Прямая и обратная задача В. А. Маркова в комплексной области. I*

В. Д. Коромысличенко

Введение

В настоящей работе рассматривается обобщение задачи В. А. Маркова [1]. На множестве произвольной природы G заданы ограниченные комплекснозначные функции $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, $f(z)$ (вообще неоднозначные). Функции $\varphi_j(z)$, $j=\overline{0,n}$ считаем линейно независимыми. Рассмотрим задачу чебышевского приближения функции $f(z)$ обобщенными «полиномами» $F(a;z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(z)$, коэффициенты которых удовлетворяют нескольким линейно независимым связям:

$$\omega_t[F] \equiv \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t, \qquad t=\overline{1,p}. \tag{1}$$

Полиномы $F(a;z)$, коэффициенты которых удовлетворяют связям (1), будем называть допустимыми.

Обобщенная задача В. А. Маркова заключается в нахождении допустимого полинома $F(a^*;z)$, для которого имеем:

$$\sup_{z\in G}|F(a^*;z)-f(z)| = \inf_{a_j}\sup_{z\in G}|F(a;z)-f(z)| = \varrho. \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество различных точек $\varphi(\xi;z)=(\varphi_0^{(\xi)}(z),\ldots,\varphi_n^{(\xi)}(z), f^{(\xi)}(z))$, которые можно получить из значений функций $\varphi_j(z)$, $j=\overline{0,n}$, $f(z)$. Так как функции $\varphi_j(z)$, $j=\overline{0,n}$, $f(z)$ вообще неоднозначны, то при фиксированном z точек $\varphi(\xi;z)$ может быть бесчисленное множество. Индекс ξ указывает на какой-либо фиксированный набор значений многозначных, вообще, функций $\varphi_j(z)$, $j=\overline{0,n}$, $f(z)$ в точке $z\in G$. Пусть множество $\overline{\mathfrak{M}}$ является замыканием множества $\mathfrak{M}$. Рассмотрим приближение непрерывной функции $f^{(\xi)}(z)\equiv l$ с помощью непрерывных функций $\varphi_j^{(\xi)}(z)\equiv b_j$, $j=\overline{0,n}$ на компакте $\overline{\mathfrak{M}}$ ($\overline{\mathfrak{M}}=\{b_0,\ldots,b_n,l\}$) (ср. [3]). Задача (2) перейдет после этого в задачу нахождения допустимого полинома $F(a^*;z)$, для которого имеем:

$$\sup_{z\in G}|F(a^*;z)-f(z)| = \min_{a_j}\max_{\varphi(\xi;z)\in\overline{\mathfrak{M}}}\left|\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j^{(\xi)}(z)-f^{(\xi)}(z)\right| = \varrho. \tag{2'}$$

---

* Информация об основных результатах данной статьи была сделана на 2-й Всесоюзной конференции по конструктивной теории функций в Баку 10 октября 1962 г.

Сведение задачи (2) к (2′) показывает, что достаточно исследовать (2) для случая, когда множество G — бикомпактное хаусдорфово пространство, а функции $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, $f(z)$ непрерывны на G. В работах [7, 8] была исследована задача (2) со связями (1) для T-систем функций $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, заданных на бикомпактном хаусдорфовом пространстве G. В настоящей работе результаты [7, 8] обобщаются на задачу (2) со связями (1); получены критерии экстремальности конструктивного характера (в первой и второй частях работы) и решена обратная задача В. А. Маркова (во второй части работы).

Следует отметить, что для комплексных полиномов $\sum\limits_{s=0}^{n} a_s z^s = F$ при одной связи задаче чебышевского приближения посвящены работы [4, 5]. Критерий экстремальности общего характера для задачи чебышевского приближения со связями получен в работе [6].

§ 1. Предварительные теоремы

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_j(z) = \varphi_j'(z) + i\varphi_j''(z), \quad \alpha_j^{(t)} = \alpha_j^{(t)'} + i\alpha_j^{(t)''}, \quad \delta(a; z_s) = F(a; z_s) - f(z_s),$$

$$\operatorname{sgn}\delta(a; z_s) = e^{i\theta_s}, \quad \theta_s = \arg\delta(a; z_s), \quad \varphi_j^*(z) = \varphi_j(z)\cdot\operatorname{sgn}\overline{\delta(a; z)},$$

$$F^*(a; z) = \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j^*(z).$$

Пусть дано r ($r \geqslant 1$) линейно независимых векторов

$$\vec{\varphi}_s^* = (\varphi_0^{*'}(z_s),\ \varphi_0^{*''}(z_s), \ldots, \varphi_n^{*'}(z_s),\ \varphi_n^{*''}(z_s)) \qquad (s = \overline{1, r}). \tag{3}$$

Добавим к ним $2n + 2 - r$ векторов

$$\vec{d}_s = (d_0'(s), d_0''(s), \ldots, d_n'(s), d_n''(s)) \qquad (s = \overline{r+1, 2n+2}) \tag{4}$$

таких, что все $2n+2$ вектора $\vec{\varphi}_s^*$, $s = \overline{1, r}$, $\vec{d}_s$, $s = \overline{r+1, 2n+2}$ линейно независимы. Координаты $d_j'(s)$, $d_j''(s)$ — действительные произвольные числа, удовлетворяющие условию линейной независимости $2n+2$ векторов.

Для связей (1) рассмотрим системы линейных уравнений:

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'}\varphi_j^{*'}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} d_j'(s) = \alpha_j^{(t)'}, \qquad j = \overline{0, n},$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'}\varphi_j^{*''}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} d_j''(s) = \alpha_j^{(t)''}, \qquad j = \overline{0, n} \quad (t = \overline{1, p}), \tag{5}$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''}\varphi_j^{*'}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} d_j'(s) = -\alpha_j^{(t)''}, \qquad j = \overline{0, n},$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''}\varphi_j^{*''}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} d_j''(s) = \alpha_j^{(t)'}, \qquad j = \overline{0, n} \quad (t = \overline{1, p}). \tag{6}$$

Лемма 1. *Векторы*

$$\vec{K}^{(t)'} = (K_1^{(t)'}, \ldots, K_{2n+2}^{(t)'}),\ \vec{K}^{(t)''} = (K_1^{(t)''}, \ldots, K_{2n+2}^{(t)''}) \qquad (t = \overline{1, p}), \tag{7}$$

получаемые из систем линейных уравнений (5), (6), *линейно независимы.*

Действительно, в противном случае, умножая системы уравнений (5), (6) на коэффициенты линейной зависимости векторов (7) и складывая соответствующие уравнения, придем к тому, что векторы $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots \ldots, \alpha_n^{(t)})$ $(t = \overline{1, p})$ линейно зависимы, вопреки условию. Из (5), (6) получаем:

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'} \varphi_j^*(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} d_j(s) = \alpha_j^{(t)}, \quad j = \overline{0, n} \quad (t = \overline{1, p}), \tag{8}$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''} \varphi_j^*(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} d_j(s) = i\alpha_j^{(t)}, \quad j = \overline{0, n} \quad (t = \overline{1, p}). \tag{9}$$

Умножая (8), (9) на a_j и суммируя по j, получим:

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'} F^*(a; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} \Phi(a; s) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha_j^{(t)}, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{10}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{i} K_s^{(t)''} F^*(a; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} \frac{1}{i} K_s^{(t)''} \Phi(a; s) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j \alpha_j^{(t)}, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{11}$$

где

$$\Phi(a; s) = \sum_{j=0}^{n} a_j d_j(s).$$

Пусть

$$D_{j_1 \ldots j_p} = | \alpha_{j_s}^{(t)} |_{t=\overline{1,p},\, s=\overline{1,p}} \neq 0.$$

Выражая зависимые параметры, например a_{j_k}, $k = \overline{1, p}$, через другие $n + 1 - p$ параметров, получаем:

$$a_{j_k} = \overline{a}_{j_k} - \sum_{j=0}^{n}{}' a_j \frac{D_{j_1 \ldots j_{k-1} j j_{k+1} \ldots j_p}}{D_{j_1 \ldots j_p}} \qquad (j \neq j_1, \ldots, j_p), \tag{12}$$

где

$$\overline{a}_{j_k} = | \alpha_{j_1}^{(t)} \ldots \alpha_{j_{k-1}}^{(t)} \alpha_t \alpha_{j_{k+1}}^{(t)} \ldots \alpha_{j_p}^{(t)} |_{t=\overline{1,p}} : D_{j_1 \ldots j_p}, \tag{13}$$

$$D_{j_1 \ldots j_{k-1} j j_{k+1} \ldots j_p} = | \alpha_{j_1}^{(t)} \ldots \alpha_{j_{k-1}}^{(t)} \alpha_j^{(t)} \alpha_{j_{k+1}}^{(t)} \ldots \alpha_{j_p}^{(t)} |_{t=\overline{1,p}}$$
$$(j = \overline{0, n};\ j \neq j_1, \ldots, j_p). \tag{14}$$

Введем замену параметров

$$a_j = A_j \ (j \neq j_1, \ldots, j_p), \qquad a_{j_k} = \overline{a}_{j_k} + A_{j_k} \qquad (k = \overline{1, p}). \tag{15}$$

Для связей (1) имеем:

$$\omega_t[F] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} A_j + \sum_{k=1}^{p} \alpha_{j_k}^{(t)} \overline{a}_{j_k} = \alpha_t, \qquad t = \overline{1, p}. \tag{16}$$

При учете (13) из (16) получаем:

$$\omega_t(A) \equiv \omega_t(A_0, \ldots, A_n) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} A_j = 0, \qquad t = \overline{1, p}. \tag{17}$$

На основе (17) из (8), (9) имеем

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'} F^*(A; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} \Phi(A; s) \equiv \sum_{j=0}^{n} A_j \alpha_j^{(t)} = 0, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{18}$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''} F^*(A; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} \Phi(A; s) \equiv \sum_{j=0}^{n} A_j \alpha_j^{(t)} = 0, \qquad t = \overline{1, p}. \tag{19}$$

Исключая зависимые параметры $A_{j_1}, \ldots, A_{j_p}$ в (17), находим

$$A_{j_k} = -\sum_{j=0}^{n}{}' A_j \frac{D_{j_1 \ldots j_{k-1} j j_{k+1} \ldots j_p}}{D_{j_1 \ldots j_p}} \quad (\text{в сумме } j \neq j_1, \ldots, j_p). \tag{20}$$

Учитывая (20), имеем:

$$F(A; z) = \sum_{j=0}^{n} A_j \varphi_j(z) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}{}' A_j \left(\varphi_j(z) - \frac{D_{j j_2 \ldots j_p}}{D_{j_1 \ldots j_p}} \varphi_{j_1}(z) - \ldots - \frac{D_{j_1 \ldots j_{p-1} j}}{D_{j_1 \ldots j_p}} \varphi_{j_p}(z) \right) \equiv \widetilde{F}(\widetilde{A}; z), \tag{21}$$

$$\Phi(A; s) = \sum_{j=0}^{n} A_j d_j(s) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n}{}' A_j \left(d_j(s) - \frac{D_{j j_2 \ldots j_p}}{D_{j_1 \ldots j_p}} d_{j_1}(s) - \ldots - \frac{D_{j_1 \ldots j_{p-1} j}}{D_{j_1 \ldots j_p}} d_{j_p}(s) \right) \equiv \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s). \tag{22}$$

Подставив значения A_{j_k} из (20) в (18) и (19), при учете (21), (22) получим следующие тождества:

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'} \widetilde{F}^*(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{23}$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''} \widetilde{F}^*(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1, p}. \tag{24}$$

В частности, для действительных частей форм $\widetilde{F}^*$, $\widetilde{\Phi}$ имеем:

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)'} \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)'} \widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{25}$$

$$\sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)''} \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} K_s^{(t)''} \widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1, p}. \tag{26}$$

Аналогично (25), (26) записываются тождества для мнимых частей форм $\widetilde{F}^*$, $\widetilde{\Phi}$. Основой для дальнейшего исследования является следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы векторы*

$$\vec{K}_{s\sigma} = (K_{s_\sigma}^{(1)'}, \ldots, K_{s_\sigma}^{(p)'}, K_{s_\sigma}^{(1)''}, \ldots, K_{s_\sigma}^{(p)''}) \qquad (\sigma = \overline{1, 2p}),$$

соответствующие тождествам (25), (26) *были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы формы* $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_l)$, $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; m)$ $(l, m = \overline{1, 2n+2};\ l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p})$ *были линейно независимыми.*

Достаточность. Пусть формы $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_l)$, $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; m)$ $(l, m = \overline{1, 2n+2};$ $l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p})$ линейно независимы. Допустим, что векторы $\vec{K}_{s_\sigma}$ $(\sigma = \overline{1, 2p})$ линейно зависимы, т. е. имеем

$$\left| \begin{matrix} K_{s_i}^{(t)\prime} \\ K_{s_i}^{(t)\prime\prime} \end{matrix} \right|_{t=\overline{1,p},\ i=\overline{1,2p}} = 0. \tag{27}$$

В (27) строки линейно зависимы с коэффициентами $c_1', \ldots, c_p', c_1'', \ldots, c_p''$ $\left(\sum (|c_t'| + |c_t''|) > 0\right)$. Умножая (25), (26) на c_t', c_t'', $t = \overline{1,p}$ и складывая, получим, учитывая линейную независимость векторов $\vec{K}^{(t)\prime}$, $\vec{K}^{(t)\prime\prime}$, $t = \overline{1,p}$, что указанные формы являются линейно зависимыми, вопреки условию.

Необходимость. Пусть определитель (27) отличен от нуля. Запишем (18), (19) в следующем виде:

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma'-1} K_{s_\sigma}^{(t)\prime} \Phi'(A; s_\sigma) + \sum_{\sigma=\sigma'}^{2p} K_{s_\sigma}^{(t)\prime} F^{*\prime}(A; z_{s_\sigma})\right) + \sum{}' K_l^{(t)\prime} F^{*\prime}(A; z_l) +$$
$$+ \sum{}' K_m^{(t)\prime} \Phi'(A; m) = 0, \quad (l, m = \overline{1, 2n+2}; \quad l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p}), \tag{28}$$

$$\left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma'-1} K_{s_\sigma}^{(t)\prime\prime} \Phi'(A; s_\sigma) + \sum_{\sigma=\sigma'}^{2p} K_{s_\sigma}^{(t)\prime\prime} F^{*\prime}(A; z_{s_\sigma})\right) + \sum{}' K_l^{(t)\prime\prime} F^{*\prime}(A; z_l) +$$
$$+ \sum{}' K_m^{(t)\prime\prime} \Phi'(A; m) = 0, \qquad (l, m = \overline{1, 2n+2}; \qquad l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p}). \tag{29}$$

В (28), (29) первые $2p$ форм Φ', $F^{*\prime}$ линейно выражаются через остальные $2n + 2 - 2p$ форм. Формы $F^{*\prime}(A; z_l)$, $\Phi'(A; m)$ $(l, m = \overline{1, 2n+2};\ l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p})$ линейно независимы, так как им можно придавать совершенно произвольные значения.

Действительно, система уравнений

$$F^{*\prime}(A; z_l) = \sum_{j=0}^{n} (A_j' \varphi_j^{*\prime}(z_l) - A_j'' \varphi_j^{*\prime\prime}(z_l)) = d_l,$$
$$\Phi'(A; m) = \sum_{j=0}^{n} (A_j' d_j'(m) - A_j'' d_j''(m)) = d_m, \tag{30}$$
$$(l, m = \overline{1, 2n+2}; \qquad l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p})$$

имеет решение при любом фиксированном наборе чисел d_l, d_m, так как матрица

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_0^{*\prime}(z_l) & -\varphi_0^{*\prime\prime}(z_l) \ldots \varphi_n^{*\prime}(z_l) & -\varphi_n^{*\prime\prime}(z_l) \\ d_0'(m) & -d_0''(m) \ldots d_n'(m) & -d_n''(m) \end{matrix} \right\|$$

имеет ранг, равный $2n + 2 - 2p$ $(2n + 2 - 2p < 2n + 2,\ p \geqslant 1)$. При однородных связях $F^{*\prime}(A; z_l) = \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_l)$, $\Phi'(A; m) = \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; m)$, т. е. формы $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_l)$, $\widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; m)$ $(l, m = \overline{1, 2n+2};\ l, m \neq s_1, \ldots, s_{2p})$ линейно независимы. Теорема доказана.

Заметим, что аналогично формулируется теорема 1 относительно форм $\widetilde{F}^{*''}(\widetilde{A}; z_l)$, $\widetilde{\Phi}''(\widetilde{A}; m)$.

Пусть полином $F(a; z)$ является решением задачи (2). Для некоторой подсистемы точек уклонения* $\{z_s\}_1^r$ для форм со свободными параметрами $\widetilde{F}^*(\widetilde{A}; z_s)$ будем иметь неприводимое тождество, полученное Е. Я. Ремезом в работах [2, 3]:

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^*(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \qquad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, r}, \tag{31}$$

которому соответствует два тождества

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^{*'}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \quad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, r}, \tag{32}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^{*''}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \quad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, r} \tag{33}$$

с линейной зависимостью в узком смысле [3] между действительными формами $\widetilde{F}^{*'}(\widetilde{A}; z_s)$, $\widetilde{F}^{*''}(\widetilde{A}; z_s)$. Точки уклонения $\{z_s\}_1^r$, соответствующие тождеству (31), называются неприводимой чебышевской подсистемой точек уклонения. Тождествам (32), (33) соответствует матрица

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_s^{*'}(z_\nu) \\ \varphi_s^{*''}(z_\nu) \end{matrix} \right\|_{\nu=\overline{1,r};\ s=\overline{0,n}}. \tag{34}$$

Лемма 2. *В матрице* (34) *любые* $r-1$ *столбцов линейно независимы.*

Действительно, допустим, например, что первые $r-1$ столбцов являются линейно зависимыми, т. е. имеем:

$$\sum_{s=1}^{r-1} c_s \varphi_j^{*'}(z_s) = 0, \qquad j = \overline{0, n}; \ \sum_{s=1}^{r-1} -c_s \varphi_j^{*''}(z_s) = 0, \qquad j = \overline{0, n}, \ \sum |c_s| > 0. \tag{35}$$

Из (35) следует

$$\sum_{s=1}^{r-1} c_s \varphi_j^{*'}(z_s) A'_j = 0, \quad j = \overline{0, n}; \ \sum_{s=1}^{r-1} -c_s A''_j \varphi_j^{*''}(z_s) = 0, \quad j = \overline{0, n}. \tag{36}$$

Из (36) получаем тождество

$$\sum_{s=1}^{r-1} c_s F^{*'}(A; z_s) \equiv 0. \tag{37}$$

Так как при однородных связях $F^{*'}(A; z_s) = \widetilde{F}^{*'}(\widetilde{A}; z_s)$, то из (37) получаем

$$\sum_{s=1}^{r-1} c_s \widetilde{F}^{*'}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0 \qquad \left(\sum |c_s| > 0\right),$$

что невозможно, ввиду неприводимости тождества (32).

При исследовании задачи (2) основным является вопрос о ранге матрицы (34).

---

* Точками уклонения названы ради сокращения точки максимального уклонения $|F(a; z) - f(z)|$ на G.

Теорема 2. *Пусть полином $F(a^*; z)$ является решением задачи* (2) *и для него выполнены условия.*

а) *для r точек уклонения $\{z_s\}_1^r$, для которых выполняется неприводимое тождество* (31), *по крайней мере одно из чисел $F^{*\prime}(a^*; z_1), \ldots, F^{*\prime}(a^*; z_r)$ (либо $F^{*\prime\prime}(a^*; z_s)$, $s = \overline{1, r}$) отлично от нуля;*

б) *отличные от нуля числа $F^{*\prime}(a^*; z_s)$, $s = \overline{1, r}$ (либо $F^{*\prime\prime}(a^*; z_s)$, $s = \overline{1, r}$) одного знака, тогда ранг матрицы* (34) *равен r.*

Доказательство. Допустим, что ранг матрицы (34) равен $r - 1$ (меньшим он не может быть в силу леммы 2), т. е. имеем

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \varphi_j^{*\prime}(z_s) = 0,\ j = \overline{0, n};\ \sum_{s=1}^{r} c_s \varphi_j^{*\prime\prime}(z_s) = 0\ \ j = \overline{0, n} \qquad \left(\sum |c_s| > 0\right). \tag{36'}$$

Считаем (для определенности), что числа $F^{*\prime}(a^*; z_s)$, $s = \overline{1, r}$ не все равны нулю и одного знака.

Из (36′) получаем

$$\sum_{s=1}^{r} c_s F^{*\prime}(A; z_s) \equiv 0. \tag{37'}$$

Так как $F^{*\prime}(A; z_s) = \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s)$, то из (37′) имеем

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0. \tag{38}$$

В тождестве (32) любые $r - 1$ форм $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s)$ линейно независимы. Сравнивая тождество (32) с тождеством (38), можем считать $c_s = \lambda_s$, $s = \overline{1, r}$. Тогда из (36′) получаем

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s F^{*\prime}(a^*; z_s) \equiv 0,$$

что невозможно.

Следствие 1. *Если в задаче* (2) $f(z) \equiv 0$ *и* $\sum |\alpha_t| > 0$, *то ранг матрицы* (34) *равен r.*

Действительно, при указанных условиях полином $F(a^*; z)$, являющийся решением задачи (2), не равен тождественно нулю. Так как $F^*(a^*; z_s) = \operatorname{sgn} \overline{F(a^*; z_s)} \cdot F(a^*; z_s) = |F(a^*; z_s)|$, то $F^{*\prime}(a^*; z_s) = |F(a^*; z_s)|$, т. е. условия теоремы 2 выполнены.

§ 2. Обобщение основной теоремы В. А. Маркова

Для задачи (2) справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы допустимый полином $F(a^*; z)$ был наименее уклоняющимся от непрерывной функции $f(z)$ на бикомпакте G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ ($r \leqslant 2n + 3 - 2p$) было выполнено одно из двух:*

1) *либо при линейной независимости векторов $\vec{\varphi}_s^{\,*}$, $s = \overline{1, r}$,* для чисел $K_s^{(t)\prime}$, $K_s^{(t)\prime\prime}$, $s = \overline{1, 2n+2}$ $(t = \overline{1, p})$, *полученных из систем линейных уравнений* (5), (6), *должны выполняться следующие условия:*

а) *ранг m матрицы*

$$\left\| \begin{matrix} K_s^{(t)\prime} \\ K_s^{(t)\prime\prime} \end{matrix} \right\|_{s=\overline{r+1, 2n+2},\ t=\overline{1, p}}, \tag{39}$$

соответствующей добавленным векторам d_s, меньше или равен $2p - 1$, б) *отличные от нуля числа*

$$\left|\begin{matrix} K_{l_1}^{(t)'} \dots K_{l_{2p-1}}^{(t)'} K_s^{(t)'} \\ K_{l_1}^{(t)''} \dots K_{l_{2p-1}}^{(t)''} K_s^{(t)''} \end{matrix}\right|_{t=\overline{1,p}\ (s=\overline{1,2n+2})} \tag{40}$$

одного знака, где в (40) *первые* $2p-1$ *столбцов линейно независимы и включают* m *линейно независимых столбцов матрицы* (39);

2) *либо при линейной зависимости в узком смысле векторов* $\vec{\varphi}_s^*$:

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \vec{\varphi}_s^* = 0, \qquad c_s \neq 0, \tag{41}$$

числа c_s, $s=\overline{1,r}$ *должны быть одного знака.*

Необходимость. Пусть $F(a^*; z_s)$ — решение задачи (2). Для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_{2p}^{2p+r-1}$ будем иметь неприводимое тождество вида (31) и тождество

$$\sum_{s=2p}^{2p+r-1} \lambda_s \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \qquad \lambda_s > 0. \tag{32'}$$

Если ранг матрицы (34) равен r, то дополним r векторов $\vec{\varphi}_s^*$ произвольными $2n+2-r$ векторами $\vec{d}_s$, $s=\overline{r+1, 2n+2}$, $\overline{1, 2p-1}$, такими, что $2n+2$ вектора линейно независимы, и рассмотрим системы линейных уравнений (5), (6).

Пусть линейно независимыми формами в тождествах (25), (26) будут

$$\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_{2p+1}), \dots, \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_{2p+r-1}), \quad \widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; 2p+r), \dots, \widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; 2n+2).$$

Тогда

$$D = \left|\begin{matrix} K_s^{(t)'} \\ K_s^{(t)''} \end{matrix}\right|_{s=\overline{1,2p},\ t=\overline{1,p}} \neq 0. \tag{42}$$

Из системы

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1' K_s^{(1)'} + \dots + \mu_p' K_s^{(p)'} + \mu_1'' K_s^{(1)''} + \dots + \mu_p'' K_s^{(p)''}, \qquad s=\overline{1, 2p-1}, \\ 1 &= \mu_1' K_{2p}^{(1)'} + \dots + \mu_p' K_{2p}^{(p)'} + \mu_1'' K_{2p}^{(1)''} + \dots + \mu_p'' K_{2p}^{(p)''} \end{aligned} \tag{43}$$

находим числа μ_t', μ_t'', $t=\overline{1,p}$.

Умножая (25) на числа μ_t', $t=\overline{1,p}$, а (26) на числа μ_t'', $t=\overline{1,p}$ и складывая, получим, в силу однозначности представления формы $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_{2p})$ через линейно независимые формы

$$\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s), \quad s=\overline{2p+1, 2p+r-1}, \quad \widetilde{\Phi}'(\widetilde{A}; s), \quad s=\overline{2p+r, 2n+2}, \tag{44}$$

что

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) = \left|\begin{matrix} K_1^{(t)'} \dots K_{2p-1}^{(t)'} K_s^{(t)'} \\ K_1^{(t)''} \dots K_{2p-1}^{(t)''} K_s^{(t)''} \end{matrix}\right|_{t=\overline{1,p}} : D. \tag{45}$$

В частности в (45) только числа $\lambda_{2p}, \dots, \lambda_{2p+r-1}$ будут отличны от нуля, т. е. условия а), б) теоремы 3 выполнены.

Пусть $F(a^*; z)$ — решение задачи и ранг матрицы (34) $r-1$, т. е. имеем

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \varphi_j^{*\prime}(z_s) = 0, \quad j=\overline{0,n}; \quad \sum_{s=1}^{r} c_s \varphi_j^{*\prime\prime}(z_s) = 0, \quad j=\overline{0,n}, \tag{46}$$

причем $c_s \neq 0$, $s=\overline{1,r}$, так как любые $r-1$ столбцов матрицы (34) линейно независимы (см. лемму 2).
Из (46) получаем

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \tag{47}$$

что в сравнении с тождеством вида (32) дает $c_s = \lambda_s k$ ($k = \mathrm{const}$).

Достаточность. Выполнение условий а), б) в случае 1) теоремы 3 приводит к тождеству вида (31). Для этого из системы уравнений вида (43), в которой $2p$-е уравнение соответствует точке уклонения, находим числа μ_t', μ_t'', $t=\overline{1,p}$. Умножая (23) на μ_t', а (24) на μ_t'' и складывая, получим, учитывая (45), тождество вида (31).

Пусть для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^r$, $r \leqslant 2n+3-2p$ выполняется случай 2) теоремы 3. Из (41) получаем тождества

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \quad \sum_{s=1}^{r} c_s \widetilde{F}^{*\prime\prime}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \quad c_s > 0. \tag{48}$$

Умножая второе тождество в (48) на i и складывая с первым, получим тождество вида (31). Теорема доказана.

Вектор $\vec{\lambda}$ из (31) выражается через векторы $\vec{K}^{(t)\prime}$, $\vec{K}^{(t)\prime\prime}$ по формуле (45). Для случая 1) теоремы 3 справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы вектор* $\vec{\lambda}$ *из* (31) *выражался через* m ($m \leqslant 2p$) *векторов* $\vec{K}^{(t)\prime}$ ($t=\overline{1,l}$), $\vec{K}^{(t)\prime\prime}$ ($t=\overline{l+1,m}$), *необходимо и достаточно, чтобы между соответствующими строками* $(K_1^{(t)\prime}, \ldots, K_{2p-1}^{(t)\prime})$ $(t=\overline{1,l})$ $(K_1^{(t)\prime\prime}, \ldots, K_{2p-1}^{(t)\prime\prime})$ $(t=\overline{l+1,m})$ *существовала линейная зависимость в узком смысле.*

Доказательство аналогично проведенному в работе [7] для теоремы 5. Теорема 4 эквивалентна следующей теореме.

Теорема 4′. *Для того чтобы вектор* $\vec{\lambda}$ *из* (31) *выражался через* m ($m \leqslant 2p$) *векторов* $\vec{K}^{(t)\prime}$ ($t=\overline{1,l}$), $\vec{K}^{(t)\prime\prime}$ ($t=\overline{l+1,m}$), *неоходимо и достаточно, чтобы строка* $(0_1, \ldots, 0_{2p-1}, 1)$ *линейно выражалась через строки* $(K_1^{(t)\prime}, \ldots, K_{2p}^{(t)\prime})$ $(t=\overline{1,l})$, $(K_1^{(t)\prime\prime}, \ldots, K_{2p}^{(t)\prime\prime})$ $(t=\overline{l+1,m})$ *с коэффициентами отличными от нуля.*

Замечание 1. При условиях теоремы 4 система (43) перейдет в систему

$$0 = \sum_{t=1}^{l} \mu_t' K_s^{(t)\prime} + \sum_{t=l+1}^{m} \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}, \quad s=\overline{1,2p-1},$$

$$1 = \sum_{t=1}^{l} \mu_t' K_{2p}^{(t)\prime} + \sum_{t=l+1}^{m} \mu_t'' K_{2p}^{(t)\prime\prime}. \tag{49}$$

Вместо системы (49) можно рассматривать систему уравнений

$$0 = \sum_{t=1}^{l} \mu_t' K_s^{(t)\prime} + \sum_{t=l+1}^{m} \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}, \quad s=\overline{1,2p-1}, \tag{49′}$$

так как решение системы (49) и решение системы (49′) $\left(\sum (|\mu_t'| + |\mu_t''|) > 0\right)$ отличаются общим множителем.
Ранг матрицы

$$\| K_s^{(1)\prime} \ldots K_s^{(l)\prime} K_s^{(l+1)\prime\prime} \ldots K_s^{(m)\prime\prime} \|_{s=\overline{1,2p}}$$

равен m, поэтому для определения чисел μ_t', μ_t'' будем иметь систему

$$0=\mu_1'K_{s_\nu}^{(1)'}+\ldots+\mu_l'K_{s_\nu}^{(l)'}+\mu_{l+1}''K_{s_\nu}^{(l+1)''}+\ldots+\mu_m''K_{s_\nu}^{(m)''},\qquad \nu=\overline{1,m-1},$$

$$1=\mu_1'K_{2p}^{(1)'}+\ldots+\mu_l'K_{2p}^{(l)'}+\mu_{l+1}''K_{2p}^{(l+1)''}+\ldots+\mu_m''K_{2p}^{(m)''}, \tag{49''}$$

из которой находим μ_t' $(t=\overline{1,l})$, μ_t'' $(t=\overline{l+1,m})$. Как и в (45), получаем

$$\lambda_s=\begin{vmatrix} K_{s_\nu}^{(1)'}\ldots K_{s_\nu}^{(l)'}K_{s_\nu}^{(l+1)''}\ldots K_{s_\nu}^{(m)''}\\ K_{s}^{(1)'}\ldots K_{s}^{(l)'}K_{s}^{(l+1)''}\ldots K_{s}^{(m)''}\end{vmatrix}_{\nu=\overline{1,m-1}}:\Delta, \tag{50}$$

где Δ — определитель системы уравнений (49″).
На основе теоремы 4 (4′) и замечания 1, условия а), б) для случая 1) теоремы 3 формулируются следующим образом:

а)′ *ранг d матрицы*

$$\| K_s^{(1)'}\ldots K_s^{(l)'}K_s^{(l+1)''}\ldots K_s^{(m)''}\|_{s=\overline{r+1,2n+2}}\qquad (m\leqslant 2p), \tag{51}$$

соответствующей добавленным векторам $\vec{d}_s$, меньше или равен $m-1$;

б) *отличные от нуля числа*

$$\begin{vmatrix} K_{s_\nu}^{(1)'}\ldots K_{s_\nu}^{(l)'}K_{s_\nu}^{(l+1)''}\ldots K_{s_\nu}^{(m)''}\\ K_{s}^{(1)'}\ldots K_{s}^{(l)'}K_{s}^{(l+1)''}\ldots K_{s}^{(m)''}\end{vmatrix}_{\nu=\overline{1,m-1}} \tag{52}$$

должны быть одного знака, где в (52) *первые $m-1$ строк линейно независимы и включают d линейно независимых строк матрицы* (51).

§ 3. Формулы для величины наилучшего приближения

В случае 1) теоремы 3 при учете (45) для неприводимой чебышевской подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ из (31) имеем:

$$\sum_{s=1}^{r}\lambda_s F^*(a;z_s)\equiv\sum_{j=0}^{n}\gamma_j a_j=\gamma,\qquad \lambda_s>0, \tag{53}$$

где $\gamma=\sum\limits_{t=1}^{p}\mu_t a_t$, $\gamma_j=\sum\limits_{t=1}^{p}\mu_t a_j^{(t)}$, $j=\overline{0,n}$, $\mu_t=\mu_t'+i\mu_t''$, $t=\overline{1,p}$,

$$\lambda_s=\sum_{t=1}^{p}(\mu_t'K_s^{(t)'}+\mu_t''K_s^{(t)''}),\qquad s=\overline{1,r}.$$

Для случая 2) теоремы 3 имеем:

$$\sum_{s=1}^{r}c_s F^*(a;z_s)\equiv 0,\qquad c_s>0. \tag{54}$$

Так как $\delta^*(z_s)=\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}\cdot\delta(z_s)=|\delta(z_s)|=\varrho$, то из (53) получаем*

$$\varrho=\frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\mu_t a_t-\sum\limits_{s=1}^{r}\lambda_s\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}\cdot f(z_s)}{\sum\lambda_s},\qquad \lambda_s>0,\ s=\overline{1,r}. \tag{55}$$

---

* Подставляя $F^*(a^*;z_s)=\delta^*(z_s)+f^*(z_s)\equiv|\delta(z_s)|+f(z_s)\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}$ в (53), получим: $\Sigma\lambda_s|\delta(z_s)|=\gamma-\Sigma\lambda_s\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}f(z_s)$.

Аналогично из (54) получаем:

$$\varrho = \frac{-\sum\limits_{s=1}^{r} c_s \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)} f(z_s)}{\sum c_s}, \qquad c_s > 0, \ s = \overline{1, r}. \tag{56}$$

Если в тождестве (53) $F(a^*; z)$ не является решением, то независимо от того, чебышевской подсистеме точек уклонения соответствуют формы $F(a^*; z_s)$ или нет, будем иметь при обозначении $\max\limits_{z\in G} |\delta(z)| = L$:

$$1)\ \sum |\lambda_s| L > \left|\sum \lambda_s \delta^*(z_s)\right| = \left|\sum_{t=1}^{p} \mu_t \alpha_t - \sum \lambda_s f(z_s) \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)}\right|,$$

$$L > \frac{\left|\sum \mu_t \alpha_t - \sum \lambda_s f(z_s) \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)}\right|}{\sum |\lambda_s|}, \tag{57}$$

$$2)\ \sum |c_s| L > \left|\sum c_s \delta^*(z_s)\right| = \left|-\sum c_s \overline{\delta(z_s)} f(z_s)\right|,$$

$$L > \frac{\left|\sum c_s \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)} f(z_s)\right|}{\sum |c_s|}. \tag{57'}$$

Если $F(a; z)$ является решением задачи (2), но формы $F(a; z_s)$ в тождествах (53), (54) соответствуют не чебышевской подсистеме точек уклонения или же формы $F(a; z_s)$ тождеств (53), (54) соответствуют какой-либо системе точек $\{z_s\}_1^r$, таких, что не все из них являются точками уклонения, то будем иметь:

$$1)\ \sum |\lambda_s| \varrho > \left|\sum \lambda_s \delta^*(z_s)\right| = \left|\sum_{t=1}^{p} \mu_t \alpha_t - \sum \lambda_s \operatorname{sgn} \delta\overline{(z_s)} f(z_s)\right|,$$

$$\varrho > \frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{p} \mu_t \alpha_t - \sum \lambda_s \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)} f(z_s)\right|}{\sum |\lambda_s|}, \tag{58}$$

$$2)\ \sum |c_s| \varrho > \left|\sum c_s \delta^*(z_s)\right| = \left|\sum_{s=1}^{r} c_s \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)} \cdot f(z_s)\right|,$$

$$\varrho > \frac{\left|\sum c_s \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)} f(z_s)\right|}{\sum |c_s|}. \tag{58'}$$

Из изложенного вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Строгое неравенство в* (57), (57′), (58), (58′) *переходит в равенство тогда и только тогда, когда в тождествах* (53), (54) *полином* $F(a^*; z)$ *является решением задачи* (2) *и формы* $F(a^*; z_s)$ *соответствуют некоторой чебышевской подсистеме точек уклонения.*

§ 4. Случай фиксированных нулей

По аналогии с введенным в [7] определением, точку $z_0 \in G$ будем называть фиксированным нулем для функций $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, если $\varphi_j(z_0) = 0$, $j = \overline{0, n}$. Если функция $f(z)$ не обращается в нуль в некоторых фиксированных нулях, то в этом случае можно получить некоторые полезные факты.

Задача (2) сводится к задаче приближения функции $f_1(z) \equiv f(z) - \sum_{k=1}^{p} \overline{a}_{j_k}\varphi_{j_k}(z)$ при помощи полиномов $F(A; z)$, коэффициенты которых удовлетворяют однородным связям (17). Обозначим через G^* множество точек бикомпакта G без фиксированных нулей. Для верхней и нижней границы величины наилучшего приближения справедливо следующее утверждение.

Если функция $f(z)$ не обращается в нуль в некоторых фиксированных нулях, то имеем

$$\sup_{z \in G} |f_1(z)| \geqslant \varrho \geqslant \sup_{z \in G - G^*} |f(z)|. \tag{59}$$

Доказательство (59) аналогично проведенному в работе [8] для действительного случая. Следствие из (59).

Если $\sup_{z \in G} |f_1(z)| = \sup_{z \in G - G^*} |f(z)|$, то в этом случае будем иметь $\varrho = \max_{z \in G} |f_1(z)| = \sup_{z \in G - G^*} |f(z)|$. Решение задачи в этом случае будет давать всякий допустимый полином $F(a; z)$, для которого $\max_{z \in G} |F(A; z) - f_1(z)| = \varrho$. В частности одним из решений задачи будет $F(A; z) \equiv 0$, т. е. $F(a; z) = \sum_{s=1}^{p} \overline{a}_{j_s}\varphi_{j_s}(z)$.

§ 5. Экстремальные теоремы для некоторых специальных случаев обобщенной задачи В. А. Маркова

Случай 1. Пусть полином $F(a; z)$ — решение задачи (2), причем в соответствующем тождестве вида (31), которое запишем в следующем виде:

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} \lambda_s \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \tag{60}$$

$$\operatorname{sgn} \lambda_s = \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)}, \tag{60'}$$

формы $\widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$ связаны линейной зависимостью в узком смысле. В этом случае получаются следующие факты.

Тождеству (60) соответствует матрица

$$\| \varphi_s(z_\nu) \|_{s=\overline{0,n},\ \nu=\overline{p, p+r-1}}. \tag{61}$$

В матрице (61) любые $(r - 1)$ столбцов линейно независимы. Действительно, допустим, например, что первые $(r - 1)$ столбцов линейно зависимы, т. е. имеем

$$\sum_{s=p}^{p+r-2} c_s\varphi_j(z_s) = 0, \qquad j = \overline{0, n}, \quad \sum |c_s| > 0. \tag{62}$$

Из (62) имеем тождество $\sum_{s=p}^{p+r-2} c_s F(A; z_s) \equiv 0$, из которого получаем $\sum_{s=p}^{p+r-2} c_s \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0$, что невозможно, так как тождество (60) неприводимое.

1) Пусть ранг матрицы (61) равен $r-1$, тогда получим

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} c_s \varphi_j(z_s) = 0, \tag{63}$$

причем $c_s \neq 0$, так как любые $r-1$ строк матрицы (61) линейно независимы.

Из (63) получаем

$$\sum_{s=p}^{p+r-1} c_s \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0. \tag{64}$$

Сравнивая (64) и (60), можем считать $c_s = \lambda_s$, $s = \overline{p, p+r-1}$. Обратно, пусть для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ соответствующие векторы $\vec{\varphi}(z_s) = (\varphi_0(z_s), \ldots, \varphi_n(z_s))$, $s = \overline{p, p+r-1}$ связаны линейной зависимостью вида (63), причем $\operatorname{sgn} c_s = \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)}$. Тогда получаем из (63) тождество вида (60) с выполнением (60′).

2) Если ранг матрицы (61) равен r, то векторы $\vec{\varphi}(z_s)$ дополним $n+1-r$ векторами $\vec{d}(s) = (d_0(s), \ldots, d_n(s))$, где $d_j(s)$ — действительные или комплексные числа, удовлетворяющие тому условию, чтобы все $n+1$ векторов были линейно независимы.

Из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{p-1} K_s^{(t)} d_j(s) + \sum_{s=p}^{p+r-1} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s) + \sum_{s=p+r}^{n+1} K_s^{(t)} d_j(s) = \alpha_j^{(t)}, \qquad t = \overline{1, p} \tag{65}$$

получаем матрицу

$$\| K_s^{(t)} \|_{\substack{t=\overline{1,p} \\ s=\overline{1,\, n+1}}} \tag{66}$$

ранга p, подматрицу которой

$$\| K_s^{(t)} \|_{t=\overline{1,p},\; s=\overline{1,p-1},\; \overline{p+r,\, n+1}}, \tag{66′}$$

соответствующую добавленным векторам, назовем дополнительной. Из (65) получаем p тождеств

$$\sum_{s=1}^{p-1} K_s^{(t)} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) + \sum_{s=p}^{p+r-1} K_s^{(t)} \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=p+r}^{n+1} K_s^{(t)} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1, p}, \tag{67}$$

для которых справедлива следующая теорема.

Теорема 1′. *Для того чтобы в тождествах* (67) *формы* $\widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$, $s = \overline{p+1, p+r-1}$, $\widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s)$, $s = \overline{p+r, n+1}$ *были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы определитель* $| K_s^{(t)} |_{\substack{t=\overline{1,p} \\ s=\overline{1,p}}} \neq 0$.

Теорема 1′ доказывается аналогично теореме 1. На основе теоремы 1′ аналогично (45) имеем

$$\lambda_s_{(s=\overline{1,n+1})} = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = | K_1^{(t)} \ldots K_{p-1}^{(t)} K_s^{(t)} |_{t=\overline{1,p}} : | K_\nu^{(t)} |_{\substack{t=\overline{1,p} \\ \nu=\overline{1,p}}}, \tag{68}$$

где λ_s из (60), причем для добавленных векторов имеем $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$, $\lambda_{p+r} = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$.

Случай 2. Пусть $F(a; z)$ — решение задачи (2), причем в соответствующем неприводимом тождестве

$$\sum_{s=l}^{l+r-1} \lambda_s \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \tag{60*}$$

$$\operatorname{sgn} \lambda_s = \operatorname{sgn} \overline{\delta(z_s)}, \tag{60′}$$

зависимость между формами $\widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$ вообще не в узком смысле, а матрица (61) имеет ранг r. Здесь также справедлива формула вида (68).

Действительно, дополним r точек уклонения $n+1-r$ векторами $\vec{d}(s)$ такими, что все $n+1$ векторов $\vec{\varphi}(z_s)$, $\vec{d}(s)$ линейно независимы. Из системы уравнений вида (65) получаем матрицу $\| K_s^{(t)} \|_{\substack{t=1,p \\ s=\overline{1,n+1}}}$ вида (66) с дополнительной подматрицей

$$\| K_s^{(t)} \|_{t=\overline{1,p},\ s=\overline{l+r,n+1},\ \overline{1,l-1}}. \tag{69}$$

Тождества (67) для рассматриваемого случая запишутся так:

$$\sum_{s=1}^{l-1} K_s^{(t)} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) + \sum_{s=l}^{l+r-1} K_s^{(t)} \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) + \sum_{s=l+r}^{n+1} K_s^{(t)} \widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s) \equiv 0, \qquad t = \overline{1,p}. \tag{67'}$$

Для тождеств (67′) справедлива теорема 1′. Пусть в (67′) линейно независимыми формами являются $\widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$, $s = \overline{p+1, l+r-1}$, $\widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s)$, $s = \overline{l+r, n+1}$, тогда определитель $| K_s^{(t)} |_{\substack{s=\overline{1,p} \\ t=\overline{1,p}}} \neq 0$ и из системы линейных уравнений

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}, \qquad s = \overline{l,p}, \qquad 0 = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}, \qquad s = \overline{1, l-1}$$

находим числа μ_t.
Умножим тождества (67′) на μ_t и сложим, а затем полученные тождества вычтем из (60*). Так как $\sum_{s=l}^{p} \lambda_s \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s) \equiv \sum_{s=l}^{p} \left(\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} \right) \widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$, а формы $\widetilde{F}(\widetilde{A}; z_s)$, $s = \overline{p+1, l+r-1}$, $\widetilde{\Phi}(\widetilde{A}; s)$, $s = \overline{l+r, n+1}$ по условию являются линейно независимыми, то получаем:

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda_l & \dots \lambda_p \\ K_s^{(t)} & K_1^{(t)} & \dots & K_l^{(t)} & \dots K_p^{(t)} \end{vmatrix}_{t=\overline{1,p}} : | K_\nu^{(t)} |_{t=\overline{1,p},\ \nu=\overline{1,p}}, \tag{70}$$

причем для добавленных векторов $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{l-1} = \lambda =_{l+r} = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$. Заметим, что случаи 1, 2 включают в себя тот случай, когда функции $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, $f(z)$ являются действительными.

Пример выполнения случая 2. Пусть непрерывные комплекснозначные функции $\varphi_j(z)$ образуют T-систему на G, а функция $f(z)$ обращается в нуль в фиксированных нулях (точках $z_0 \in G$, в которых $\varphi_j(z_0) = 0$, $j = \overline{0, n}$), и число точек уклонения полинома $F(a; z)$ от $f(z)$ не превышает $n+1$. В этом случае для всякого тождества вида (31) (возможно и приводимого) векторы $\vec{\varphi}(z_s) = (\varphi_0(z_s), \ldots, \varphi_n(z_s))$ линейно независимы при $r \leqslant n+1$. На рассматриваемые случаи переносятся все результаты работ [7, 8]. Из изложенного вытекают следующие теоремы.

Теорема 6. *Для того чтобы допустимый полином $F(a; z)$ в случае 1 был наименее уклоняющимся от $f(z)$ на бикомпакте G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого набора точек уклонения $\{z_s\}_p^{p+r-1}$ ($r \leqslant n+2-p$) было выполнено одно из двух:*

1) *либо при линейной независимости векторов $\vec{\varphi}(z_s)$, $s = \overline{p, p+r-1}$, соответствующих точкам уклонения, для матрицы вида (66) выполняются условия:*

а) *ранг дополнительной матрицы* (66′) $d = p - 1$,

б) *для отличных от нуля чисел*

$$|K_1^{(t)} \dots K_{p-1}^{(t)} K_s^{(t)}|_{t=\overline{1,p}} \qquad (s = \overline{1, n+1}),$$

где $(K_\nu^{(t)})_{t=\overline{1,p}}$ $(\nu = \overline{1, p-1})$ — *некоторые линейно независимые столбцы из* (66′), *имеем*:

$$\operatorname{sgn} |K_1^{(t)} \dots K_{p-1}^{(t)} K_s^{(t)}|_{t=\overline{1,p}} \cdot \operatorname{sgn} \delta(a^*; z_s) = \mathrm{const};$$

2) *либо при линейной зависимости в узком смысле векторов*

$$\vec{\varphi}(z_s) = (\varphi_0(z_s), \dots, \varphi_n(z_s)) : \sum c_s \vec{\varphi}(z_s) = 0, \qquad c_s \neq 0$$

имеем

$$\operatorname{sgn} c_s \cdot \operatorname{sgn} \delta(a^*; z_s) = \mathrm{const}, \qquad s = \overline{1, r}.$$

Теорема 7. *Для того чтобы в случае 2 полином* $F(a^*; z)$ *был наименее уклоняющимся от функции* $f(z)$, *непрерывной на бикомпакте* G, *необходимо и достаточно, чтобы для некоторого набора точек уклонения* $\{z_s\}_l^{l+r-1}$ *были выполнены следующие условия для матрицы вида* (66):

а) *существуют числа* $\lambda_l, \dots, \lambda_p \left(\sum |\lambda_s| > 0\right)$ *такие, что для некоторых* p *фиксированных линейно независимых столбцов* $(K_\nu^{(t)})_{t=\overline{1,p}}$ $(\nu = \overline{1, p})$ *матрицы* (66) *определители*

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda_l & \dots & \lambda_p \\ K_{s_\sigma}^{(t)} & K_1^{(t)} & \dots & K_l^{(t)} & \dots & K_p^{(t)} \end{vmatrix}_{t=\overline{1,p}} = 0,$$

где $(K_{s_\sigma}^{(t)})_{t=\overline{1,p}}$ — *столбцы дополнительной матрицы* (69),

б) *для отличных от нуля чисел*

$$\lambda_s = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda_l & \dots & \lambda_p \\ K_s^{(t)} & K_1^{(t)} & \dots & K_l^{(t)} & \dots & K_p^{(t)} \end{vmatrix}_{t=\overline{1,p}} : |K_\nu^{(t)}|_{\nu=\overline{1,p},\ t=\overline{1,p}}$$

имеем

$$\operatorname{sgn} \lambda_s \cdot \operatorname{sgn} \delta(a^*; z_s) = \mathrm{const}.$$

При условиях а), б) теорем 6, 7 справедлив следующий факт.

1) *Для того чтобы вектор* $\vec{\lambda} = (0_1, \dots, \lambda_l, \dots, \lambda_{l+r-1}, \dots, 0_{n+1})$, *соответствующий тождеству* (60*) *выражался через* l $(l \leqslant p)$ *векторов* $\vec{K}^{(t)} = (K_1^{(t)}, \dots, K_{n+1}^{(t)})$ $(t = \overline{1, l})$, *необходимо и достаточно, чтобы между соответствующими строками матрицы* $\|K_\nu^{(t)}\|_{\nu=\overline{1,p-1},\ t=\overline{1,p}}$ *существовала линейная зависимость в узком смысле*.

На основе 1) условия а), б) теорем 6, 7 уточняются и формулируются следующим образом.

Для теоремы 6:

а) *ранг подматрицы из* l $(l \leqslant p)$ *строк дополнительной матрицы* (66′) $d = l - 1$,

б) *для отличных от нуля чисел*

$$|K_{s_1}^{(t)} \dots K_{s_{l-1}}^{(t)} K_s^{(t)}|_{t=\overline{1,l}} \qquad (s = \overline{1, n+1}),$$

где $(K_{s_\nu}^{(t)})_{t=\overline{1,l}}$ $(\nu = \overline{1, l-1})$ — *некоторые линейно независимые столбцы подматрицы из* l *строк матрицы* (66′), *имеем*

$$\operatorname{sgn} |K_{s_1}^{(t)} \dots K_{s_{l-1}}^{(t)} K_s^{(t)}|_{t=\overline{1,l}} \cdot \operatorname{sgn} \delta(a^*; z_s) = \mathrm{const}.$$

Для теоремы 7:

а) *существуют числа* $\lambda_1, \ldots \lambda_l$ $(l \leqslant p)$ $\left(\sum |\lambda_s| > 0\right)$ *такие, что для некоторых* l *линейно независимых столбцов* $(K_s^{(t)})_{t=\overline{1,l}}$ *подматрицы из* l *строк матрицы* (66) *определители*

$$\left| \begin{matrix} 0 & \lambda_1 \ldots \lambda_l \\ K_{s_\sigma}^{(t)} & K_1^{(t)} \ldots K_l^{(t)} \end{matrix} \right|_{t=\overline{1,l}} = 0$$

для столбцов $(K_{s_\sigma}^{(t)})_{t=\overline{1,l}}$ *подматрицы из* l *строк дополнительной матрицы* (69),

б) *для отличных от нуля чисел*

$$\underset{(s=\overline{1,n+1})}{\lambda_s} = \left| \begin{matrix} 0 & \lambda_1 \ \ldots \ \lambda_l \\ K_s^{(t)} & K_1^{(t)} \ldots K_l^{(t)} \end{matrix} \right|_{t=\overline{1,l}} : |K_\nu^{(t)}|_{\substack{t=\overline{1,l} \\ \nu=\overline{1,l}}}$$

имеем

$$\operatorname{sgn} \lambda_s \cdot \operatorname{sgn} \delta(z_s) = \mathrm{const}.$$

Для величины наилучшего приближения ϱ имеем:

$$\varrho = \frac{\left|\sum \mu_t \alpha_t - \sum \lambda_s f(z_s)\right|}{\sum |\lambda_s|},$$

где $\lambda_s = \sum\limits_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}$ при условиях а), б) теорем 6, 7 и

$$\varrho = \frac{\left|\sum c_s f(z_s)\right|}{\sum |c_s|}$$

при условии 2) теоремы 6.

Пример. В области $|z| \leqslant 1$ найти полином $F(a; z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ наименее уклоняющийся от нуля при связях

$$\omega_1[F] = (1 + 2i) a_0 + 3i a_1 - 3a_2 = -3,$$
$$\omega_2[F] = (-2i) a_0 + (-1 - 3i) a_1 + 0 \cdot a_2 = 0.$$

Покажем, что допустимый полином $F(a; z) = z^2$ является решением. Возьмем точки уклонения $z_1 = i$, $z_2 = 1$, $z_3 = -i$. Из систем уравнений

$$1 + 2i = K_1^{(1)} + K_2^{(1)} + K_3^{(1)},$$
$$3i = iK_1^{(1)} + K_2^{(1)} + K_3^{(1)}(-i),$$
$$-3 = -K_1^{(1)} + K_2^{(1)} - K_3^{(1)};$$
$$-2i = K_1^{(2)} + K_2^{(2)} + K_3^{(2)},$$
$$-1 - 3i = K_1^{(2)} \cdot i + K_2^{(2)} + K_3^{(2)}(-i),$$
$$0 = -K_1^{(2)} + K_2^{(2)} - K_3^{(2)}$$

находим $\vec{K}^{(1)} = (2, -1+i, i)$, $\vec{K}^{(2)} = (-1, -i, 1-i)$. Взяв $\lambda_1 = 1$ из уравнения $1 = 2\mu_1 - \mu_2$, находим $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ и $\vec{K}^{(1)}\mu_1 + \vec{K}^{(2)}\mu_2 = (1, -1, 1)$. Так как $\delta(z_1) = -1$, $\delta(z_2) = 1$, $\delta(z_3) = -1$, то $F(a; z) = z^2$ наименее уклоняется от нуля при указанных связях.

Проведем исследование рассмотренного примера при помощи теоремы 3 и покажем, что указанные три точки уклонения составляют неприводимую чебышевскую подсистему точек уклонения. Имеем

$$\varphi_j^{*'}(z_s) = \cos\theta_s\varphi_j'(z_s) + \sin\theta_s\varphi_j''(z_s),\ \varphi_j^{*''}(z_s) = \cos\theta_s\varphi_j''(z_s) - \sin\theta_s\varphi_j'(z_s),$$

$$\theta_s = \arg\delta(z_s),\quad \theta_1 = \pi,\quad \theta_2 = 0,\quad \theta_3 = \pi.$$

Для векторов, соответствующих точкам уклонения

$$\vec{\varphi}_1^* = (-1, 0, 0, -1, 1, 0),\quad \vec{\varphi}_2^* = (1, 0, 1, 0, 1, 0),$$

$$\vec{\varphi}_3^* = (-1, 0, 0, 1, 1, 0)$$

и добавленных векторов $\vec{d}_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\vec{d}_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\vec{d}_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ решим системы уравнений вида (5), (6).
Находим

$$\vec{K}^{(1)'} = (-2{,}5; -1; 0{,}5; 2; 0; 1),\qquad \vec{K}^{(1)''} = (0{,}5; -1; 0{,}5; 1; -3; -2),$$

$$\vec{K}^{(2)'} = (1{,}5; 0; -1{,}5; -2; 0; -1),\qquad \vec{K}^{(2)''} = (0; 1; -1; 0; 0; 2).$$

Из системы уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1' - \mu_2' - 2\mu_1'' + 2\mu_2'', \\ 0 &= 0 + 0 - 3\mu_1'' + 0, \\ 0 &= 2\mu_1' - 2\mu_2' + \mu_1'' + 0, \\ 1 &= -0{,}5\mu_1' - 1{,}5\mu_2' - 0{,}5\mu_1'' - \mu_2'' \end{aligned}$$

находим $\mu_1' = \mu_2' = -1$, $\mu_1'' = \mu_2'' = 0$ и $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$, т. е. условия теоремы 3 выполнены.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб, 1892.
2. Е. Я. Ремез, О чебышевских приближениях в комплексной области, ДАН СССР, т. 77, 1951, 965—968.
3. Е. Я. Ремез, Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области, УМЖ, 5, 1953, 3—49.
4. В. С. Виденский, О равномерном приближении в комплексной области. УМН, № 5 (71), 1956, 169—175.
5. В. С. Виденский, О наименее уклоняющихся от нуля многочленах, коэффициенты которых удовлетворяют данной линейной зависимости, ДАН СССР, т. 126, № 2, 1959, 241—250.
6. Е. Г. Гольштейн, Задача наилучшего чебышевского приближения в комплексной области с дополнительными условиями на коэффициенты аппроксимирующего полинома, ДАН СССР, т. 141, № 2, 1961, 274—276.
7. В. Д. Коромысличенко, Некоторые обобщения задачи В. А. Маркова и его основной теоремы, соответствующей критерию П. Л. Чебышева — А. А. Маркова. I, УМЖ, т. XIII, № 3, 1961, 59—74.
8. В. Д. Коромысличенко, Некоторые обобщения задачи В. А. Маркова и его основной теоремы, соответствующей критерию П. Л. Чебышева — А. А. Маркова. II, УМЖ, т. XIV, № 2, 1962, 29—43.

Поступила 18.XII 1962 г.
Киев