1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Теорема о «вилке» в задаче Коши для нелинейного уравнения с частными производными высших порядков

*Ю. И. Ковач*

1. Рассмотрим задачу Коши для уравнений

$$\frac{\partial^{2n} U(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = f\left(x, y, U, U_x, \ldots, \frac{\partial^r U}{\partial x^s \partial y^m}\right) = f[U] \tag{1}$$

$$(s + m = r < 2n; \quad s, m = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

с начальными данными на кривой $l$:

$$U(x, y)\big|_l = 0, \quad p_{sm}(x, y)\big|_l = \frac{\partial^r U(x, y)}{\partial x^s \partial y^m}\bigg|_l = 0. \tag{2}$$

Считаем, что в некоторой области $\overline{D}$ функция $f$ и ее частные производные первого порядка относительно аргументов $U, U_x, U_y, \ldots$ непрерывны. Пусть $\overline{B}$ — проекция области $\overline{D}$ на плоскость $xoy$.

Область $B$ образована двумя парами характеристик уравнения (1), которые проведены через концы дуги $l$ параллельно координатным осям. Эта область расположена вправо от кривой $l$, уравнение которой $y = \psi(x)$; $l$ — гладкая и [1,2]

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(x) < 0.$$

В работах [3, 4] рассмотрено уравнение (1), когда непрерывные производные первого порядка для функции $f$ в области $\overline{D}$ удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial f}{\partial p_{sm}} \geqslant 0 \qquad (s + m = r < 2n; \quad s, m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Цель настоящей работы заключается в распространении результатов работ [3, 4] на случай, когда $\frac{\partial f}{\partial p_{sm}}$ только непрерывны.

Пусть в области $\overline{D}$ удовлетворяются условия [5]

$$M_{sm} \leqslant \frac{\partial f}{\partial p_{sm}}, \tag{*}$$

где $M_{sm}$ — постоянные.

Для задачи Коши (1), (2) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть при* $(x, y) \in \overline{B}$ *существуют функции* $V_0(x, y)$ $(Z_0(x, y))$, *обладающие свойствами*:

а) *они непрерывны вместе со своими частными производными до n-го порядка включительно*;

б) *эти функции удовлетворяют начальным условиям* (2);

в) $$\frac{\partial^{2n} Z_0(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} - f[Z_0] - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \left( \frac{\partial^r Z_0}{\partial x^s \partial y^m} - \frac{\partial^r V_0}{\partial x^s \partial y^m} \right) = \gamma_0(x, y) \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^{2n} V_0(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} - f[V_0] + \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \left( \frac{\partial^r Z_0}{\partial x^s \partial y^m} - \frac{\partial^r V_0}{\partial x^s \partial y^m} \right) = \delta_0(x, y) \leqslant 0. \tag{4}$$

*Тогда при* $(x, y) \in \overline{B}$ *справедливы неравенства*:

$$V_0(x, y) \leqslant U(x, y) \leqslant Z_0(x, y), \ldots, \frac{\partial^r V_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r U(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r Z_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m}$$

$$(s + m = r < 2n; \quad s, m = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Доказательство теоремы разобьем на три части.

1. Докажем, что можно построить последовательности $\{Z_k\}$, $\{V_k\}$ такие, что $V_k \leqslant V_{k+1}$ $(Z_k \geqslant Z_{k+1})$ всюду в $\overline{B}$. Введем обозначения:

$$A_{sm}^{(k)}(x, y) = \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \left( \frac{\partial^r Z_k}{\partial x^s \partial y^m} - \frac{\partial^r V_k}{\partial x^s \partial y^m} \right), \tag{6}$$

$$\gamma_k(x, y) = \frac{\partial^{2n} Z_k}{\partial x^n \partial y^n} - f[Z_k] - A_{sm}^{(k)}(x, y), \tag{7}$$

$$\delta_k(x, y) = \frac{\partial^{2n} V_k}{\partial x^n \partial y^n} - f[V_k] + A_{sm}^{(k)}(x, y). \tag{8}$$

Определим $\{Z_k\}$, $\{V_k\}$ по формулам

$$Z_k = Z_{k-1} - \sigma_{k-1}, \qquad V_k = V_{k-1} + \omega_{k-1}, \tag{9}$$

где $\sigma_{k-1}(x, y)$, $\omega_{k-1}(x, y)$ — решения уравнений

$$\frac{\partial^{2n} \sigma_{k-1}(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = \gamma_{k-1}(x, y), \qquad \frac{\partial^{2n} \omega_{k-1}(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = -\delta_{k-1}(x, y) \tag{10}$$

с начальными условиями (2) на кривой $l$.

В работе [4] эти решения даются формулами

$$\sigma_{k-1}(x, y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} \gamma_{k-1}(t, \tau)\, d\tau,$$

$$\omega_{k-1}(x, y) = -\int\limits_{\varphi(y)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} \delta_{k-1}(t, \tau)\, d\tau, \tag{11}$$

где $x = \varphi(y)$ — уравнение кривой $l$, разрешенное относительно $x$.

Докажем, что если $\gamma_0(x, y) \geqslant 0$ $(\delta_0(x, y) \leqslant 0)$ при $(x, y) \in \overline{B}$, то и $\gamma_1(x, y) \geqslant 0$ $(\delta_1(x, y) \leqslant 0)$. Обозначив $Z_0(x, y) - V_0(x, y) = W_0(x, y)$, из (3) и (4) получим

$$\frac{\partial^{2n} W_0(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} - \sum_{s,m} \left[ |M_{sm}| - M_{sm} + \left( \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{sm}} - M_{sm} \right) \right] \frac{\partial^r W_0}{\partial x^s \partial y^m} + \delta_0(x, y) - \\ - \gamma_0(x, y) = 0, \qquad (12)$$

где $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{sm}}$ — значение производной в некоторой точке рассматриваемой области. Для уравнения (12) в работах [4, 6] доказана теорема о дифференциальном неравенстве. Начальные условия (2) для функции $W_0(x, y)$ нулевые. Подстановка нуля вместо функции $W_0$ дает невязку $\delta_0(x, y) - \gamma_0(x, y) \leqslant 0$. Следовательно, функция, тождественно равная нулю, будет нижней функцией для функции $W_0 = Z_0 - V_0 \geqslant 0$.

Из теоремы 2 работ [6, 7] следует справедливость неравенств:

$$Z_0(x, y) \geqslant V_0(x, y), \ldots, \frac{\partial^r Z_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \geqslant \frac{\partial^r V_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m}.$$

В силу (11) имеем:

$$\sigma_0(x, y) \geqslant 0, \ldots, \frac{\partial^r \sigma_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \geqslant 0, \quad \omega_0(x, y) \geqslant 0, \ldots, \frac{\partial^r \omega_0(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \geqslant 0$$

при $\gamma_0(x, y) \geqslant 0$, $\delta_0(x, y) \leqslant 0$.

Из (7) при $k = 1$ получим:

$$\gamma_1(x, y) = \frac{\partial^{2n} Z_1}{\partial x^n \partial y^n} - f[Z_1] - A_{sm}^{(1)}(x, y).$$

Используя (9), (10) и применяя к $f[Z_0] - f[Z_1]$ формулу Тейлора, найдем:

$$\gamma_1(x, y) = \sum_{s,m} \left[ |M_{sm}| + \left( \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{sm}} - M_{sm} \right) \right] \frac{\partial^r \sigma_0}{\partial x^s \partial y^m} + \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \times \\ \times \frac{\partial^r \omega_0}{\partial x^s \partial y^m} \geqslant 0.$$

Аналогично

$$\delta_1(x, y) = \frac{\partial^{2n} V_1}{\partial x^n \partial y^n} - f[V_1] + A_{sm}^{(1)}(x, y) = -\sum_{s,m} \Bigg[ |M_{sm}| + \\ \left( \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{sm}} - M_{sm} \right) \Bigg] \frac{\partial^r \omega_0}{\partial x^s \partial y^m} - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r \sigma_0}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant 0.$$

Таким же путем доказывается, что если $\gamma_k(x, y) \geqslant 0$ $(\delta_k(x, y) \leqslant 0)$ при $(x, y) \in \overline{B}$, то и $\gamma_{k+1}(x, y) \geqslant 0$ $(\delta_{k+1}(x, y) \leqslant 0)$; следовательно, $V_k \leqslant V_{k+1}$ $(Z_k \geqslant Z_{k+1})$.

2. Докажем, что последовательности функций $\{V_k\}, \{V_{kx}\}, \ldots, \{Z_k\}, \{Z_{kx}\}, \ldots$ с ростом $k$ стремятся равномерно к соответствующим функциям $U, U_x, \ldots$ Из (9) получим $\sigma_{k-1} + \omega_{k-1} = Z_{k-1} - Z_k + V_k - V_{k-1} = W_{k-1} - W_k$, откуда, дифференцируя и используя (6), (7), (9) и (10), а также формулу Тейлора, найдем

$$\frac{\partial^{2n} W_k}{\partial x^n \partial y^n} = \frac{\partial^{2n} W_{k-1}}{\partial x^n \partial y^n} - [\gamma_{k-1} - \delta_{k-1}] = \sum_{s,m} \Bigg[ 2|M_{sm}| - M_{sm} + \\ + \left( \frac{\partial f}{\partial p_{sm}} - M_{sm} \right) \Bigg] \frac{\partial^r W_{k-1}}{\partial x^s \partial y^m}.$$

Обозначим

$$\max\{\max W_0, \max W_{0x}, \ldots\} = P \qquad (P > 0),$$

$$\max\left\{2\,|M_{sm}| - M_{sm} + \left(\frac{\partial f}{\partial p_{sm}} - M_{sm}\right)\right\} = a_{sm} \qquad (a_{sm} > 0),$$

$$\max\{a_{sm}\} = A.$$

Тогда из формулы

$$\frac{\partial^{2n} W_k}{\partial x^n \partial y^n} = \sum_{s,m}\left[2\,|M_{sm}| - M_{sm} + \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{sm}} - M_{sm}\right)\right]\frac{\partial^r W_{k-1}}{\partial x^s \partial y^m} \tag{13}$$

при $k = 1$ получим

$$\frac{\partial^{2n} W_1(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} \leqslant CAP, \tag{14}$$

где $C$ — число аргументов $U, U_x, \ldots$ в функции $f$. Пусть $(x_0, y_0)$ — переменная точка на кривой $l$. Интегрируя неравенство (14) и учитывая начальные данные на кривой $l$, получим [4, 6, 7] оценки

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^{2n-1} W_1}{\partial x^{n-1} \partial y^n} \leqslant CAP\,(x - x_0) \leqslant CAP\,(x - x_0 + y - y_0), \\
\frac{\partial^{2n-1} W_1}{\partial x^n \partial y^{n-1}} \leqslant CAP\,(y - y_0) \leqslant CAP\,(x - x_0 + y - y_0), \ldots, \\
\frac{\partial^r W_1}{\partial x^k \partial y^\tau} \leqslant CAP\,\frac{(x - x_0 + y - y_0)}{(2n - k - \tau)!}, \ldots, \\
W_1 \leqslant CAP\,\frac{(x - x_0 + y - y_0)^{2n}}{(2n)!}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Обозначая $\max\,[1, \max\limits_{\overline{B}}(x - x_0 + y - y_0)^\alpha] = E$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n - 1)$ и применяя метод математической индукции, убеждаемся в справедливости неравенств [6, 7]

$$W_k \leqslant P\frac{N^k}{k!},\ W_{kx} \leqslant P\frac{N^k}{k!}, \ldots, \frac{\partial^r W_k}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant P\frac{N^k}{k!}. \tag{16}$$

Рассмотрим следующие ряды:

$$\begin{gathered}
W_1 + W_2 + \ldots + W_k + \ldots, \\
W_{1x} + W_{2x} + \ldots + W_{kx} + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{17}$$

Члены этих рядов при $(x, y) \in \overline{B}$ — непрерывные функции. Из неравенств (16) следует, что ряды (17) в области $\overline{B}$ сходятся абсолютно и равномерно. Следовательно, так как $W_k = Z_k - V_k$, то существование непрерывных предельных функций

$$\widetilde{U} = \lim_{k\to\infty} V_k = \lim_{k\to\infty} Z_k, \ldots, \frac{\partial^r \widetilde{U}}{\partial x^s \partial y^m} = \lim_{k\to\infty}\frac{\partial^r V_k}{\partial x^s \partial y^m} = \lim_{k\to\infty}\frac{\partial^r Z_k}{\partial x^s \partial y^m}$$

доказано.

Докажем, что полученные таким образом функции $\widetilde{U}, \widetilde{U}_x, \ldots, \frac{\partial^r \widetilde{U}}{\partial x^s \partial y^m}$ удовлетворяют уравнению (1). Из (6) и (9) следует, что $A_{sm}^{(k)}(x,y)$, $\sigma_k(x,y)$, $\omega_k(x, y)$ равномерно с возрастанием $k$ сходятся к нулю, следовательно, с возрастанием $k$ из (10), (11) следует равномерная сходимость к нулю функций $\gamma_k(x, y)$, $\delta_k(x, y)$.

Из (7) и (8) согласно (11) имеем:

$$Z_k(x, y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} K_n(x, y, t, \tau) \{f[Z_k] + A_{sm}^{(\kappa)}(t, \tau) + \gamma_k(t, \tau)\} d\tau,$$

$$V_k(x, y) = \int\limits_{\varphi(t)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} K_n(x, y, t, \tau) \{f[V_k] - A_{sm}^{(k)}(t, \tau) + \delta_k(t, \tau)\} d\tau.$$

Переходя в предыдущих формулах к пределу при $k \to \infty$, запишем:

$$\widetilde{U}(x, y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} K_n(x, y, t, \tau) f[\widetilde{U}] d\tau, \tag{18}$$

где

$$K_n(x, y, t, \tau) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(y-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Продифференцировав (18), получим

$$\frac{\partial^{2n} \widetilde{U}}{\partial x^n \partial y^n} = f[\widetilde{U}],$$

следовательно, $\widetilde{U} = U$.

3. Тот факт, что $V_k \to U$ ($Z_k \to U$), оставаясь всегда не больше (не меньше) решения, т. е. $U - V_k \geqslant 0$ ($U - Z_k \leqslant 0$) всюду в $\overline{B}$, доказывается так же, как и в работах [4, 6, 7].

Следовательно, если выполнены условия теоремы, то везде при $(x, y) \in \overline{B}$ справедливы неравенства (5).

Сформулированная теорема справедлива для систем дифференциальных уравнений вида (1), а также для уравнений вида (1), когда число независимых переменных в функциях $U_i(x, y)$ больше двух.

Примечание 1. В ходе доказательства теоремы 1 доказано утверждение, которое можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если функции $V_0(x, y)$, $Z_0(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы* (1), *то последовательности $\{V_k\}$, $\{Z_k\}$, которые определены по формулам* (9) *при $(x, y) \in \overline{B}$, удовлетворяют неравенствам*

$$V_0 \leqslant V_1 \leqslant V_2 \leqslant \ldots \leqslant U \leqslant \ldots \leqslant Z_2 \leqslant Z_1 \leqslant Z_0,$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} \leqslant \frac{\partial V_1}{\partial x} \leqslant \frac{\partial V_2}{\partial x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial U}{\partial x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial Z_2}{\partial x} \leqslant \frac{\partial Z_1}{\partial x} \leqslant \frac{\partial Z_0}{\partial x}, \tag{19}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial^r V_0}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r V_1}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^r U}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^r Z_1}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r Z_0}{\partial x^s \partial y^m} \qquad (s + m =$$

$$= r < 2n; \quad s, m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Примечание 2. Если в соотношении (*) в области $\overline{B}$ для некоторого $M_{sm}$ соблюдается строгое неравенство, то в этом случае знак равенства в (5), (19) имеет место только на кривой $l$.

Пусть в некоторой замкнутой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость $xoy$ дает область $\overline{B}$, функция $f$ в уравнении (1) — непрерывная функция своих аргументов. Пусть

$$K > \sup_{\overline{D}} f[U], \quad \widetilde{K}_1 < \inf_{D} [U].$$

Рассмотрим уравнения:

$$\frac{\partial^{2n} Z(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = K, \quad \frac{\partial^{2n} V(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = \widetilde{K}_1 \tag{20}$$

с начальными условиями (2) на кривой $l$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Для функции $Z(V)$, определенной из уравнения* (20) *при условиях* (2) *для* $(x, y) \in \overline{B}_1 \subset \overline{B}$, *справедливы неравенства*

$$V(x, y) \leqslant U(x, y) \leqslant Z(x, y), \ldots, \frac{\partial^r V(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r U(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \leqslant \frac{\partial^r Z(x, y)}{\partial x^s \partial y^m}, \tag{21}$$

*а результат подстановки ее в уравнение* (1) *при* $(x, y) \in \overline{B}_1$ *дает невязку* $\gamma(x, y) > 0$ $(\gamma(x, y) < 0)$.

Доказательство теоремы приведем для функции $Z(x, y)$. Имеем:

$$\frac{\partial^{2n} Z(x, y)}{\partial x^n \partial y^n} = f[Z] + \gamma(x, y) = K > 0$$

$\gamma(x, y) = K - f[Z] > 0$ при $(x, y) \in B_1$. Интегрируя неравенство $\frac{\partial^{2n}(Z-U)}{\partial x^n \partial y^n} \geqslant$ $\geqslant 0$ в области $(x, y) \in \overline{B}_1$ и учитывая начальные данные (2) или дифференцируя выражение

$$Z(x, y) - U(x, y) = \int\limits_{\varphi(t)}^{x} dt \int\limits_{\psi(t)}^{y} K_n(x, y, t, \tau) \{K - f[U]\} \, d\tau,$$

получим неравенства (21).

Обозначим

$$\Omega = \sup_{\overline{D}} \left\{ f[U] - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r U}{\partial x^s \partial y^m} \right\},$$

тогда функция $Z = Z_0$, определенная из уравнения

$$\frac{\partial^{2n} Z_0}{\partial x^n \partial y^n} - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r Z_0}{\partial x^s \partial y^m} = \Omega \tag{22}$$

с начальными условиями (2), удовлетворяет требованиям теоремы 1. Действительно, из уравнения (3) получим:

$$\gamma_0(x, y) = \frac{\partial^{2n} Z_0}{\partial x^n \partial y^n} - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r Z_0}{\partial x^s \partial y^m} - f[Z_0] +$$

$$+ \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r V_0}{\partial x^s \partial y^m} = \Omega - \left\{ f[Z_0] - \right.$$

$$\left. - \sum_{s,m} [|M_{sm}| - M_{sm}] \frac{\partial^r V_0}{\partial x^s \partial y^m} \right\} > 0.$$

Существование и единственность непрерывного решения $Z_0$ уравнения (22) доказано в работе [4].

Проводя дословные рассуждения, как это приведено в работе [4] убеждаемся, что непрерывное решение задачи Коши (1), (2) единственно.

2. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнений вида (22) с переменными коэффициентами

$$L[U]=\frac{\partial^{2n}U}{\partial x^n\partial y^n}-\sum_{s,m}a_{sm}(x,y)\frac{\partial^r U}{\partial x^s\partial y^m}=f(x,y). \tag{23}$$

Пусть в области $\overline{B}$ коэффициенты $a_{sm}(x,y)$ уравнения (23), а также $f(x,y)$ — непрерывные функции. Считаем, что коэффициенты при $(x,y)\in\overline{B}$ не принимают отрицательных значений, т. е.

$$a_{sm}(x,y)\geqslant 0. \tag{24}$$

Для уравнения (23) справедлива следующая теорема, дающая качественное описание решения уравнения (23) при нулевых начальных условиях (2).

Теорема 4. *Если в уравнении* (23) *функция* $f(x,y)\geqslant 0$ *в области* $\overline{B}$, *а коэффициенты удовлетворяют условиям* (24), *то при начальных нулевых условиях* (2) *решение* $U(x,y)$ *задачи Коши вместе со своими производными* $r$-*го порядка при* $(x,y)\in\overline{B}$ *не принимают отрицательных значений.*

Действительно, функция, тождественно равная нулю, удовлетворяет нулевым начальным условиям, а результат подстановки ее в уравнение (23) дает невязку

$$\gamma(x,y)=-f(x,y)\leqslant 0.$$

Для уравнения (23) доказана [6, 7] теорема о дифференциальном неравенстве. Следовательно, функция, тождественно равная нулю, будет нижней функцией, и поэтому $U(x,y)\geqslant 0$. Из теоремы о дифференциальном неравенстве также следует, что и производные $r$-го порядка $\frac{\partial^r U}{\partial x^s\partial y^m}$ включительно также не принимают отрицательных значений.

Рассмотрим два линейных уравнения, которые отличаются только правыми частями:

$$L[U]=f_1(x,y),\qquad L[U]=f_2(x,y) \tag{25}$$

с одними и теми же начальными условиями на кривой $l$. Начальные условия не обязательно нулевые. Справедлива следующая [8]

Теорема сравнения 5. *Если правые части уравнений* (25) *при* $(x,y)\in\overline{B}$ *удовлетворяют неравенствам* $f_1(x,y)\geqslant f_2(x,y)$, *то в* $\overline{B}$ *справедливы неравенства*

$$U_1\geqslant U_2,\ldots,\frac{\partial^r U_1}{\partial x^s\partial y^m}\geqslant\frac{\partial^r U_2}{\partial x^s\partial y^m}.$$

Действительно, обозначим $U_1-U_2=W$. тогда из (25) получим

$$L[W]=f_1(x,y)-f_2(x,y). \tag{26}$$

Функция $W$ на кривой $l$ удовлетворяет нулевым начальным условиям. Подстановка функции. тождественно равной нулю, в уравнение (26) дает невязку

$$\gamma=-[f_1(x,y)-f_2(x,y)]\leqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы о дифференциальном неравенстве следует, что при $(x, y) \in \overline{B}$ справедливы неравенства

$$W(x, y) \geqslant 0, \ldots, \frac{\partial^r W(x, y)}{\partial x^s \partial y^m} \geqslant 0,$$

что и доказывает теорему.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Г. А. Артемов, ДАН СССР, т. 102, 1955.
2. Г. А. Артемов, УМЖ, т. IX, 1957.
3. Ю. И. Ковач, Доп. АН УРСР, № 1, 1965.
4. Ю. И. Ковач, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 5, 1965.
5. А. Н. Витюк, Диф. уравн., т. I, № 7, 1965.
6. Ю. И. Ковач, УМЖ, № 4, 1965.
7. Ю. И. Ковач, Дифф. уравн., т. I, № 3, 1965.
8. В. В. Степанов, Курс диф. рівн., вид-во «Радянська школа», К., 1953, 137



Поступила 2.XII 1965 г.
Ужгород