1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об интегро-дифференциальных уравнениях для распределений вероятностей аддитивных функционалов от диффузионных процессов

Н. И. Портенко

Рассматривается задача о нахождении распределения вероятностей аддитивного функционала от диффузионного процесса. Для характеристической функции функционала выводится интегро-дифференциальное уравнение (см. уравнение (A)). При этом предположения относительно функционала сводятся в основном к существованию в слабом смысле инфинитезимальных характеристик функционала, аналогичных диффузионным коэффициентам диффузионного процесса. Получающееся уравнение является обобщением на более широкий класс функционалов известных результатов М. Каца [1] и Е. Б. Дынкина [2] о распределении вероятностей функционалов типа

$$\int_{t_1}^{t_2} v(\xi_s)\, ds \tag{1}$$

с обычной функцией $v(x)$.

Доказывается теорема существования и единственности решения полученного уравнения. Находятся условия, при которых рассматриваемое интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно некоторому дифференциальному уравнению в частных производных.

Отметим, что задача о нахождении распределений различных функционалов от винеровского процесса изучалась в работе Г. Н. Сытой [7], в которой получены для этих распределений дифференциальные уравнения в частных производных.

Автор выражает признательность чл.-корр. АН УССР Гихману И. И. за постоянное внимание к работе.

1. Пусть ξ_t—одномерный однородный диффузионный процесс, заданный на произвольном конечном временном промежутке $[0, T]$. R^n — n-мерное эвклидово пространство, B^n—σ-алгебра борелевских множеств R^n, Ω—пространство элементарных событий, M_t — минимальная σ-алгебра ω-множеств, содержащая все множества вида $\{\xi_s \in \Gamma\}$, $\Gamma \in B^1$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Пусть P_x, $x \in R^1$—система вероятностных мер на некоторой σ-алгебре M^0, содержащей все M_t, $t \in [0, T]$. Предположим, что коэффициенты сноса и диффузии удовлетворяют условиям A работы Феллера (см. [3], стр. 71). При этих условиях, как показано в [3], плотность переходных вероятностей $G(t, x, y)$ является фундаментальным решением уравнения

$$L(G) \equiv -\frac{\partial G}{\partial t} + a(x)\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{b(x)}{2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ обозначают соответственно коэффициент сноса и коэффициент диффузии процесса ξ_t. Переходная функция $P(t, x, \Gamma)$ процесса задается формулой

$$P_x\{\xi_t \in \Gamma\} = P(t, x, \Gamma) = \int\limits_{\Gamma} G(t, x, y)\, dy,$$

где $x \in R^1$, $\Gamma \in B^1$, $t \in [0, T]$.

Семейство случайных величин $\eta(t_1, t_2)$, зависящих от t_1, t_2, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, называется функционалом от процесса ξ_t, если $\eta(t_1, t_2)$ измеримо относительно $M_{t_2}^{t_1}$ — минимальной σ-алгебры ω-множеств, содержащей множества вида $\{\xi_s \in \Gamma\}$, $s \in [t_1, t_2]$, $\Gamma \in B^1$. Мы будем рассматривать аддитивные стохастически непрерывные почти однородные функционалы, т. е. функционалы, удовлетворяющие условиям:

1) существует такое множество $A \subset \Omega$, имеющее при любом $x \in R^1$ P_x-вероятность 0, что при $\omega \overline{\in} A$ выполнено

$$\eta(s, t) + \eta(t, u) = \eta(s, u)$$

для всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant T$;

2) для всякого $\delta > 0$ при каждом $x \in R^1$

$$\lim_{t \downarrow 0} P_x\{|\eta(0, t)| > \delta\} = 0;$$

3) при любых фиксированных $x \in R^1$, $s, t \in [0, T]$, $s \leqslant t$, выполнено

$$P_x\{\eta(s, t) < \alpha / \xi_s\} = P_{\xi_s}\{\eta(0, t - s) < \alpha\}$$

почти наверное относительно P_x.

Положим

$$u(t, x; \lambda, \mu) = M_x\{e^{i\lambda\xi_t + i\mu\eta(0,t)}\}, \qquad -\infty < \lambda,\ \mu < \infty. \tag{2}$$

Очевидно,

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x; \lambda, \mu) = e^{i\lambda x}. \tag{3}$$

Обозначим

$$D_T = \{(t, x) : t \in (0, T],\ x \in R^1\}.$$

$C^0(R^1)$ — будет обозначать пространство непрерывных функций, носители которых компактны в R^1.

Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1. А, если для каждых $\varepsilon > 0$ и конечного отрезка $[C, D]$ существует такое число $A_0 > 0$, зависящее только от ε и $[C, D]$, что при всех $A > A_0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{|y| > A} |f(y)|\, G(t, x, y)\, dy < \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}$$

равномерно относительно $x \in [C, D]$. Аналогично, функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1. А′, если выполнено такое же неравенство с функцией $\left|\dfrac{\partial G(t, x, y)}{\partial x}\right|$ вместо $G(t, x, y)$.

Мы скажем, что функция $V(x)$ с ограниченным изменением на каждом конечном промежутке удовлетворяет условию 1. Б (1. Б′), если для любых $\varepsilon > 0$ и конечного отрезка $[C, D]$ существует такое $A_0 > 0$, что при $A > A_0$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{|y| > A} G(t, x, y)\, |dV(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}$$

$\left(\text{соответственно } \int\limits_{|y|>A} \left|\frac{\partial G(t, x, y)}{\partial x}\right| \cdot |dV(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)$ равномерно относительно $x \in [C, D]$.

Если предыдущие неравенства выполняются также в том случае, когда подынтегральное выражение умножить на $|f(y)|$, то мы будем говорить, что функции $f(x)$ и $V(x)$ удовлетворяют условию 1.В (соответственно 1.В¹).

Если $\zeta(\omega)$— некоторая случайная величина, то $\zeta^{(\delta)}(\omega)$ — «урезанная» случайная величина, т. е.

$$\zeta^{(\delta)}(\omega) = \begin{cases} \zeta(\omega), & \text{если } |\zeta(\omega)| \leqslant \delta, \\ 0, & \text{если } |\zeta(\omega)| > \delta. \end{cases}$$

Обозначим для $\Delta t > 0$

$$A_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\Delta t} M_x\{\eta^{(\delta)}(0, \Delta t)\},$$

$$B_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\Delta t} M_x\{\eta^{(\delta)}(0, \Delta t)(\xi_{\Delta t} - \xi_0)^{(\delta)}\},$$

$$C_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\Delta t} M_x\{(\eta^{(\delta)}(0, \Delta t))^2\},$$

$$F_{\Delta t}(x) = \frac{1}{\Delta t} P_x\{|\eta(0, \Delta t)| > \delta\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\eta(s, t)$, $s < t$, $s, t \in [0, T]$ аддитивный стохастически непрерывный почти однородный функционал от процесса ξ_t. Пусть функция $u(t, x; \lambda, \mu)$, определенная равенством* (2), *непрерывна по $(t, x) \in D_T$ и имеет непрерывную в области D_T производную по x. Пусть также выполнены условия*:

1.1) *для всякой функции $\varphi(x) \in C^0(R^1)$*

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int\limits_{R^1} \varphi(x) F_{\Delta t}(x)\, dx = 0,$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int\limits_{R^1} \varphi(x) A_{\Delta t}(x)\, dx = \int\limits_{R^1} \varphi(x) dV_0(x),$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int\limits_{R^1} \varphi(x) B_{\Delta t}(x)\, dx = \int\limits_{R^1} \varphi(x)\, dV_{01}(x),$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int\limits_{R^1} \varphi(x) C_{\Delta t}(x)\, dx = \int\limits_{R^1} \varphi(x)\, dV_1(x),$$

где функции $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ имеют ограниченное изменение на каждом конечном промежутке и удовлетворяют условию 1. Б.

1.2) *функции $A_{\Delta t}(x)$, $B_{\Delta t}(x)$, $C_{\Delta t}(x)$ и $F_{\Delta t}(x)$ удовлетворяют условию* 1. А *равномерно относительно $\Delta t > 0$. Тогда функция $u(t, x; \lambda, \mu)$ удовлетворяет уравнению*

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \int\limits_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y)\, dy + \int\limits_0^t ds \Bigg[i\mu \int\limits_{R^1} u(s, y; \lambda, \mu) G(t-s, x, y) dV_0(y) + $$
$$+ i\mu \int\limits_{R^1} \frac{\partial u(s, y; \lambda, \mu)}{\partial y} G(t-s, x, y)\, dV_{01}(y) -$$
$$- \frac{\mu^2}{2} \int\limits_{R^1} u(s, y; \lambda, \mu)\, G(t-s, x, y)\, dV_1(y) \Bigg]. \qquad \text{(A)}$$

Доказательство. Пусть $\Delta t > 0$. Нетрудно получить равенство

$$u(t+\Delta t, x; \lambda, \mu) = M_x\{u(t, \xi_{\Delta t}; \lambda, \mu)\} +$$

$$+ M_x\{(e^{i\mu\eta(0,\Delta t)} - 1)\, u(t, \xi_{\Delta t}; \lambda, \mu)\}. \tag{4}$$

Зафиксируем $t \in (0, T]$ и разобьем отрезок $[0, t]$ на частичные отрезки точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Записывая последовательно $u(t_k, x; \lambda, \mu) = u(t_{k-1} + \Delta t_k, x; \lambda, \mu)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ по формуле (4) и каждый раз подставляя полученное выражение в следующее, получим с использованием свойств однородности процесса и функционала

$$u(t, x; \lambda, \mu) = M_x\{e^{i\lambda\xi_t}\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \int_{R^1} G(t - t_k, x, y)\, M_y\{(e^{i\mu\Delta\eta_k} - 1)\, u(t_{k-1}, y + \Delta\xi_k; \lambda, \mu)\}\, dy + \varepsilon_n, \tag{5}$$

где положено $\Delta\eta_k = \eta(0, \Delta t_k)$, $\Delta\xi_k = \xi_{\Delta t_k} - \xi_0$, а $\varepsilon_n = M_y\{(e^{i\mu\Delta\eta_n} - 1) u(t_{n-1}, y + \Delta\xi_n; \lambda, \mu\} \to 0$ при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Можно показать, что замена в сумме равенства (5) величин $\Delta\eta_k$ и $\Delta\xi_k$ на урезанные изменяет эту сумму на величину, стремящуюся к нулю при $\max\limits_k \Delta t_k \to 0$. Разлагая затем в полученном после такой замены равенстве $e^{i\mu\Delta\eta_k^{(\delta)}} - 1$ и $u(t_{k-1}, y + \Delta\xi_k^{(\delta)}; \lambda, \mu)$ по формуле Тейлора и устремляя $\max\limits_k \Delta t_k$ к нулю, получим уравнение (A).

Замечание 1. Функции $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ определяются с точностью до постоянного слагаемого. Они не независимы. Действительно, применяя неравенство Коши-Буняковского, легко получить

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_{R^1} \varphi(y)\, B^2_{\Delta t}(y)\, dy \leqslant \int_{R^1} \varphi(y)\, b(y)\, dV_1(y)$$

для любой $\varphi(x) \in C^0(R^1)$, $\varphi(x) \geqslant 0$. Отсюда в частности следует, что функция $V_{01}(x)$ абсолютно непрерывна и ее плотность относительно меры Лебега $v_{01}(x)$ интегрируема с квадратом на каждом конечном промежутке.

Замечание 2. В некоторых случаях можно получить уравнение (A) без предположения дифференцируемости функции $u(t, x; \lambda, \mu)$.

Пусть сначала $\eta(t_1, t_2)$ — неотрицательный аддитивный стохастически непрерывный почти однородный функционал, для которого $F_{\Delta t}(x)$ и $A_{\Delta t}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, а функция $u(t, x; \lambda, \mu)$ непрерывна в области D_T. Тогда $u(t, x; \lambda, \mu)$ удовлетворяет уравнению

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \int_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y)\, dy +$$

$$+ i\mu \int_0^t ds \int_{R^1} G(t - s, x, y)\, u(s, y; \lambda, \mu)\, dV_0(y).$$

Такое же уравнение можно получить и для функционала, представимого в виде разности двух неотрицательных функционалов, каждый из которых удовлетворяет перечисленным выше условиям.

Пусть

$$\eta(s, t) = \int_s^t v(\xi_u)\, du,$$

где $v(x)$ — непрерывная и ограниченная функция на R^1. Нетрудно видеть, что

$$A_{\Delta t}(x) \to v(x), \qquad C_{\Delta t}(x) \to 0$$

при $\Delta t \to 0$. Можно показать, что в этом случае функция $u(t, x; \lambda, \mu)$ при фиксированных λ и μ непрерывна в области D_T, и непосредственно из равенства (5) получаем уравнение

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \int_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y)\, dy +$$

$$+ i\mu \int_0^t ds \int_{R^1} G(t-s, x, y)\, u(s, y; \lambda, \mu)\, v(y)\, dy. \tag{6}$$

Такие уравнения рассматривались в [1] для винеровских процессов и в [2] для марковских. Уравнение (6) получено нами для непрерывных и ограниченных функций $v(x)$. Однако этот результат может быть значительно обобщен.

2. Докажем теперь теорему существования и единственности уравнения (A). Для этого нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия Феллера (условия* A *из* [3]) *относительно коэффициентов* $a(x)$ *и* $b(x)$ *и пусть* $b_x(x)$ *ограничена на* R^1. *Тогда функция*

$$u_0(t, x; \lambda) = \int_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y)\, dy$$

имеет в области D_T *непрерывные производные* $\frac{\partial u_0}{\partial t}$, $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$, *ограниченные в* D_T *равномерно относительно* λ *в любом конечном промежутке. Функция* $u_0(t, x; \lambda)$ *удовлетворяет уравнению*

$$L(u_0) = 0$$

с начальным условием

$$\lim_{t \downarrow 0} u_0(t, x; \lambda) = e^{i\lambda x}.$$

Кроме того, выполнены равенства

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\partial u_0(t, x; \lambda)}{\partial x} = i\lambda e^{i\lambda x},$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\partial^2 u_0(t, x; \lambda)}{\partial x^2} = -\lambda^2 e^{i\lambda x}.$$

Лемма 2. *Пусть функция* $u(t, x)$ *непрерывна в* D_T *и удовлетворяет неравенству* $|u(t, x)| < c(x)$, *где* $c(x) \geqslant 0$ — *непрерывная функция на* R^1. *Пусть функция* $V(x)$, *имеющая ограниченное изменение на каждом конечном промежутке, удовлетворяет условиям:*

2.1.A.

$$\int_{R^1} \left(G(t, x, z) + \left| \frac{\partial G(t, x, z)}{\partial x} \right| \right) c(z)\, |dV(z)| < \frac{K(x)}{\sqrt{t}},$$

где $K(x)$ — *некоторая непрерывная неотрицательная функция на* R^1.

2. 1. Б. *Функции* $c(x)$ и $V(x)$ *удовлетворяют условиям* 2. 1. В и 1. В'. *Тогда функция*

$$f(t, x) = \int_0^t ds \int_{R^1} u(s, z)\, G(t-s, x, z)\, dV(z)$$

непрерывна в области D_T и имеет в этой области непрерывную производную по x, причем

$$|f(t, x)| + \left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| < LK(x),$$

где L — некоторая постоянная.

Лемма 1 доказывается методами работы [6]. Доказательство леммы 2 элементарно.

Каждой функции $V(x)$ с ограниченным изменением на каждом конечном промежутке поставим в соответствие семейство операторов S_t, действующих на непрерывную неотрицательную функцию $f(x)$, $x \in R^1$ по формуле

$$S_t(f)(x) = \int_{R^1} \left(G(t, x, y) + \left|\frac{\partial G(t, x, y)}{\partial x}\right|\right) f(y) \, |dV(y)|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Предположим, что операторы S_t, соответствующие функциям $V_0(x)$, $V_{01}(x)$, $V_1(x)$ уравнения* (A), *удовлетворяют условиям:*

2.2.А. *существует такая последовательность непрерывных неотрицательных функций $K_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, что*

$$S_t(1)(x) \leqslant \frac{K_0(x)}{\sqrt{t}}, \qquad S_t(K_n)(x) \leqslant \frac{K_{n+1}(x)}{\sqrt{t}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

2. 2.Б.

$$K_{n+1}(x) \leqslant c_{n+1} K_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где c_n — последовательность чисел, такая, что $\dfrac{c_n}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Предположим также, что функции $K_n(x)$ при каждом n вместе с любой из функций $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ удовлетворяют условиям 1.*B* и 1.*B'*. *Тогда существует удовлетворяющее начальному условию* (3) *решение уравнения* (*A*) *даваемое рядом*

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x; \lambda, \mu), \tag{7}$$

$$u_0(t, x; \lambda, \mu) = u_0(t, x; \lambda) = \int_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y) \, dy,$$

$$u_{n+1}(t, x; \lambda, \mu) = \int_0^t ds \Bigg[i\mu \int_{R^1} u_n(s, z; \lambda, \mu) G(t - s, x, z) \, dV_0(z) +$$

$$+ i\mu \int_{R^1} \frac{\partial u_n(s, z; \lambda, \mu)}{\partial z} G(t - s, x, z) \, dV_{01}(z) -$$

$$- \frac{\mu^2}{2} \int_{R^1} u_n(s, z; \lambda, \mu) G(t - s, x, z) \, dV_1(z) \Bigg].$$

Ряд (7) *сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in [0, T]$ и относительно x, λ, μ — в конечных промежутках их изменения. Функция $u(t, x; \lambda, \mu)$ непрерывна в области D_T и имеет непрерывную производную по x в этой области, причем*

$$|u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < LK_0(x), \tag{8}$$

где L — постоянная, конечная для каждого конечного набора λ, μ, T. Решение, обладающее такими свойствами, единственно.

Доказательство. Частичные суммы ряда (7) являются последовательными приближениями решения уравнения (A). Пусть λ и μ изменяются в конечных промежутках Из леммы 1 следует

$$|u_0(t, x; \lambda, \mu)| < M,$$

$$\left|\frac{\partial u_0(t, x; \lambda, \mu)}{\partial x}\right| < M,$$

где M—некоторая постоянная. Нетрудно получить оценки

$$\left.\begin{aligned} |u_n(t, x; \lambda, \mu)| &< M\frac{(\sqrt{\pi})^n\left(2|\mu| + \frac{\mu^2}{2}\right)^n K_{n-1}(x)\, t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \\ \left|\frac{\partial u_n(t, x; \lambda, \mu)}{\partial x}\right| &< M\frac{(\sqrt{\pi})^n\left(2|\mu| + \frac{\mu^2}{2}\right)^n K_{n-1}(x)\, t^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем функции u_n и $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ непрерывны в области D_T, как это следует из леммы 2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(t, x; \lambda, \mu)| + \left|\frac{\partial u_n(t, x; \lambda, \mu)}{\partial x}\right|$$

мажорируется рядом

$$2MK_0(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{\pi})^n\left(2|\mu| + \frac{\mu^2}{2}\right)^n c_{n-1}\ldots c_0}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}\, t^{\frac{n}{2}}.$$

В силу условия 2.2.Б этот ряд сходится равномерно относительно x на каждом конечном отрезке. Отсюда сразу же получаем оценку (8). Из (9) и из леммы 1 следует, что $u(t, x; \lambda, \mu)$ удовлетворяет начальному условию (3). Пусть $v(t, x; \lambda, \mu)$ — другое решение, обладающее такими же свойствами и удовлетворяющее неравенству (8). Тогда разность $\widetilde{u}(t, x; \lambda, \mu) = u - v$ удовлетворяет уравнению (A) без функции $u_0(t, x; \lambda)$ в правой части. Так же, как были получены оценки (9), получаем

$$|\widetilde{u}| \leqslant 2K_0(x)\frac{(\sqrt{\pi})^n\left(2|\mu| + \frac{\mu^2}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} c_{n-1}\ldots c_0 t^{\frac{n}{2}}.$$

Так как левая часть не зависит от n, то $\widetilde{u} \equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Условия теоремы 2 выполняются, если, например, $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ абсолютно непрерывны и их производные относительно меры Лебега $v_0(x)$, $v_{01}(x)$ и $v_1(x)$ ограничены. Тогда $K_0(x) = K$ и $K_n(x) = K^{n+1}$, где K — постоянная.

Обозначим через U_t оператор, соответствующий функции $V(x)$ с ограниченным изменением на каждом конечном промежутке и переводящий непрерывную неотрицательную функцию $f(x)$, $x \in R^1$ в функцию

$$U_t(f)(x) = \int\limits_{R^1} G(t, x, y) f(y) \, | dV(y) |.$$

Так как при $V_{01} \equiv 0$ в уравнение (A) не входит производная $\frac{\partial u}{\partial x}$, то условия существования и единственности решения можно существенно ослабить, как показывает следующая

Теорема 2′. *Пусть в уравнении* (A) $V_{01} \equiv 0$ *и операторы* U_t, *соответствующие функциям* $V_0(x)$ *и* $V_1(x)$, *удовлетворяют условиям* 2.2.А и 2.2.Б *теоремы* 2, *а функции* $K_n(x)$ *при каждом* n *вместе с любой из функций* $V_0(x)$ и $V_1(x)$ *удовлетворяют условию* 1.В (*без* 1.В′). *Если при этом выполнены условия леммы* 1, *то существует непрерывное в области* D_T *решение уравнения* (A), *обладающее теми же свойствами, что и в теореме* 2, *за исключением (быть может) дифференцируемости.*

Следствие. *Если* $V_{01} \equiv 0$, *а функции* $V_0(x)$ *и* $V_1(x)$ *имеют ограниченное изменение на* R^1, *то условия теоремы* 2′ *выполнены.*

Пример. Пусть $V_{01} \equiv V_1 \equiv 0$, а функция $V_0(x)$ постоянна всюду, за исключением точки x_0, где она имеет скачок величиной единица. Тогда получается уравнение

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \int\limits_{R^1} e^{i\lambda y} G(t, x, y) \, dy + i\mu \int\limits_0^t G(t-s, x, x_0) \, u(s, x_0; \lambda, \mu) \, ds.$$

Такое уравнение рассматривалось И. И. Гихманом в [4,5] при изучении предельных распределений числа пересечений случайной функцией границы данной области.

Покажем теперь, что при некоторых условиях на функции $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ уравнение (A) эквивалентно некоторому дифференциальному уравнению в частных производных. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть в области* D_T *функция* $f(t, x)$ *непрерывна и ограничена вместе со своей производной по* x *и пусть выполнены условия леммы 1. Тогда функция*

$$u(t, x) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{R^1} f(s, z) \, G(t-s, x, z) \, dz$$

непрерывна и ограничена в области D_T *и имеет в этой области непрерывные и ограниченные производные* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. *Кроме того, в области* D_T $u(t, x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$-L(u) = f(t, x)$$

с начальным условием

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = 0.$$

Доказывается эта лемма методами статьи [6].

Предположим, что функции $V_0(x)$, $V_{01}(x)$ и $V_1(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы и их производные $v_0(x)$, $v_{01}(x)$ и $v_1(x)$, а также $v_0'(x)$, $v_{01}'(x)$ и $v_1'(x)$ ограничены на R^1. При этих условиях решение уравнения (A) является также решением уравнения

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(x)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\mu v_0(x) u + i\mu v_{01}(x) \frac{\partial u}{\partial x} - \mu^2 \frac{v_1(x)}{2} u = 0 \qquad (A')$$

с тем же начальным условием (3).

Пусть $u_n(t, x; \lambda, \mu)$ такие же, как и в теореме 2.
В силу леммы 1

$$L(u_0) = 0$$

и

$$\lim_{t \downarrow 0} u_0(t, x; \lambda, \mu) = e^{i\lambda x}.$$

Рассмотрим

$$u_1(t, x; \lambda, \mu) = \int_0^t ds \int_{R^1} \Big[i\mu u_0(s, z; \lambda, \mu) v_0(z) +$$

$$+ i\mu \frac{\partial u_0(s, z; \lambda, \mu)}{\partial z} v_{01}(z) - \frac{\mu^2}{2} u_0(s, z; \lambda, \mu) v_1(z) \Big] G(t-s, x, z)\, dz.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой функцию от (s, z), непрерывную и ограниченную в области D_T вместе со своей производной по z. Согласно лемме 3

$$-L(u_1) = i\mu v_0 u_0 + i\mu v_{01} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\mu^2}{2} v_1 u_0$$

и

$$\lim_{t \downarrow 0} u_1(t, x; \lambda, \mu) = 0.$$

Аналогично

$$-L(u_{n+1}) = i\mu v_0 u_n + i\mu v_{01} \frac{\partial u_n}{\partial x} - \frac{\mu^2}{2} v_1 u_n,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} u_{n+1}(t, x; \lambda, \mu) = 0.$$

Так как условия теоремы 2 выполнены, то для функций u_n справедливы оценки (9) с $K_{n-1}(x) = K^n$, K — постоянная. Поэтому ряд

$$u(t, x; \lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t, x; \lambda, \mu)$$

сходится абсолютно и равномерно относительно $(t, x) \in D_T$. Можно показать, что к этому ряду применим почленно оператор L. Наше утверждение доказано.

В заключение заметим, что результаты настоящей статьи могут быть обобщены на случай неоднородных процессов и функционалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Кас, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkely Symposium on Math. Statistics and Probability, Berkeley, 1951, 189—215.
2. Е. Б. Дынкин, Функционалы от траектории марковских случайных процессов, ДАН СССР, т. 104, № 5, 1955, 691—694.
3. В. Феллер, К теории стохастических процессов, УМН, вып. V, 1938.
4. Й. І. Гіхман, Деякі граничні теореми для кількості перетинів випадковою функцією границі даної області, Наукові записки КДУ, вип. XVI, 1957, 149—164.
5. Й. І. Гіхман, Асимптотичні розподіли числа перетинів випадковою функцією границі даної області, Вісник КДУ, 1, вип. 1, 1958, 25—46.
6. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН, т. XVII, вип. 3, 1962.
7. Г. Н. Сытая, Дипломная работа, КГУ, 1962.

Поступила 29.I 1966 г.
Киев