1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Разложение прямого произведения неприводимых представлений полупростых алгебр Ли на неприводимые представления

А. У. Климык

В последние несколько лет полупростые алгебры Ли нашли широкое применение в теории элементарных частиц. Но использование конкретных алгебр для классификации элементарных частиц и других проблем физики требует не только общих теорем теории, но и методов, быстро приводящих к цели. В физике широко используется разложение прямого (или кронекеровского, или тензорного) произведения конечномерных неприводимых представлений алгебр Ли на неприводимые компоненты. Известные методы такого разложения [1, 2] весьма громоздки и поэтому практически не применимы уже для алгебр третьего ранга. В этой работе предлагается другой, более простой метод разложения.

Пусть G — комплексная полупростая алгебра Ли ранга l и H — ее картановская подалгебра. Определим базис $h_1, h_2, \ldots, h_l$ подалгебры H следующим образом. Если H^* — сопряженное пространство к пространству H, то корни алгебры G принадлежат пространству H^*. Среди них существует l простых корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$, т. е. таких, что каждый корень α записывается $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$, где числа k_i все неотрицательны или неположительны целые. Каждому простому корню α_i сопоставим вектор $h_{\alpha_i} \in H^*$, удовлетворяющий условию $\alpha_i(h) = (h_{\alpha_i}, h)$ для всех $h \in H$, где (h_{α_i}, h) — *скалярное* произведение векторов h_{α_i} и h, определяемое формой Киллинга. Тогда $h_i = \frac{2h_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Через K будем обозначать множество линейных форм $\lambda \in H^*$, для которых значения на базисных векторах (λ, h_i) целые, а через K_+ — подмножество из K, характеризуемое неравенствами $(\lambda, h_i) \geqslant 0$. Элементы из K_+ называются доминантными.

В дальнейшем будем рассматривать неприводимые представления алгебры G в конечномерных векторных пространствах. Как известно [3, 4], такое представление однозначно характеризуется старшим весом Λ, $\Lambda \in K_+$. Другие веса представления принадлежат K.

Характером неприводимого представления D_Λ алгебры G со старшим весом Λ называется функция

$$\chi_\Lambda(h) = \operatorname{tr} \exp D_\Lambda(h), \quad h \in H.$$

Характер представления можно записать через веса представления:

$$\chi_\Lambda(h) = \sum_{\Lambda_i} n_{\Lambda_i} \exp(\Lambda_i, h), \quad h \in H, \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем весам представления, n_{Λ_i} — кратность соответствующего веса Λ_i.

С другой стороны, согласно формуле Вейля

$$\chi_{\Lambda}(h)=\frac{X_{\Lambda}(h)}{\Delta}=\frac{\sum\limits_{S\in W}\det S\exp(S(\Lambda+R),h)}{\sum\limits_{S\in W}\det S\exp(SR,h)}, \tag{2}$$

где R — полусумма положительных корней, W — группа Вейля алгебры G.

При использовании представлений в физике элементарных частиц большую роль играют веса представлений и их кратности. О них речь еще будет идти ниже. Обратимся к вопросу о прямом произведении представлений.

Если $D_{\Lambda'}$ и $D_{\Lambda''}$ — неприводимые представления алгебры G со старшими весами Λ' и Λ'' соответственно, то прямое произведение этих представлений есть вполне приводимым представлением [3], [4] и поэтому разлагается в прямую сумму неприводимых представлений:

$$D_{\Lambda'}\otimes D_{\Lambda''}=\sum_{\Lambda_i}\oplus m_{\Lambda_i}D_{\Lambda_i}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по высшим весам представлений, причем m_{Λ_i} — кратность соответствующего представления D_{Λ_i}, входящего в разложение.

Формулу для кратностей m_{Λ_i} вывел Штейнберг [1]:

$$m_{\Lambda_i}=\sum_{S,T\in W}\det(ST)\,P[S(\Lambda'+R)+T(\Lambda''+R)-(\Lambda_i+2R)]. \tag{4}$$

Здесь $P[M]$ — число разбиений линейной формы M в сумму положительных корней, Λ' и Λ'' — старшие веса перемножаемых представлений.

Замечательно, что формула (4) не требует знания весовых диаграмм* перемножаемых представлений. Но видим, что для определения m_{Λ_i} необходимо провести двойное суммирование по группе Вейля и вычисление значений функции $P[M]$. Легко видеть, что такое вычисление кратностей даже для алгебр третьего ранга весьма громоздко и поэтому затрудняет использование этой формулы.

Штрауман [2] в некоторой степени упростил формулу (4), но не исключил двойного суммирования по группе Вейля и функции $P[M]$.

Предполагаем, что весовая диаграмма одного из перемножаемых представлений известна, и при этом условии выводим намного более простую формулу для кратностей m_{Λ_i}. В геометрической форме вопрос о разложении прямого произведения двух представлений с известной весовой диаграммой одного из представлений рассматривался Шпейзером [5] и Берендсом и др. [6]. Геометрический метод для алгебр ранга выше второго связан с некоторыми трудностями и неудобствами. Дадим явную формулу для кратности m_{Λ_i} и, как следствие, получим формулу разложения**.

Л е м м а. *Пусть* $M\in K$ *и*

$$F_M(h)=\sum_{S\in W}\det S\exp(SM,\ h),\quad h\in H.$$

---

* Так будем называть совокупность всех весов представления.

** Идея выражения m_{Λ_i} через кратности весов исходит от Р. Брауэра и Г. Вейля (см., например, [8]).

Если $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — *множество всех преобразований из* W, *для которых* $T_iM = M$, то

$$\sum_i \det T_i \exp(T_iM, h) = 0.$$

Доказательство. Так как группа Вейля просто транзитивна на совокупности фундаментальных областей Вейля (см. [4]), то среди преобразований $T_1, T_2, \ldots, T_n$ существует симметрия S_α относительно простого корня α. Как легко видеть, совокупность $T_1, T_2, \ldots, T_n$ совпадает с совокупностью $S_\alpha T_1, S_\alpha T_2, \ldots, S_\alpha T_n$. Умножение T_i на S_α изменяет знак детерминанта преобразования. Поэтому в совокупности $T_1, T_2, \ldots, T_n$ есть парное число элементов и половина из них имеет детерминант, равный -1, а половина — $+1$. Отсюда и следует справедливость леммы.

Элементы из K, получаемые из данного элемента под действием преобразования группы Вейля W, называются эквивалентными. Доминантный элемент, эквивалентный данному элементу M, $M \in K$, условимся обозначать $\{M\}$.

Теорема. *Если* $D_{\Lambda'}$ *и* $D_{\Lambda''}$ — *неприводимые представления алгебры* G *и имеет место* (3), *то*

$$m_{\Lambda_i} = \sum_{\substack{\Lambda'_j \\ \{\Lambda'_j+\Lambda''+R\}=\Lambda_i+R}} n_{\Lambda'_j}\beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по всем весам Λ'_j *представления* $D_{\Lambda'}$, *для которых* $\{\Lambda'_j+\Lambda''+R\} = \Lambda_i + R$, $n_{\Lambda'_j}$ — *кратность веса* Λ'_j *в* $D_{\Lambda'}$, $\beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} = 0$, *если существует* $S \in W$, $S \neq E$ (E — *единичное преобразование из* W) *такое, что* $S(\Lambda'_j+\Lambda''+R) = \Lambda'_j+\Lambda''+R$, *и* $\beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} = \det T$, $T \in W$, *если такого* S *не существует и* $T(\Lambda'_j+\Lambda''+R) = \{\Lambda'_j+\Lambda''+R\}$.

Доказательство. Так как характер прямого произведения представлений равен произведению их характеров, из (3) имеем

$$\chi_{\Lambda'}(h)\,\chi_{\Lambda''}(h) = \sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i}\chi_{\Lambda_i}(h). \tag{6}$$

Умножим обе части (6) на

$$\Delta = \sum_{S\in W} \det S \exp(SR, h).$$

Учитывая (2), получаем:

$$\chi_{\Lambda'}(h)\,X_{\Lambda''}(h) = \sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i}X_{\Lambda_i}(h). \tag{7}$$

Выражения (1) и (2) позволяют записать левую часть (7) так:

$$\chi_{\Lambda'}(h)\,X_{\Lambda''}(h) = \Big[\sum_{\Lambda'_j} n_{\Lambda'_j}\exp(\Lambda'_j, h)\Big]\cdot\Big[\sum_{S\in W}\det S\exp(S(\Lambda''+R), h)\Big] =$$

$$= \sum_{S\in W}\sum_{\Lambda'_j}\det S\, n_{\Lambda'_j}\exp(\Lambda'_j + S(\Lambda''+R), h).$$

Так как совокупность всех весов представления инвариантна относительно преобразований группы Вейля, то

$$\chi_{\Lambda'}(h)\, X_{\Lambda''}(h) = \sum_{S\in W} \sum_{\Lambda'_j} \det S n_{\Lambda'_j} \exp(S\Lambda'_j + S(\Lambda'' + R),\ h) =$$

$$= \sum_{S\in W} \det S \sum_{\Lambda'_j} n_{\Lambda'_j} \exp(S(\Lambda'_j + \Lambda'' + R),\ h). \tag{8}$$

Правую часть (7) запишем в виде

$$\sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i} X_{\Lambda_i}(h) = \sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i} \sum_{S\in W} \det S \exp(S(\Lambda_i + R),\ h) =$$

$$= \sum_{S\in W} \det S \sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i} \exp(S(\Lambda_i + R),\ h). \tag{9}$$

Подставим (8) и (9) в (7) и приравняем выражения с доминантными линейными формами в экспонентах:

$$\sum_{\Lambda_i} m_{\Lambda_i} \exp(\Lambda_i + R,\ h) = \sum_{\Lambda'_j} n_{\Lambda'_j} \beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} \exp(\{\Lambda'_j + \Lambda'' + R\},\ h). \tag{10}$$

При этом из леммы следует, что $\beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} = 0$, если существует такое $S \in W$, что $S(\Lambda'_j + \Lambda'' + R) = \Lambda'_j + \Lambda'' + R$. В противном случае $\beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} = \det T$, $T \in W$, если T переводит $\Lambda'_j + \Lambda'' + R$ в $\{\Lambda'_j + \Lambda'' + R\}$. Из (10) получаем (5).

Следствие. *Если $D_{\Lambda'}$ и $D_{\Lambda''}$ — неприводимые представления алгебры G, то*

$$D_{\Lambda'} \otimes D_{\Lambda''} = \sum_{\Lambda'_j} n_{\Lambda'_j} \beta_{\Lambda'_j+\Lambda''+R} D_{\{\Lambda'_j+\Lambda''+R\}-R}, \tag{11}$$

где суммирование ведется по всем весам представления $D_{\Lambda'}$, а сумма, получаемая после приведения подобных, будет прямой.

Справедливость следствия вытекает из подсчета кратностей представлений в (11) и из (5).

Поскольку использование выведенных формул предполагает знание весовой диаграммы одного из перемножаемых представлений, сделаем относительно ее нахождения несколько замечаний. Антоином и Шпейзером [7] дан геометрический метод нахождения весовых диаграмм. Их метод очень удобен для алгебр ранга 2 и весьма громоздок для алгебр большего ранга. Нижеприводимые замечания применимы к алгебрам произвольного ранга в одинаковой степени.

Нахождение весовой диаграммы представления сводится к нахождению доминантных весов и их кратностей. Вся весовая диаграмма получается действием группы Вейля.

При нахождении доминантных весов следует иметь в виду, что если Λ — доминантный вес неприводимого представления, α — один из положительных корней и $\Lambda - \alpha$ — доминантно, то $\Lambda - \alpha$ тоже доминантный вес этого представления. Действительно, из теории представлений известно, что если Λ и $\Lambda - k\alpha$ есть веса, то весами являются также $\Lambda - j\alpha$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Подействуем на вес Λ элементом S_α группы Вейля, соответствующим корню α:

$$S_\alpha \Lambda = \Lambda - \frac{2(\Lambda,\ \alpha)}{(\alpha,\ \alpha)}\,\alpha.$$

Так как $\frac{2(\Lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} > 0$ ввиду доминантности $\Lambda - \alpha$, то $\Lambda - \alpha$ — вес представления.

Таким образом, нахождение доминантных весов сводится к всевозможным вычитаниям от старшего веса и от получаемых в процессе вычитания весов положительных корней, не выходя из области доминантности.

При нахождении кратностей следует учитывать следующее: веса $\Lambda - k\alpha$, где α — простой корень, а Λ — старший вес, имеют кратность 1; количество всех весов представления, учитывая их кратности, равно размерности представления. Как это будет проиллюстрировано в примере, во многих случаях только эта информация позволяет узнать кратности всех весов. При недостаточности этой информации эффективный способ для вычисления кратностей весов дает рекуррентная формула Фрейденталя:

$$[(\Lambda + R, \Lambda + R) - (\Lambda_j + R, \Lambda_j + R)]\, n_{\Lambda_j} = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \alpha > 0}}^{\infty} n_{\Lambda_j + k\alpha} (\Lambda_j + k\alpha, \alpha), \quad (12)$$

где суммирование ведется по k и по всем положительным корням алгебры.

Рассмотрим отдельно классические алгебры A_l, B_l, C_l, D_l. Для удобства веса и корни будем рассматривать как векторы $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, компоненты которых есть значения соответствующих линейных форм на базисе подалгебры Картана H. Как увидим ниже, формулами (5), (11), (12) особенно просто пользоваться, когда веса и корни рассматривать в прямоугольной декартовой системе координат.

А л г е б р а A_l. В декартовой $l+1$-мерной системе координат E_{l+1} корни e_{ik} имеют вид

$$e_{ik} = e_i - e_k, \quad i \neq k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, l+1,$$

где e_i — единичные орты координатной системы.
Тогда

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i<k} e_{ik} = \frac{1}{2}(l, l-2, \ldots, -l+2, -l).$$

Простыми корнями являются e_{ii+1}, $i = 1, 2, \ldots, l$. Вес $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ в координатной системе E_{l+1} имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_{l+1})$, которые находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{l}{l+1}\lambda_1 + \frac{l-1}{l+1}\lambda_2 + \ldots + \frac{1}{l+1}\lambda_l;$$

$$x_2 = -\frac{1}{l+1}\lambda_1 + \frac{l-1}{l+1}\lambda_2 + \ldots + \frac{1}{l+1}\lambda_l;$$

$$x_3 = -\frac{1}{l+1}\lambda_1 - \frac{2}{l+1}\lambda_2 + \ldots + \frac{1}{l+1}\lambda_l;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{l+1} = -\frac{1}{l+1}\lambda_1 - \frac{2}{l+1}\lambda_2 - \ldots - \frac{l}{l+1}\lambda_l.$$

Отсюда $\lambda_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Группа Вейля W в E_{l+1} порождается перестановками $x_i \leftrightarrow x_k$ и является группой всех перестановок элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{l+1}$.

Вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_{l+1})$ будет доминантным, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{l+1}$. Поэтому в E_{l+1} нахождение доминантного вектора $\{M\}$, эквивалентного

M, сводится к соответствующим перестановкам координат. При этом $\beta_M=0$, если хотя бы две координаты вектора M совпадают. В противном случае $\beta_M = \pm 1$ в зависимости от того, парная или непарная подстановка переводит вектор в доминантный.

Пример. Перемножим и разложим в прямую сумму неприводимых компонент представления со старшими весами $\Lambda' = (1, 1, 0, 0, 0)$, $\Lambda'' = (1, 1, 1, 0, 0)$ алгебры A_5. $\dim D_{\Lambda'} = 70$, $\dim D_{\Lambda''} = 896$.
Веса Λ' и Λ'' в системе E_6 имеют соответственно координаты

$$x_1' = \frac{5}{6}1 + \frac{4}{6}1 = \frac{3}{2}, \qquad x_1'' = \frac{5}{6}1 + \frac{4}{6}1 + \frac{3}{6}1 = 2,$$

$$x_2' = -\frac{1}{6}1 + \frac{4}{6}1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2'' = -\frac{1}{6}1 + \frac{4}{6}1 + \frac{3}{6}1 = 1,$$

$$x_3' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_3'' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 + \frac{3}{6}1 = 0,$$

$$x_4' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_4'' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 - \frac{3}{6}1 = -1,$$

$$x_5' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_5'' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 - \frac{3}{6}1 = -1,$$

$$x_6' = -\frac{1}{2}1 - \frac{2}{6}1 = -\frac{1}{2}, \qquad x_6'' = -\frac{1}{6}1 - \frac{2}{6}1 - \frac{3}{6}1 = -1.$$

Найдем весовую диаграмму представления $D_{\Lambda'}$, выраженную в системе E_6. Так как e_{ik} имеет i-ю координату равную 1, k-ю координату равную -1, а остальные координаты нули, то доминантными весами этого представления будут

$$\Lambda' = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \Lambda' - e_{13} = \\ = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Легко видеть, что существует 30 весов, эквивалентных Λ', и 20 весов, эквивалентных $\Lambda' - e_{13}$. Кратность веса Λ' равна 1. Поэтому кратность веса $\Lambda' - e_{13}$ равна $\dfrac{70-30}{20} = 2$. Для прямого произведения согласно (11) получаем*:

$$D(\Lambda') \otimes D(\Lambda'') = D\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) + \\ + D\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) + \\ + D\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) + \\ + D\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) + \\ + D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) +$$

* Для удобства записываем $D(\Lambda)$ вместо D_Λ.

$$+D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)-$$

$$-D\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)-$$

$$-D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)-$$

$$-D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)-$$

$$-D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)-$$

$$-D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)+$$

$$+2D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

где высшие веса записаны в системе E_6.

Таким образом:

$$D(\Lambda') \oplus D(\Lambda'') = D(2, 2, 1, 0, 0) \oplus D(3, 0, 2, 0, 0) \oplus D(3, 1, 0, 1, 0) \oplus$$
$$\oplus D(0, 3, 1, 0, 0) \oplus D(0, 0, 3, 0, 0) \oplus D(1, 0, 0, 2, 0) \oplus 2D(1, 1, 2, 0, 0) \oplus$$
$$\oplus 2D(1, 2, 0, 1, 0) \oplus 2D(2,0,1,1,0) \oplus D(2, 1, 0, 0, 1) \oplus 2D(0, 1, 1, 1, 0) \oplus$$
$$\oplus D(0, 2, 0, 0, 1) \oplus D(1, 0, 1, 0, 1).$$

Алгебра B_l. В декартовой системе координат E_l корни алгебры записываются

$$\pm e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l; \quad \pm e_i \pm e_k, \quad i \neq k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, l,$$

тогда $R = \frac{1}{2}(2l-1, 2l-3, \ldots, 1)$.

Простые корни $e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; e_l. Вес $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ в декартовой системе имеет координаты:

$$x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{l-1} + \frac{1}{2}\lambda_l,$$

$$x_2 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_{l-1} + \frac{1}{2}\lambda_l,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{l-1} = \lambda_{l-1} + \frac{1}{2}\lambda_l,$$

$$x_l = \frac{1}{2}\lambda_l,$$

отсюда $\lambda_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $\lambda_l = 2x_l$.

Группа Вейля порождается перестановками $x_i \leftrightarrow x_k$, $x_i \leftrightarrow -x_k$, $x_i \leftrightarrow -x_i$. При этом, если $S \in W$, то $\det S = \pm 1$ в зависимости от того, или S есть произведение парного или непарного числа таких перестановок.

Вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ доминантный, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_l \geqslant 0$. Нахождение доминантного вектора $\{M\}$, эквивалентного M, сводится к перестановкам и сменам знаков координат. При этом $\beta_M = 0$, если хотя бы две координаты вектора M равны по абсолютному значению или если хотя бы одна координата равна 0.

А л г е б р а C_l. В декартовой координатной системе корнями алгебры являются

$$\pm 2e_i,\ i = 1, 2, \ldots, l; \quad \pm e_i \pm e_k, \quad i \neq k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, l.$$

Тогда $R = (l, l-1, \ldots, 1)$. Простые корни: $e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $2e_l$. Вес $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ в системе E_l имеет координаты

$$x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_l,$$

$$x_2 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_l,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_l = \lambda_l,$$

отсюда $\lambda_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $\lambda_l = x_l$. Группа Вейля и условия доминантности вектора такие же, как для группы B_l. Поэтому то же можно сказать и о коэффициентах β_M.

А л г е б р а D_l. В декартовой координатной системе корнями алгебры являются $\pm e_i \pm e_k$, $i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots, l$, значит $R = (l-1, l-2, \ldots, 0)$. Простые корни: $e_i - e_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $e_{l-1} + e_l$. Вес $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ в системе E_l имеет координаты

$$x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{l-2} + \frac{1}{2}(\lambda_{l-1} + \lambda_l),$$

$$x_2 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_{l-2} + \frac{1}{2}(\lambda_{l-1} + \lambda_l),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{l-1} = \frac{1}{2}(\lambda_{l-1} + \lambda\ ),$$

$$x_l = \frac{1}{2}(-\lambda_{l-1} + \lambda_l),$$

отсюда $\lambda_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l-1$; $\lambda_l = x_{l-1} + x_l$. Группа Вейля порождается перестановками $x_i \leftrightarrow x_k$, $x_i \leftrightarrow -x_k$, $i \neq k$ — это группа всех перестановок над $x_1, x_2, \ldots, x_l$ с парным числом смен знаков.

Вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ доминантный, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{l-1} \geqslant |x_l|$. Нахождение доминантного вектора $\{M\}$, эквивалентного M, сводится к перестановкам и сменам знаков парного числа координат. При этом $\beta_M = 0$, если хотя бы две координаты вектора M равны по абсолютной величине. В противном случае $\beta_M = \pm 1$ в зависимости от того, парное или непарное число вышеуказанных перестановок переводит вектор M в доминантный.

В заключение выражаю глубокую признательность научному руководителю О. С. Парасюку за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Штейнберг, Общая теорема Клебша — Гордана, Математика (сб. пер.), 6 : 5; 1962, 142—143.
2. N. Straumann, On the Clebsch—Gordan Series of Simple Lie Algebras, Helv. Phys. Acta, **38**, 1965, 56—64.
3. Н. Джекобсон, Алгебры Ли, изд-во «Мир», М., 1964.
4. Теория алгебр Ли, Топология групп Ли (семинар «Софус Ли»), ИЛ, М., 1962.
5. D. Speiser, Lecture notes, Istambul Summer School, 1962.
6. R. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, W. Lee, Simple Groups and Strong Interaction Symmetries, Rev. Mod. Phys., **34**, 1962, 1—39.
7. J.—P. Antoine, D. Speiser, Characters of Irreducible Representations of the Simple Groups, J. Math. Phys., **5**, 1964, 1226—1234, 1560—1571.
8. Г. Вейль, Классические группы, их представления и инварианты, ИЛ, М., 1957.

Поступила 10.XII 1965 г.
Киев