1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Обобщение одной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай гильбертова пространства

*О. Б. Лыкова*

Статья посвящена обобщению на случай гильбертова пространства $\mathscr{H}$ теоремы Н. Н. Боголюбова об исследовании поведения решений уравнения в стандартной форме в окрестности периодического решения соответствующего усредненного уравнения [1]. Подобному вопросу (распространению на случай гильбертова пространства теорем Н. Н. Боголюбова, относящихся к обоснованию асимптотических методов как на конечном временном интервале, так и бесконечном), посвящено ряд работ [2, 3, 4].

Будем исходить из рассмотрения уравнения в стандартной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

где $x$, $X$ — вектор-функции со значениями в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\varepsilon$ — малый параметр. Относительно функции $\varepsilon X(t, x)$ полагаем, что она определена на множестве $E_{\varepsilon_0} \times R \times D$, где $E_{\varepsilon_0} = (0, \varepsilon_0]$, $R = (-\infty, \infty)$, $D$—некоторая область из $\mathscr{H}$ ($x \in D$, $t \in R$), является непрерывной функцией своих аргументов и допускает существование предела

$$X(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt$$

равномерно по всем $x \in D$.

Уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x) \tag{2}$$

имеет периодическое решение

$$x = x^0(\psi), \quad x^0(\psi + \Omega) = x^0(\psi), \quad \psi = \omega t + \varphi, \tag{3}$$

принадлежащее вместе со своей $U_\delta$-окрестностью области $D$, где $\delta$ — некоторое положительное число, $\Omega$ — период.

На множестве $R \times U_\delta$ $X(t, x)$ обладает ограниченной и равномерно непрерывной производной Фреше по $x$ до второго порядка включительно. (В дальнейшем везде сходимость, непрерывность и дифференцируемость будем понимать в смысле нормы пространства $\mathscr{H}$.)

Докажем существование и установим ряд свойств одномерного интегрального многообразия* уравнения (1) в некоторой окрестности решения (3).

---

* Здесь интегральное многообразие определяется по аналогии с [1], только в рассматриваемом случае в представлении $x = f(t, C_1, C_2, \ldots, C_s)$ будет $x = x_1, x_2, \ldots$ и, следовательно, $f = f_1, f_2, \ldots$ и также $\sum_{i=0}^{\infty} \| f_i \| < \infty$.

Метод доказательства как и обычно будет состоять в приведении исходного уравнения к специальному виду, удобному для дальнейшего рассмотрения, исследованию полученного уравнения и затем в перенесении результатов на исходное уравнение.

Введем в уравнении (4) новую переменную $y$ согласно формуле

$$x = x^0(\psi) + y. \tag{4}$$

Тогда, представляя уравнение (1) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(x^0) + \varepsilon X'_x(x^0)\,y + \varepsilon X_1(t, x), \tag{5}$$

где

$$\varepsilon X_1(t, x) = \varepsilon X(t, x) - \varepsilon X(x) + \varepsilon X(x) - \varepsilon X(x^0) - \varepsilon X'_x(x^0)\,y,$$

после некоторых преобразований получим уравнение относительно новой переменной $y$:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon A(\psi)\,y + \varepsilon Y(t, \psi, y), \tag{6}$$

где оператор $A(\psi)$, порожденный матрицей $\dfrac{\partial X(x^0(\psi))}{\partial x}$, является линейным ограниченным оператором, периодическим по $\psi$ с периодом $\Omega$. Вектор-функция гильбертова пространства $Y(t, \psi, y)$ определена на множестве $R \times \Psi \times U_\delta$, непрерывна относительно $t$, $\psi$, $y$, периодическая по $\psi$ с периодом $\Omega$, обладает ограниченными и равномерно-непрерывными производными Фреше по $\psi$, $y$ первого порядка.

Рассмотрим соответствующее (6) линейное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon A(\psi)\,y. \tag{7}$$

Обозначим через $U(\psi, \varepsilon)$ разрешающий оператор этого уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dU(\psi, \varepsilon)}{dt} = \varepsilon A(\psi)\,U(\psi, \varepsilon), \\ U(0, \varepsilon) = I. \end{cases} \tag{8}$$

Для оператора $U(\psi, \varepsilon)$ имеет место разложение

$$U(\psi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\psi)\,\varepsilon^k, \tag{9}$$

сходящееся равномерно относительно $\psi$ при любом $\varepsilon$ $(\varepsilon \in E_{\varepsilon_0})$.

Введем в рассмотрение оператор монодромии $U(\Omega, \varepsilon)$:

$$U(\psi + \Omega, \varepsilon) = U(\psi, \varepsilon)\,U(\Omega, \varepsilon). \tag{10}$$

Как и в [5], полагая, что спектр $\sigma(U_0)$ оператора $U(\Omega, 0) = U_0(\Omega)$ не окружает точку $\lambda = 0$ ($\lambda$ — регулярная точка оператора $U(\Omega, \varepsilon)$) и более того, существует луч, исходящий из начала координат и не пересекающийся со множеством $\sigma(U_0)$, выберем замкнутый жорданов контур $\Gamma$, окружающий множество $\sigma(U_0)$ и не содержащий точку $\lambda = 0$. Тогда при достаточно малых по модулю значениях $\varepsilon$ спектр оператора $U(\Omega, \varepsilon)$ также будет лежать внутри области, ограниченной контуром $\Gamma$. Выбрав затем однозначную в этой области ветвь функции $\ln \lambda$, построим оператор

$$\ln U(\Omega, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \ln \lambda\,(U(\Omega, \varepsilon) - \lambda I)^{-1}\,d\lambda. \tag{11}$$

После этого введем в рассмотрение оператор-функцию:

$$B(\varepsilon) = \frac{1}{\Omega} \ln U(\Omega, \varepsilon) \tag{12}$$

(откуда $U(\Omega, \varepsilon) = e^{B(\varepsilon)\Omega}$).

Известно [5], что $B(\varepsilon)$ будет аналитической, однозначной в некотором круге радиуса $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ и потому будет допускать разложение вида

$$B(\varepsilon) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots \qquad (\varepsilon \in \mathrm{E}_{\varepsilon_1}, \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0). \tag{13}$$

Положим далее:

$$Q(\psi, \varepsilon) = U(\psi, \varepsilon)\, e^{-\psi B(\varepsilon)}. \tag{14}$$

На сегменте $[0, \Omega]$ операторная функция $Q(\psi, \varepsilon)$ непрерывна, имеет непрерывную производную по $\psi$ и непрерывный обратный оператор. Следовательно, $Q^{-1}(\psi, \varepsilon)$ также имеет ограниченную производную по $\psi$. В силу периодичности $Q(\psi, \varepsilon)$ по $\psi$ с периодом $\Omega$, $Q(\psi, \varepsilon)$ будет обладать указанным свойством для всех рассматриваемых значений $\psi$.

Легко видеть, что для $Q(\psi, \varepsilon)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(\psi, \varepsilon)}{\partial \psi}\, \omega + \omega Q(\psi, \varepsilon) B(\varepsilon) = \varepsilon A(\psi) Q(\psi, \varepsilon) \\ Q(0, \varepsilon) = I \end{cases} \tag{15}$$

и, кроме того, $Q(\psi, \varepsilon)$ раскладывается в ряд

$$Q(\psi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\psi)\, \varepsilon^k, \tag{16}$$

сходящийся равномерно относительно $t \in R$, $\varepsilon \in \mathrm{E}_{\varepsilon_1}$. (Разложение $Q(\psi, \varepsilon)$ следует из разложений (9) и (13).) Кроме того, $Q(\psi, \varepsilon)$ является периодической по $\psi$ оператор-функцией, с периодом $\Omega$. (Действительно $Q(\psi + \Omega, \varepsilon) = U(\psi + \Omega, \varepsilon)\, e^{(\psi+\Omega)B(\varepsilon)} = U(\psi, \varepsilon)\, U(\Omega, \varepsilon)\, e^{-\psi B(\varepsilon)} e^{-\Omega B(\varepsilon)} = U(\psi, \varepsilon)\, e^{-\psi B(\varepsilon)} = Q(\psi, \varepsilon)$.)

Заметим, что вычисление операторов $B(\varepsilon)$ и $Q(\psi, \varepsilon)$ можем быть произведено способом, изложенным в [5, гл. VI, § 3].

Сделаем следующее замечание. Как известно представление типа

$$U(\psi, \varepsilon) = Q(\psi, \varepsilon)\, e^{\psi B(\varepsilon)},$$

где $Q(\psi, \varepsilon)$ — периодическая по $\psi$ оператор-функция, $B(\varepsilon)$ — введенный выше оператор, называются представлениями Флоке и для конечномерных пространств они всегда существуют. Согласно [6] такое представление в бесконечномерном пространстве существует, если $|A|_M$ достаточно мало, где $|A|_M = \int\limits_t^{t+\Omega} \| A(\psi) \|\, d\psi$, $\psi = \omega t + \varphi$, $(|A|_M < \log 4)$.

Введем теперь в уравнении (6) вместо $y$ новую переменную $z$ по формуле

$$y = Q(\psi, \varepsilon)\, z. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (6), используя при этом (15), получаем:

$$\frac{dz}{dt} = \omega B(\varepsilon)\, z + \varepsilon Z(t, \psi, z, \varepsilon), \tag{18}$$

где $\varepsilon Z(t, \psi, z, \varepsilon)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам вектор-функции $\varepsilon Y(t, \psi, y)$.

Покажем, что оператор $B(\varepsilon)$ имеет простое нулевое собственное значение. Действительно, для решения $y(t)$ уравнения (7) периодического по $t$ с периодом $\frac{\Omega}{\omega}$ имеем:

$$y\left(t+\frac{\Omega}{\omega}\right)=Q(\psi+\Omega,\varepsilon)\,e^{(\psi+\Omega)B(\varepsilon)}y_0=Q(\psi,\varepsilon)\,e^{\psi B(\varepsilon)}e^{\Omega B(\varepsilon)}y_0=$$
$$=Q(\psi,\varepsilon)\,e^{\psi B(\varepsilon)}y_0=y(t),$$

откуда следует $e^{\Omega B(\varepsilon)}y_0=y_0$, что означает, что оператор $U(\Omega,\varepsilon)=e^{\Omega B(\varepsilon)}$ имеет простое собственное значение $\mu=1$ или оператор $B(\varepsilon)$ имеет простое собственное значение $\varrho=0$.

Предположим, что $\varrho=0$ является изолированной точкой спектра и остальную часть спектра обозначим через $\sigma_0(\beta)$.

Введем теперь в рассмотрение проекционные операторы:

$$P_1=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}(B(\varepsilon)-\lambda I)^{-1}\,d\lambda,\qquad P_0=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_0}(B(\varepsilon)-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

где $\Gamma_1$ окружает точку $\varrho=0$, а $\Gamma_0$ окружает спектр $\sigma_0(B)$. Проекторы $P_1$ и $P_0$ проектируют пространство $\mathcal{H}$ в инвариантные подпространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ со спектрами соответственно 0 и $\sigma_0(B)$, так что

$$\sigma(B)=\{0\}+\sigma_0(B).$$

Обозначая элементы пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно через $r$ и $s\,(s_1,s_2,\ldots)$, можем написать

$$r=P_1z,\qquad s=P_0z \tag{19}$$

при этом

$$z=P_1z+P_0z.$$

Из (19), принимая во внимание (18), а также свойство коммутативности проекционных операторов с оператором $B$, получим

$$\frac{dr}{dt}=P_1\frac{dz}{dt}=P_1\omega B(\varepsilon)\,z+P_1\varepsilon Z(t,\psi,r,s,\varepsilon)=\omega B(\varepsilon)\,r+$$
$$+\varepsilon R(t,\psi,r,s,\varepsilon)=\varepsilon R(t,\psi,r,s,\varepsilon), \tag{20}$$

$$\frac{ds}{dt}=P_0\frac{dz}{dt}=P_0\omega B(\varepsilon)\,z+P_0\varepsilon Z(t,\psi,r,s,\varepsilon)=\omega B(\varepsilon)\,s+\varepsilon S(t,\psi,r,s,\varepsilon). \tag{21}$$

Преобразуем полученные уравнения к уравнениям типа

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt}&=\omega+\varepsilon P(t,\psi,h,\varepsilon),\\ \frac{dh}{dt}&=Hh+\varepsilon Q(t,\psi,h,\varepsilon).\end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим наряду с уравнением (20)

$$\frac{dr}{dt}=\varepsilon R(t,\psi,r,s,\varepsilon)$$

уравнение

$$\frac{dr}{dt}=\varepsilon\overline{R}(\psi,r,0,0), \tag{23}$$

где

$$\varepsilon\overline{R}(\psi, r, 0, 0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T R(t, \psi, r, 0, 0)dt, \tag{24}$$

и пусть уравнение (24) имеет периодическое решение

$$r = r(\psi), \qquad \psi = \omega t + \varphi, \qquad r(\psi + \Omega) = r(\psi). \tag{25}$$

Очевидно, имеет место тождественно:

$$\frac{dr}{d\psi}\omega = \varepsilon\overline{R}(\psi, r, 0, 0). \tag{26}$$

Представим уравнение (20) в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon\overline{R}(\psi, r, 0, 0) + \varepsilon R_1(t, \psi, r, s, \varepsilon), \tag{27}$$

где $R_1(t, \psi, r, s, \varepsilon) = R(t, \psi, r, s, \varepsilon) - \overline{R}(\psi, r, 0, 0)$ — величина порядка $\varepsilon$.

Будем рассматривать теперь (25) как формулу замены переменных в уравнении (20). Подставляя (25) в эквивалентное (20) уравнение (27), принимая при этом во внимание (26), получаем

$$\frac{dr}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{dr}{d\psi}\omega + \varepsilon^2 R_1(t, \psi, r, s, \varepsilon). \tag{28}$$

Умножив обе части полученного уравнения слева на $\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^{-1}$, получим

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon R_2(t, \psi, r, s, \varepsilon). \tag{29}$$

Возвратимся к рассмотрению уравнения (21).

Принимая во внимание представление (13) оператора $B(\varepsilon)$, выделим член $B_0$, отнеся члены, содержащие $\varepsilon$ к функции $S$. Тогда, вводя обозначение

$$\omega B_0 = H, \tag{30}$$

а переменную $s(s_1, s_2, \ldots)$ обозначая через $h(h_1, h_2, \ldots)$, можем записать уравнение (21) в виде

$$\frac{dh}{dt} = Hh + \varepsilon Q(t, \psi, h, \varepsilon), \tag{31}$$

где $\varepsilon Q(t, \psi, h, \varepsilon) = \varepsilon S(t, \psi, h, \varepsilon) + (\varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots)h$.

Таким образом, уравнения (29) и (31) совместно дают нам требуемые уравнения (22).

Согласно свойствам функций, стоящих в правых частях уравнений (1) и (18), функция $\varepsilon P(t, \psi, h, \varepsilon)$ и вектор-функция $\varepsilon Q(t, \psi, h, \varepsilon)$ $(Q = Q_1, Q_2, \ldots)$ будут обладать следующими свойствами.

1. Функция $\varepsilon P(t, \psi, h, \varepsilon)$ и вектор-функция $Q(t, \psi, h, \varepsilon)$ гильбертова пространства определены на множестве $R \times \Psi \times U_\sigma \times \mathrm{E}_{\varepsilon_0}$ (при $x \in U_\delta$: $: h \in U_\sigma$; $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$), периодические по $\psi$ периода $\Omega$, являются непрерывными функциями своих аргументов, обладают ограниченными и равномерно — непрерывными производными Фреше по $\psi$, $h$ первого порядка.

2. Существует функция $M(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ такая, что на множестве $R \times \Psi \times \mathrm{E}_{\varepsilon_1}$ функции $P(t, \psi, h, \varepsilon)$, $Q(t, \psi, h, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам

$$|P(t, \psi, 0, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon), \qquad \|Q(t, \psi, 0, \varepsilon)\| \leqslant M(\varepsilon) \tag{32}$$

и, кроме того, на множестве $R \times \Psi \times U_\sigma \times E_{\varepsilon_1}$ эти функции удовлетворяют условию Липшица по $\psi$ и $h$ с постоянной $\lambda(\varepsilon, \sigma) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\sigma \to 0$.

Более общий случай уравнений типа (22) в гильбертовом пространстве, когда $\omega = \omega(t)$, $H = H(t)$ рассмотрен в работе [4], где доказана теорема о существовании единственного одномерного интегрального многообразия $\mathfrak{M}$ рассматриваемых уравнений представимого соотношением

$$h = f(t, \psi, \varepsilon), \tag{33}$$

где $f(t, \psi, \varepsilon)$ —вектор-функция гильбертова пространства $\mathcal{H}$ определена на множестве $R \times \Psi \times E_{\varepsilon_1}$, непрерывна относительно $t$, $\psi$, $\varepsilon$, периодическая по $\psi$ с периодом $\Omega$, удовлетворяет неравенствам

$$\| f(t, \psi, \varepsilon) \| \leqslant D(\varepsilon) < \sigma, \tag{34}$$

$$\| f(t, \psi', \varepsilon) - f(t, \psi'', \varepsilon) \| \leqslant \Delta(\varepsilon) \,| \psi' - \psi'' |, \tag{35}$$

где $D(\varepsilon) \to 0$, $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

При условии, что спектр оператора $H(t)$ лежит слева от мнимой оси в комплексной плоскости, многообразие обладает свойством притяжения траекторий любых решений рассматриваемых уравнений, выходящих в начальный момент времени из некоторой достаточно малой окрестности многообразия.

Кроме того, рассмотрение исходного уравнения сводится на многообразии к рассмотрению одного уравнения относительно $\psi$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon P(t, \psi, f(t, \psi, \varepsilon), \varepsilon), \tag{36}$$

где $P(t, \psi, f(t, \psi, \varepsilon), \varepsilon) = P(t, \psi, f_1(t, \psi, \varepsilon), f_2(t, \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon)$. При этом, согласно сделанному в [4] замечанию, вместо уравнения (34) с точностью до малой положительной функции $\delta(n)$ при фиксированном $n$ можно рассматривать уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon P_n(t, \psi, f, \varepsilon), \tag{37}$$

где $P_n(t, \psi, f, \varepsilon) = P(t, \psi, f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots, \varepsilon)$.

Очевидно, что аналогичный результат имеет место также для рассматриваемых нами уравнений (31).

Поэтому, перенеся формулировку свойств решений уравнений (31) на решения эквивалентного им исходного уравнения (1), можем сформулировать следующую теорему.

Т е о р е м а. *Всегда можно указать такие достаточно малые положительные постоянные* $\delta_1$, $\varepsilon_1$ $(\delta_1 \leqslant \delta_0,\ \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$, *функции* $K_1(\varepsilon, \delta) \to 0$, $K_2(\varepsilon, \delta) \to 0$, $D_1(\varepsilon) \to 0$, $\Delta_1(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$, *постоянную* $\gamma$, *что для всех* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *уравнение* (1) *будет обладать одномерным интегральным многообразием* $S$, *представимым соотношением вида*

$$x = F(t, \psi, \varepsilon), \tag{38}$$

*где вектор-функция гильбертова пространства* $\mathcal{H}$

$$F(t, \psi, \varepsilon) = x^0(\psi) + Q(\psi, \varepsilon) f(t, \psi, \varepsilon)$$

*определена на множестве* $R \times \Psi \times E_{\varepsilon_1}$ *и обладает следующими свойствами.*

1. *Вектор-функция* $F(t, \psi, \varepsilon)$ *является периодической по* $\psi$ *периода* $\Omega$ *и удовлетворяет неравенствам:*

$$\| F(t, \psi, \varepsilon) \| \leqslant D_1(\varepsilon) < \delta_1, \tag{39}$$

$$\| F(t, \psi', \varepsilon) - F(t, \psi'', \varepsilon) \| \leqslant \Delta_1(\varepsilon) \,\| \psi' - \psi'' \|. \tag{40}$$

2. *Для решений, лежащих на многообразии S, рассмотрение исходного уравнения* (1) *сводится к рассмотрению уравнения*

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon P(t, \psi, f(t, \psi, \varepsilon), \varepsilon), \tag{41}$$

*где* $\psi$ *— скаляр,* $\varepsilon P(t, \psi, f(t, \psi, \varepsilon), \varepsilon) = \varepsilon P(t, \psi, f_1(t, \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon)$ *— скалярная функция.*

3. *Если спектр оператора H (где H определяется согласно* (30) *и* (13)) *лежит слева от мнимой оси в комплексной плоскости, то любое решение уравнения* (1), *начальное значение которого принадлежит* $U_{\delta_L}$*-окрестности многообразия S, притягивается к нему по закону*

$$\| x(t) - F(t, \psi, \varepsilon) \| \leqslant K_1(\varepsilon, \delta)\, e^{-\gamma|t-t_0|},$$

$$\left| \frac{d\psi}{dt} - \omega - \varepsilon P_f(t, \psi, \varepsilon) \right| \leqslant K_2(\varepsilon, \delta)\, e^{-\gamma|t-t_0|}. \tag{42}$$

Доказательство утверждений теоремы непосредственно вытекает из представления (37) многообразия $S$ и свойств вектор-функции $f(t, \psi, \varepsilon)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
2. Ф. С. Лось, О принципе усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. XI, № 3, 1960.
3. З. Ф. Сирченко, Обобщение одной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай гильбертова пространства, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964.
4. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964.
5. М. Г. Крейн (под редакцией Далецкого Ю. Л.), Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, изд-во «Наукова думка», Киев, 1965.
6. Massera J., Schäffer J., Linear differential equations and functional analysis II. Ann. Math., 69, 1, 1959.
7. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Об интегральном многообразии нелинейной системы в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. 17, № 5, 1965 г.



Поступила 10.V 1966 г.
Киев