеют место неравенства (21). Действительно, так как $M_j^{(l)}(\gamma^*, 0) = M_j^{(0)*}$, то неравенства (21) будут выполняться в силу непрерывной зависимости при достаточно малом $|\varepsilon|$. Пусть теперь предположено противное, т. е. при некотором $\varepsilon = \varepsilon^*$ хотя бы одно неравенство (21) перешло в равенство. Мы утверждаем, что это может случиться при $\varepsilon^* > \eta$. Докажем это предположив противное, т. е. что $\varepsilon^* \leqslant \eta$. Тогда

$$|M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon) - M_j^{(0)*}| = |M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon^*) - M_j^{(l)}(\gamma^*, 0)| = |\varepsilon^*| \left| \frac{\partial M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \theta\varepsilon^*} =$$

$$= |\varepsilon^*| \left| \frac{\dfrac{D(R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)})}{D(M_1, \ldots, M_{j-1}, \varepsilon, M_{j+1}, \ldots, M_m)}}{\dfrac{D(R_1^{(l)}, R_2^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)})}{D(M_1, M_2, \ldots, M_m)}} \right|_{\substack{M_j = M_j^{(l)}(\gamma^*, \theta\varepsilon^*) \\ \varepsilon = \theta\varepsilon^*}},$$

где $0 < \theta < 1$. Так как $\theta\varepsilon^* < \varepsilon^*$, то $M_j^{(l)}(\gamma^*, \theta\varepsilon^*)$ принадлежит области (21), и на основании (20), (22) можно записать

$$|M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon^*) - M_j^{(0)*}| < |\varepsilon^*| \frac{c}{\gamma_0} \leqslant \eta \frac{c}{\gamma_0} < \mu.$$

Но это противоречит предположению, что при $\varepsilon = \varepsilon^*$ хотя бы одно из неравенств (21) переходит в равенство. Таким образом, доказано утверждение, что при $|\varepsilon| \leqslant \eta$ выполняются неравенства (21), т. е. $\{y_i^{(l)}\} \in g$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$.

Покажем теперь, что при достаточно малом $|\varepsilon|$ последовательные приближения

$$y_i^{(l)} = y_i^{0*} + \sum_{k=1}^{m} M_k^{(l)} \varphi_{ik} + \varepsilon L_i [t, \Phi_1^{(l-1)}, \Phi_2^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}] \tag{23}$$

сходятся к периодическому решению системы уравнений (17). Для доказательства этого утверждения оценим разности последовательных приближений. На основании предыдущего можно записать

$$|L_i[t, \Phi_1^{(l-1)}, \Phi_2^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}] - L_i[t, \Phi_1^{(l-2)}, \Phi_2^{(l-2)}, \ldots, \Phi_n^{(l-2)}]| < a_l, \tag{24}$$

$$|M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon) - M_j^{(l-1)}(\gamma^*, \varepsilon)| < b_l, \tag{25}$$

где a_l и b_l — постоянные, для которых можно указать не зависящие от l верхние пределы. Так как функции Φ_i удовлетворяют условиям Липшица, то на основании линейности L_i имеем

$$|\Phi_i^{(l)} - \Phi_i^{(l-1)}| < \Omega \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(l)} - y_i^{(l-1)}| \leqslant \Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \left\{ \sum_{k=1}^{m} (M_k^{(l)} - M_k^{(l-1)}) \varphi_{ik} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon (L_i[t, \Phi_1^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}] - L_i[t, \Phi_1^{(l-2)}, \ldots, \Phi_n^{(l-2)}]) \right\} \right| < n\Omega (m\beta b_l + \varepsilon a_l),$$

где Ω — постоянная Липшица, β — верхний предел функций $|\varphi_{ik}|$. По аналогии с (24), учитывая (14), можно написать

$$|L_i[t, \Phi_1^{(l)}, \ldots, \Phi_n^{(l)}] - L_i[t, \Phi_1^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}]| < a_{l+1}, \tag{26}$$

где

$$a_{l+1}= n\Omega B\,(m\beta b_l+\varepsilon a_l). \tag{27}$$

Оценим теперь разности $M_j^{(l+1)}-M_j^{(l)}$. С этой целью рассмотрим вспомогательные уравнения

$$\Psi_j^{(l)}(N_1^{(l)},N_2^{(l)},\ldots,N_m^{(l)};\,\varepsilon,\delta)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{28}$$

где введены обозначения

$$\Psi_j^{(l)}(N_1,\ldots,N_m;\,\varepsilon,\delta)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^T\Phi_i(t,\xi_1^{(l)},\ldots,\xi_n^{(l)};\,\varepsilon)\,\psi_{ij}dt,$$

$$\xi_i^{(l)}=y_i^{0*}+N_1\varphi_{i1}+N_2\varphi_{i2}+\ldots+N_m\varphi_{im}+\varepsilon L_i[t,\Phi_1^{(l-1)},\ldots,\Phi_n^{(l-1)}]+$$
$$+\delta L_i[t,\Phi_1^{(l)}-\Phi_1^{(l-1)},\ldots,\Phi_n^{(l)}-\Phi_n^{(l-1)}],$$

в которых $0\leqslant\delta\leqslant\varepsilon$ — вспомогательный параметр. На основании (26) величину η в неравенстве (19) можно выбрать столь малой, чтобы $\{\xi_i^{(l)}\}\in g$, если постоянные N_j лежат в области

$$|N_j-M_j^{(0)*}|\leqslant\nu, \tag{29}$$

поэтому функции $\Psi_j^{(l)}$ вполне определены. Из (28) имеем

$$M_j^{(l+1)}(\gamma^*,\varepsilon)=N_j^{(l)}(\varepsilon,\varepsilon),\qquad M_j^{(l)}(\gamma^*,\varepsilon)=N_j^{(l)}(\varepsilon,0).$$

Отсюда можно написать

$$|M_j^{(l+1)}-M_j^{(l)}|=|N_j^{(l)}(\varepsilon,\varepsilon)-N_j^{(l)}(\varepsilon,0)|=|\varepsilon|\cdot\left|\frac{\partial N_j^{(l)}(\varepsilon,\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=\theta\varepsilon}=$$
$$=|\varepsilon|\cdot\left|\frac{\dfrac{D(\Psi_1^{(l)},\Psi_2^{(l)},\ldots,\Psi_m^{(l)})}{D(N_1,\ldots,N_{j-1},\delta,N_{j+1},\ldots,N_m)}}{\dfrac{D(\Psi_1^{(l)},\Psi_2^{(l)},\ldots,\Psi_m^{(l)})}{D(N_1,N_2,\ldots,N_m)}}\right|_{\substack{N_k=N_k(\varepsilon,\theta\varepsilon)\\ \delta=\theta\varepsilon}},$$

где $0<\theta<1$. Обозначим через

$$Q=\max\left|\frac{D(\Psi_1^{(l)},\Psi_2^{(l)},\ldots,\Psi_m^{(l)})}{D(N_1,\ldots,N_{j-1},\delta,N_{j+1},\ldots,N_m)}\right|$$

во всей области существования определителя. Нетрудно видеть, что существует положительная постоянная E, удовлетворяющая неравенству

$$\left|\frac{D(\Psi_1^{(l)},\Psi_2^{(l)},\ldots,\Psi_m^{(l)})}{D(N_1,N_2,\ldots,N_m)}\right|>E \tag{30}$$

в области (19), (29). Аналогично, как и для корней $M_j^{(l)}$ уравнения

$$R_j^{(l)}(M_1^{(l)},M_2^{(l)},\ldots,M_m^{(l)},\varepsilon)=0,$$

можно показать, что корни $N_j^{(l)}(\varepsilon,\delta)$ уравнений (28) лежат в области (29), если

$$\eta<\frac{\nu E}{Q},$$

где все постоянные можно считать не зависящими от l. Далее,

$$\frac{\partial\Psi_j^{(l)}}{\partial\delta}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^T\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_k^{(l)}}L_k[t,\Phi_1^{(l)}-\Phi_1^{(l-1)},\ldots,\Phi_n^{(l)}-\Phi_n^{(l-1)}]\,\psi_{ij}dt.$$

Поэтому в области (19), (29) и $0 \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$ на основании (26) справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial \Psi_j^{(l)}}{\partial \delta}\right| < Tn^2 S \varkappa a_{l+1},$$

где S — верхний предел производных $\left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}\right|$ в области их существования, а $\varkappa$ — то же для $|\psi_{ij}|$. Очевидно, в указанной области изменения переменных справедлива оценка

$$\left|\frac{D(\Psi_1^{(l)}, \Psi_2^{(l)}, \ldots, \Psi_m^{(l)})}{D(N_1, \ldots, N_{j-1}, \delta, N_{j+1}, \ldots, N_m)}\right|_{\substack{N_k = N_k^{(l)}(\varepsilon, \theta\varepsilon)\\ \delta=\theta\varepsilon}} < Pa_{l+1}, \tag{31}$$

где P не зависит от l. Неравенства (30) — (31) дают оценку

$$|M_j^{(l+1)}(\gamma^*, \varepsilon) - M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon)| < b_{l+1},$$

где

$$b_{l+1} = \frac{P}{E} \cdot |\varepsilon| \cdot a_{l+1}. \tag{32}$$

Из (32) вытекает, что $\frac{b_l}{a_l}$ не зависит от индекса l. Тогда на основании (27) $\frac{b_{l+1}}{b_l}$ и $\frac{a_{l+1}}{a_l}$ тоже не зависят от l, так как

$$\frac{a_{l+1}}{a_l} = n\Omega B\left(m\beta\,\frac{b_l}{a_l} + |\varepsilon|\right),$$

$$\frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{P}{E}\,\frac{a_{l+1}}{b_l}|\varepsilon| = \frac{P_n \Omega B}{E}\left(m\beta + \frac{a_l}{b_l}|\varepsilon|\right) \cdot |\varepsilon|.$$

Отсюда видим, что $\frac{a_{l+1}}{a_l} < 1$ и $\frac{b_{l+1}}{b_l} < 1$ при достаточно малых значениях ε. Поэтому можно утверждать, что последовательности $L_i[t, \Phi_1^{(l)}, \ldots, \Phi_n^{(l)}]$ и $M_j^{(l)}(\gamma^*, \varepsilon)$ абсолютно и равномерно сходятся. Следовательно, последовательности $y_i^{(l)}$ также равномерно сходятся к некоторой периодической вектор-функции, целиком лежащей в области g, такой, что

$$y_i(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = y_i^{0*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(0)*} \varphi_{ij},$$

а

$$x_i(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \varphi_i(t, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \ldots, \gamma_m^*).$$

Покажем теперь, что функции $y_i(t, \varepsilon)$ удовлетворяют уравнениям (17). Действительно,

$$\lim_{l\to\infty} \Phi_i(t, y_1^{(l)}, y_2^{(l)}, \ldots, y_n^{(l)}; \varepsilon) = \Phi_i(t, y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \ldots, y_n(t, \varepsilon); \varepsilon).$$

Следовательно, в силу гладкости L_i:

$$\lim_{l\to\infty} L_i[t, \Phi_1^{(l)}, \ldots, \Phi_n^{(l)}] = L_i[t, \Phi_1, \ldots, \Phi_n]|_{y_k = y_k(t, \varepsilon)}.$$

Отсюда, переходя к пределу в (23) при $l \to \infty$, получим:

$$y_i(t, \varepsilon) = \lim_{l\to\infty} y_i^{(l)} = y_i^{0*} + \lim_{l\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{m} M_j^{(l)} \varphi_{ij} + L_i[t, \Phi_1^{(l-1)}, \ldots, \Phi_n^{(l-1)}]\right\} =$$

$$= y_i^{0*} + \sum_{j=1}^{m} M_j \varphi_{ij} + \varepsilon L_i[t, \Phi]|_{y_k = y_k(t, \varepsilon)}.$$

В силу гладкости полученных выражений, дифференцируя последнее соотношение по t, получим требуемое утверждение.

Об устойчивости построенного решения. Аналитические системы с малым параметром вида (3) при тех же предположениях о корнях характеристического уравнения системы в вариациях (4) исследовались в [2]. Наша задача несколько сложнее. Однако к системе (1) в основном применима методика, развитая в [2]. В системе (1) сделаем замену $x_i \to x_i + z_i$, где z_i — вариации. Ограничиваясь линейным приближением по z_i, получим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dz_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (p_{ik} + \varepsilon q_{ik}) z_k, \tag{33}$$

где

$$q_{ik} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_k \partial x_l} \right)_0 y_l^{(0)} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial x_k} \right)_0 + F_{ik}(t, \gamma^*, \varepsilon),$$

$$p_{ik}(t) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_0 = p_{ik}(t + T),$$

причем $F_{ik}(t, \gamma^*, 0) \equiv 0$.

Характеристические показатели системы в вариациях (33) при $\varepsilon = 0$ обращаются в характеристические показатели системы (4). Так как характеристические показатели $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ при $\varepsilon = 0$, а $\operatorname{Re} \alpha_i < 0$ $(m < i \leqslant n)$, то для определения устойчивости первые должны быть подсчитаны более точно. Для этого положим в уравнениях (33):

$$z_i = e^{\varepsilon \alpha(\gamma^*, \varepsilon) t} \psi_i \qquad (\psi_i(t + T) = \psi_i(t)).$$

Тогда система (33) примет вид

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} (p_{ik} + \varepsilon q_{ik}) \psi_k - \varepsilon \alpha \psi_i. \tag{34}$$

Искомые характеристические показатели уравнений (33) определятся более точно (с учетом ε) из условий существования периодического решения у системы (34), которое будем искать в виде

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{m} N_k \varphi_{ik} + \varepsilon \xi_i(t, \varepsilon),$$

где N_k — постоянные. Для ξ_i в нулевом приближении по ε получим уравнения

$$\frac{d\xi_i^0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \xi_k^0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (q_{ik})_0 \varphi_{kj} N_j^{(0)} - \alpha_0 \sum_{j=1}^{m} N_j^{(0)} \varphi_{ij},$$

которые можно преобразовать к виду

$$\frac{d\xi_i^0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \xi_k^0 + \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_{ik}}{\partial \gamma_j^*} y_k^{(0)} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial \gamma_j^*} \right)_0 \right] N_j^{(0)} - \alpha_0 \sum_{j=1}^{m} N_j^{(0)} \varphi_{ij}.$$

Условия периодичности ξ_i^0 суть известные условия ортогональности свободных членов периодическим решениям системы, сопряженной (4). Для нулевого приближения ξ_i эти условия имеют вид

$$(A_{1j} - T\alpha_0\delta_{1j})\, N_1^{(0)} + \ldots + (A_{mj} - T\alpha_0\delta_{mj})\, N_m^{(0)} = 0, \tag{35}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а

$$A_{qj} = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial p_{ik}}{\partial \gamma_q^*}\, y_k^{(0)} + \left(\frac{\partial^2 F_i}{\partial \lambda \partial \gamma_q^*} \right)_0 \right] \psi_{ij} dt = \frac{\partial P_j}{\partial \gamma_q^*}. \quad [2]$$

Система (35) имеет нетривиальное решение при условии

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \gamma_1} - \alpha_0 T & \dfrac{\partial P_1}{\partial \gamma_2} \ldots & \dfrac{\partial P_1}{\partial \gamma_m} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial \gamma_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial \gamma_2} - \alpha_0 T \ldots & \dfrac{\partial P_2}{\partial \gamma_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial P_m}{\partial \gamma_1} & \dfrac{\partial P_m}{\partial \gamma_2} \ldots \dfrac{\partial P_m}{\partial \gamma_m} & - \alpha_0 T \end{matrix} \right|_{\gamma_j = \gamma_j^*} = 0.$$

Обозначив $\alpha\, T = \varrho$, получим уравнение $\Delta(\varrho) = 0$, совпадающее с (7). Таким образом, если $\operatorname{Re}\, \varrho_i < 0\ (i \leqslant m)$, то решение системы (1) будет асимптотически устойчивым при достаточно малом положительном значении ε для $t \geqslant t_0$. Если хотя бы один характеристический показатель имеет положительную вещественную часть, то решение будет неустойчивым. Если же некоторые из этих показателей имеют нулевую вещественную часть, то они должны быть подсчитаны более точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Волосов, Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, УМН, т. 17, № 6, 1962.
2. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963.
4. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., 1950.
5. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Асимптотический расчет некоторых вращательных движений в резонансном случае, ДАН СССР, т. 161, № 6, 1965, 1303.
6. Б. И. Моргунов, Стационарные резонансные режимы некоторых вращательных движений, ДАН СССР, т. 155, № 2, 1964, 277.
7. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Асимптотика некоторых вращательных движений, ДАН СССР, т. 151, № 6, 1963, 1260.
8. Ф. Л. Черноусько, Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 3, № 3, 1963, 528.
9. Н. Н. Моисеев, Асимптотика быстрых вращений, Журн. вычисл. матем. и матем. физики, т. 3, № 1, 1963, 145.
10. Г. Е. Кузмак, О вычислении асимптотических решений, соответствующих незамкнутым интегральным кривым «эталонного» уравнения, ДАН СССР, т. 125, № 5, 1959, 992.
11. В. И. Гайдук, Асимптотические уравнения для нелинейных систем с движением, близким к периодическому, Сб. статей «Приближенные методы решения дифференциальных уравнений», изд-во «Наукова думка», вып. 2, К., 1964.
12. В. И. Арнольд, Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы, ДАН СССР, т. 161, № 19, 1965.
13. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., изд-во «Наука», 1964.
14. Ю. А. Митропольский, О некоторых дифференциальных уравнениях, встречающихся в теории релаксационных колебаний, УМЖ, № 2, 1957.

15. О. Б Лыкова, О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения, УМЖ, № 3, 1957.
16. О. Б. Лыкова, О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит, УМЖ, № 4, 1957.
17. О. Б. Лыкова, Об исследовании индивидуальных решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в «нерезонансном» случае, УМЖ, № 3, 1958.
18. О. Б. Лыкова, Об исследовании индивидуальных решений системы дифференциальных уравнений с малым параметром на двумерном локальном интегральном многообразии в случае резонанса, УМЖ, № 4, 1958.
19. Ю. А. Митропольский, О периодических решениях системы нелинейных дифференциальных уравнений, правые части которых недифференцируемы, УМЖ, № 4, 1959.
20. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, К вопросу о периодических решениях системы нелинейных уравнений с малым параметром, УМЖ, № 4, 1960.
21. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Об интегральном многообразии дифференциальных уравнений, содержащих медленные и быстрые движения, УМЖ, № 2, 1964.
22. О. Б. Лыкова, Об одночастотных колебаниях в системе с медленно меняющимися параметрами, УМЖ, № 2, 1957.
23. О. Б. Лыкова, О некоторых свойствах решений системы нелинейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися параметрами, УМЖ, № 3, 1960.

Поступила 1.X 1965 г.
Москва