1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 5
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Функции распределения для систем заряженных частиц с учетом короткодействия

Е. А. Стрельцова

Изучение систем частиц, взаимодействующих посредством бинарного потенциала, шло в основном двумя различными путями и привело к созданию двух отдельных теорий: теории электролитов Дебая [1] и теории реальных газов Урселла — Майера [2].

Первая из них рассматривала систему частиц, связанных взаимодействием чисто кулоновского типа, полностью игнорируя наличие короткодействующих сил отталкивания, обусловливающих взаимную непроницаемость частиц. Вторая теория учитывала только короткодействие, не рассматривая систем с заряженными частицами.

Первая попытка создания общей теории, объединяющей изучение систем с обоими видами взаимодействия, была сделана Н. Н. Боголюбовым [3]. К уравнениям, написанным исходя из статистических соображений, применялись два различных метода асимптотических разложений, приводящих, в качестве первого приближения, в одном случае к результатам теории Майера и в другом — к уравнению Дебая.

Более поздние результаты, полученные на этом пути, принадлежат, в основном, ученикам Н. Н. Боголюбова. В работах [4, 5, 6, 7, 8, 18] сделаны уточнения дебаевских результатов и их применение к выводу кинетических уравнений и к подсчету электрофоретической скорости ионов; в работах [9, 10, 11] рассмотрены вопросы получения любого кулоновского приближения и сделана попытка учета короткодействующего потенциала упрощенного типа.

В последние годы появился ряд работ, в которых: [12] найдено выражение свободной энергии для случая заряженных идеально-твердых шариков; [13, 14] рассмотрено разложение по степеням потенциала выражения, определяющего парную корреляционную функцию, и в результате получена поправка к свободной энергии с точностью до членов, квадратичных относительно плотности; [15] выведены уравнения для поправок на короткодействие к эффективным энергиям взаимодействия заряженных частиц; [16] предложен новый способ обрыва цепочки уравнений Боголюбова путем аддитивной замены переменных. Полученное линейное уравнение решено для случая системы твердых шариков.

Целью настоящей работы является создание общего метода асимптотических разложений в статистической механике классических систем, допускающего одновременный учет как кулоновских, так и короткодействующих сил.

Рассматривается система N частиц $m \geqslant 2$ сортов, заключенных в макроскопическом объеме V и взаимодействующих между собой посредством бинарного потенциала

$$\mathfrak{U}_N = \sum \mathfrak{U}_{ab}(|q_{ai} - q_{bj}|) = \sum \{\Phi_{ab}(|q_{ai} - q_{bj}|) + \Psi_{ab}(|q_{ai} - q_{bj}|)\} \quad (1)$$

(суммирование ведется по всем различным парам частиц). Число частиц сорта a обозначено N_a, $\sum\limits_{1\leqslant a\leqslant m} N_a = N$, заряд частицы ez_a, где e — заряд электрона, z_a — валентность иона, система в целом электрически нейтральна, так что

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant m} N_a z_a = 0$$

$\bar{q}_{ai}\,\{q^{\sigma}_{ai}\}$, $\sigma = 1, 2, 3$—декартова координата i-й частицы a-го сорта.

Первое слагаемое в (1) есть потенциал кулоновского типа

$$\Phi_{ab} = \frac{e^2 z_a z_b}{B\theta\,|q_{ai} - q_{bj}|}\cdot\exp\{-\alpha\,|q_{ai} - q_{bj}|\}, \tag{2}$$

сглаженный присутствием экспоненциального множителя, отличающегося от дебаевского фактора затухания тем, что в показателе экспоненты вместо величины

$$\chi = \sqrt{\frac{4\pi e^2 \Sigma N_{b'} z^2_{b'}}{B\theta V}}$$

обратной дебаевскому радиусу, стоит множитель $\alpha > 0$ (потенциал такого типа рассмотрел Майер [17]). Наличие этого экспоненциального множителя гарантирует сходимость рассматриваемых ниже интегралов. В конечные результаты α не входит, исчезая после предельного перехода при $\alpha \to 0$.

Второе слагаемое есть потенциал короткодействующих сил. В настоящей работе для простоты изложения мы будем рассматривать случай упругих шаров. Положим:

$$\psi_{ab}(|q_{ai} - q_{bj}|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |q_{ai} - q_{bj}| > d_0, \\ \infty & \text{при } |q_{ai} - q_{bj}| < d_0, \end{cases} \tag{3}$$

где d_0 — максимальный диаметр соударения частиц.

Для потенциала такого вида Гиббсова функция распределения

$$D_N(q_1 \ldots q_N) = Q_N^{-1}\exp\{-\mathfrak{U}_N/\theta\} \tag{4}$$

(Q_N — конфигурационный интеграл) может быть преобразована следующим образом. В показателе экоспоненты слагаемые первого типа можно представить в виде произведения

$$\lambda = \frac{4\pi e^2}{B\theta} \text{ на } \mathit{\Phi}_{ab} = \frac{z_a z_b}{4\pi\,|q_{ai} - q_{bj}|}\cdot\exp\{-\alpha\,|q_{ai} - q_{bj}|\}, \tag{5}$$

так что

$$\Phi_{ab}/\theta = \lambda\mathit{\Phi}_{ab},$$

где λ в условиях приложимости теории Дебая может считаться малым параметром.

Введем обозначения

$$P_{ab} = \exp\{-\lambda\mathit{\Phi}_{ab}\} - 1; \qquad \varepsilon f_{ab} = \exp\{-\psi_{ab}/\theta\} - 1, \tag{6}$$

где ε — формальный параметр, тогда Гиббсова функция будет выглядеть так

$$D_N = Q_N^{-1}\prod_{a\neq b}(1 + P_{ab})(1 + \varepsilon f_{ab}). \tag{7}$$

Следуя Боголюбову [3], введем в рассмотрение множество функций распределения, связанных с D_N зависимостью

$$F_{a_1\ldots a_s}(q_1\ldots q_s) = V^s\int\ldots\int D_N dq_{s+1}\ldots dq_N \tag{8}$$

и, пользуясь методом вариационного дифференцирования производящего функционала

$$L_N(u_1\ldots u_m) = \int\ldots\int D_N \prod_{\substack{1\leqslant b'\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant N_{b'}}}\left(1+\frac{V}{N_{b'}}\cdot u_{b'}(q_j)\right)dq_1\ldots dq_N, \tag{9}$$

определенного на классе произвольных регулярных функций $u_1\ldots u_m$, заданных на всем бесконечном трехмерном пространстве и достаточно быстро стремящихся к нулю с возрастанием $|q|$, выведем уравнения для функций распределения $F_{a_1a_2}$, $F_{a_1a_2a_3}$, $F_{a_1a_2a_3a_4}$, которые после замены переменных

$$F_{a_1a_2} = g_{a_1a_2}(1+\varepsilon f_{a_1a_2}),$$

$$F_{a_1a_2a_3} = g_{a_1a_2a_3}(1+\varepsilon f_{a_1a_2})(1+\varepsilon f_{a_1a_3})(1+\varepsilon f_{a_2a_3}), \tag{10}$$

$$F_{a_1a_2a_3a_4} = g_{a_1a_2a_3a_4}(1+\varepsilon f_{a_1a_2})(1+\varepsilon f_{a_1a_3})(1+\varepsilon f_{a_1a_4})(1+\varepsilon f_{a_2a_3})(1+\varepsilon f_{a_2a_4})(1+\varepsilon f_{a_3a_4})$$

будут иметь следующий вид.

Уравнение для бинарной функции

$$g_{a_1a_2}\Bigg\{1+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\,dq' +$$

$$+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})][P_{a_1b''}+$$

$$+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})](1+\varepsilon f_{b'b''})\,g_{b'b''}dq'dq''+$$

$$+\frac{1}{6v^3}\iiint\sum_{b'b''b'''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\cdot\frac{N_{b'''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})][P_{a_1b''}+$$

$$+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})][P_{a_1b'''}+\varepsilon f_{a_1b'''}(1+P_{a_1b'''})]\cdot(1+\varepsilon f_{b'b''})(1+\varepsilon f_{b'b'''})\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b''b'''})\,g_{b'b''b'''}dq'dq''dq'''\Bigg\} = (1+P_{a_1a_2})\Bigg\{1+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+$$

$$+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})](1+\varepsilon f_{b'a_2})\,g_{b'a_2}dq'+$$

$$+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})][P_{a_1b''}+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})]\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'b''})(1+\varepsilon f_{b'a_2})(1+\varepsilon f_{b''a_2})\,g_{b'b''a_2}dq'dq''+$$

$$+\frac{1}{6v^3}\iiint\sum_{b'b''b'''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\cdot\frac{N_{b'''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\times$$

$$\times[P_{a_1b''}+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})][P_{a_1b'''}+\varepsilon f_{a_1b'''}(1+P_{a_1b'''})](1+\varepsilon f_{b'b''})(1+\varepsilon f_{b'b'''})\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b''b'''})(1+\varepsilon f_{b'a_2})(1+\varepsilon f_{b''a_2})(1+\varepsilon f_{b'''a_2})\,g_{b'b''b'''a_2}dq'dq''dq'''\Bigg\}, \tag{11}$$

для тернарной

$$g_{a_1a_2a_3}\Big\{1+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\,dq'+$$

$$+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})][P_{a_1b''}+$$

$$+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})]\,g_{b'b''}dq'dq''\Big\}=(1+P_{a_1a_2})(1+P_{a_1a_3})\times$$

$$\times\Big\{g_{a_2a_3}+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})](1+\varepsilon f_{b'a_2})\times \tag{12}$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'a_3})\,g_{b'a_2a_3}dq'+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\times$$

$$\times[P_{a_1b''}+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})](1+\varepsilon f_{b'b''})(1+\varepsilon f_{b'a_2})(1+\varepsilon f_{b''a_2})\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'a_3})(1+\varepsilon f_{b''a_3})\,g_{b'b''a_2a_3}dq'dq''\Big\}$$

и для четверной

$$g_{a_1a_2a_3a_4}\Big\{1+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\,dq'+$$

$$+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})][P_{a_1b''}+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})]\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'b''})\,g_{b'b''}dq'dq''\Big\}=(1+P_{a_1a_2})(1+P_{a_1a_3})(1+P_{a_1a_4})\times$$

$$\times\Big\{g_{a_2a_3a_4}+\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})](1+\varepsilon f_{b'a_2})(1+\varepsilon f_{b'a_3})\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'a_4})\,g_{b'a_2a_3a_4}\,dq'+\frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}+\varepsilon f_{a_1b'}(1+P_{a_1b'})]\times$$

$$\times[P_{a_1b''}+\varepsilon f_{a_1b''}(1+P_{a_1b''})]\,(1+\varepsilon f_{b'b''})(1+\varepsilon f_{b'a_2})(1+\varepsilon f_{b'a_3})\times$$

$$\times(1+\varepsilon f_{b'a_4})(1+\varepsilon f_{b''a_2})(1+\varepsilon f_{b''a_3})(1+\varepsilon f_{b''a_4})\,g_{b'b''a_2a_3a_4}dq'dq''\Big\}. \tag{13}$$

Прежде, чем приступить к решению этих уравнений, обратим внимание на то, что с кулоновским полем связаны два параметра размерности длины: e^2/θ, являющийся приближенным расстоянием, на котором абсолютное значение кулоновского потенциала становится равным тепловой энергии и $1/\chi$ — расстояние, на котором эффективный потенциал выключается из-за дебаевского экранирования.

При достаточно низких концентрациях первый должен быть намного меньше, чем среднее расстояние между ионами, а второй — намного больше.

С введением потенциала короткодействующих сил появляется еще одна характерная длина—диаметр соударения d_0. При небольших концентрациях отношение d_0^3/v, где $v=V/N$, должно быть величиной малой.

В этих условиях величину λ, связанную с первым параметром и еще уменьшенную за счет введения диэлектрической постоянной раствора B, плотность $1/v$ и $\chi_0^2 = \frac{\lambda}{v} = \frac{4\pi e^2 N}{B\theta V}$ можно считать малыми параметрами.

Будем теперь решать уравнения (11), (12), (13) путем последовательных разложений по степеням трех параметров: рассмотренных выше $1/v$ и λ, а также формального параметра ε, указывающего на степень входящего короткодействия. Параметр ε после окончания вычислений можно опустить. Величина χ_0^2 будет введена позднее в качестве вспомогательного параметра суммирования.

Представим искомую функцию распределения в виде ряда по степеням указанных трех параметров ε, $1/v$, λ:

$$g_{a_1a_2} = \sum_p \varepsilon^p g^{(p)}_{a_1a_2} = \sum_p \varepsilon^p \sum_l \left(\frac{1}{v}\right)^l g^{(p,l)}_{a_1a_2} = \sum_p \varepsilon^p \sum_l \left(\frac{1}{v}\right)^l \sum_m \lambda^m g^{(p,l,m)}_{a_1a_2}. \tag{14}$$

Положив $\lambda = 0$, исключаем действие кулоновских сил, так как в этом случае $\Phi_{ab} = \lambda\Phi_{ab} = 0$ и $P_{ab} = 0$.

Из (11) получим уравнение

$$g_{a_1a_2}\Big\{1 + \frac{1}{v}\int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N}\varepsilon f_{a_1b'}dq' + \frac{1}{2v^2}\iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \times$$

$$\times \frac{N_{b''}}{N}\varepsilon^2 f_{a_1b'}f_{a_1b''}(1 + \varepsilon f_{b'b''})\, g_{b'b''}dq'dq'' = 1 +$$

$$+ \frac{1}{v}\int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N}\varepsilon f_{a_1b'}(1 + \varepsilon f_{b'a_2})\, g_{b'a_2}dq' + \frac{1}{2v^2}\iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b''}}{N} \times$$

$$\times \frac{N_{b''}}{N}\varepsilon^2 f_{a_1b'}f_{a_1b''}(1 + \varepsilon f_{b'a_2})(1 + \varepsilon f_{b'b''})(1 + \varepsilon f_{b''a_2})\, g_{b'b''a_2}dq'dq''$$

для чистого короткодействия. Разлагая в нем $g_{a_1a_2}$ по степеням ε, получим решение, которое после перехода к функциям $F_{a_1a_2}$ совпадает с известным результатом теории реальных газов Урселла — Майера:

$$F_{a_1a_2} = (1 + f_{a_1a_2})\Big\{1 + \frac{1}{v}\int \sum_{b'} \frac{Nb'}{N} f_{a_1b'}f_{b'a_2}dq' +$$

$$+ \frac{1}{v}\iint \sum_{b'b''} \frac{Nb'}{N}\cdot\frac{Nb''}{N}\Big[f_{a_1b'}f_{b'b''}f_{b''a_2} + f_{a_1b'}f_{b'a_2}f_{b'b''}f_{b''a_2} +$$

$$+ f_{a_1b'}f_{b'b''}f_{a_1b''}f_{b''a_2} + \frac{1}{2}f_{a_1b'}f_{b'a_2}f_{a_1b''}f_{b''a_2}(1 + f_{b'b''})\Big]dq'dq''\Big\}. \tag{15}$$

Если теперь подставить в уравнение (11) разложение функции $g_{a_1a_2}$ по степеням ε и собрать в нем члены, пропорциональные нулевой степени параметра ε, то получим уравнение для систем с чисто кулоновским взаимодействием:

$$g^{(0)}_{a_1a_2}\Big\{1 + \frac{1}{v}\int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N}P_{a_1b'}dq' + \frac{1}{2v^2}\iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \times$$

$$\times \frac{N_{b''}}{N}P_{a_1b'}P_{a_1b''}g^{(0)}_{b'b''}dq'dq'' + \frac{1}{6v^3}\iiint \sum_{b'b''b'''} \frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N} \times$$

$$\times \frac{N_{b'''}}{N} P_{a_1 b'} P_{a_1 b''} P_{a_1 b'''} g^{(0)}_{b' b'' b'''} dq' dq'' dq''' \Big\} =$$

$$= (1 + P_{a_1 a_2}) \Big\{ 1 + \frac{1}{v} \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} P_{a_1 b'} g^{(0)}_{b' a_2} dq' + \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{2v^2} \iint \sum_{b' b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} P_{a_1 b'} P_{a_1 b''} g^{(0)}_{b' b'' a_2} dq' \, dq'' +$$

$$+ \frac{1}{6v^3} \iiint \sum_{b' b'' b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} P_{a_1 b'} P_{a_1 b''} P_{a_1 b'''} g^{(0)}_{b' b'' b''' a_2} dq' dq'' dq'''.$$

Аналогичным образом получаем соответствующие уравнения для тернарной и четверной функций нулевого приближения по ε. Проведя затем разложение по степеням плотности, найдем:

$$g^{(0,0)}_{a_1 a_2} = 1 + P_{a_1 a_2}, \quad g^{(0,0)}_{a_1 a_2 a_3} = (1 + P_{a_1 a_2})(1 + P_{a_1 a_3})(1 + P_{a_2 a_3}), \tag{17}$$
$$g^{(0,0)}_{a_1 a_2 a_3 a_4} = (1 + P_{a_1 a_2})(1 + P_{a_1 a_3})(1 + P_{a_1 a_4})(1 + P_{a_2 a_3})(1 + P_{a_2 a_4})(1 + P_{a_3 a_4}),$$

$$g^{(0,1)}_{a_1 a_2} = (1 + P_{a_1 a_2}) \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} P_{a_1 b'} P_{b' a_2} dq',$$

$$g^{(0,1)}_{a_1 a_2 a_3} = (1 + P_{a_1 a_2})(1 + P_{a_1 a_3})(1 + P_{a_2 a_3}) \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (P_{a_1 b'} P_{b' a_2} +$$
$$+ P_{a_1 b'} P_{b' a_3} + P_{a_2 b'} P_{b' a_3} + P_{a_1 b'} P_{b' a_2} P_{b' a_3}) \, dq', \tag{18}$$

$$g^{(0,2)}_{a_1 a_2} = (1 + P_{a_1 a_2}) \int\int \sum_{b' b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \Big[P_{a_1 b'} P_{b' b''} P_{b'' a_2} + P_{a_1 b'} P_{b' a_2} P_{b' b''} P_{b'' a_2} +$$
$$+ P_{a_1 b''} P_{b'' b'} P_{a_1 b'} P_{b' a_2} + \frac{1}{2} P_{a_1 b'} P_{b' a_2} P_{a_1 b''} P_{b'' a_2} (1 + P_{b' b''}) \Big] dq' dq'', \tag{19}$$

$$g^{(0,3)}_{a_1 a_2} = (1 + P_{a_1 a_2}) \iiint \sum_{b' b'' b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} \Big[P_{a_1 b'} P_{b' b''} P_{b'' b'''} P_{b''' a_2} +$$
$$+ P_{a_1 b'} P_{b' a_2} P_{b' b''} P_{b'' b'''} P_{b''' a_2} + P_{a_1 b'} P_{b' b''} P_{b'' a_2} P_{b'' b'''} P_{b''' a_2} +$$
$$+ P_{a_1 b'} P_{b' b'''} P_{b''' b''} P_{b' b''} P_{b'' a_2} + P_{a_1 b'} P_{b' a_2} P_{a_1 b''} P_{b'' b'''} P_{b''' a_2} + \tag{20}$$
$$+ P_{a_1 b'} P_{a_1 b''} P_{b'' b'''} P_{b''' b'} P_{b' a_2} + P_{a_1 b''} P_{a_1 b'} P_{b' b''} P_{b' b'''} P_{b''' a_2} +$$
$$+ \frac{1}{2} (P_{a_1 b'} P_{b' b''} P_{b'' a_2} P_{b' b'''} P_{b''' a_2} + P_{a_1 b'} P_{a_1 b''} P_{b' b'''} P_{b''' b''} P_{b''' a_2}) \Big] dq' dq'' dq'''.$$

Разложив в выражениях (17) — (20) по степеням параметра λ функции $g^{(0,l)}_{a_1 a_2}$ и величины $P_{a_1 a_2}$, получим следующие результаты:

$$g^{(0,0,m)}_{a_1 a_2} = I^{0,m}_{a_1 a_2}, \quad \text{где} \quad I^{0,m}_{a_1 a_2} = \frac{(-1)^m}{m!} \cdot \Phi^m_{a_1 a_2}; \tag{21}$$

$$g^{(0,1,0)}_{a_1 a_2} = 0, \quad g^{(0,1,1)}_{a_1 a_2} = 0, \quad g^{(0,1,m)}_{a_1 a_2} = \sum_{2 \leqslant i \leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1 a_2} I^{1,i}_{a_1 a_2}, \tag{22}$$

где

$$I^{1,m}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \sum_{1\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1b'} I^{0,i}_{b'a_2} dq';$$

$$g^{(0,2,0)}_{a_1a_2} = 0, \quad g^{(0,2,1)}_{a_1a_2} = 0, \quad g^{(0,2,2)}_{a_1a_2} = 0,$$

$$g^{(0,2,m)}_{a_1a_2} = \sum_{3\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1a_2} I^{2,i}_{a_1a_2},$$

причем

$$I^{2,3}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} I^{0,1}_{a_1b'} I^{1,2}_{b'a_2} dq',$$

$$I^{2,4}_{a_1a_2} = \frac{1}{2} [I^{1,2}_{a_1a_2}]^2 + \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} [(I^{1,2}_{a_1b'} + I^{1,2}_{b'a_2}) I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} +$$

$$+ I^{0,2}_{a_1b'} I^{1,2}_{b'a_2} + I^{1,2}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'a_2}] \, dq' + \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} dq' dq'',$$

$$I^{2,5}_{a_1a_2} = I^{1,2}_{a_1a_2} I^{1,3}_{a_1a_2} + \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} [I^{1,2}_{a_1b'} (I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'a_2} + I^{0,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} + I^{0,3}_{b'a_2}) +$$

$$+ (I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'a_2} + I^{0,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} + I^{0,3}_{a_1b'}) I^{1,2}_{b'a_2}] \, dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} (I^{0,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} I^{0,1}_{a_1b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,1}_{a_1b''} I^{0,1}_{b''b'} I^{0,2}_{b'a_2} I^{0,1}_{b''a_2} +$$

$$+ I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'b''} I^{0,1}_{a_1b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,1}_{a_1b''} I^{0,2}_{b''b'} I^{0,1}_{b'a_2} I^{0,1}_{b''a_2} +$$

$$+ I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,3}_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,2}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'b''} I^{0,2}_{b''a_2} +$$

$$+ I^{0,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} I^{0,2}_{b''a_2} + \frac{1}{2} I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} I^{0,1}_{b'a_2} I^{0,1}_{a_1b''} I^{0,1}_{b''a_2}) \, dq' dq'', \tag{23}$$

$$g^{(0,3,0)}_{a_1a_2} = g^{(0,3,1)}_{a_1a_2} = g^{(0,3,2)}_{a_1a_2},$$

$$g^{(0,3,m)}_{a_1a_2} = \sum_{4\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1a_2} I^{3,i}_{a_1a_2},$$

где

$$I^{3,4}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} I^{0,1}_{a_1b'} I^{2,3}_{b'a_2} dq',$$

$$I^{3,5}_{a_1a_2} = I^{1,2}_{a_1a_2} I^{2,3}_{a_1a_2} + \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \Big\{ I^{0,2}_{a_1b'} I^{2,3}_{b'a_2} + I^{2,3}_{a_1b'} I^{0,2}_{b'a_2} +$$

$$+ (I^{2,3}_{a_1b'} + I^{2,3}_{b'a_2}) I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} + \frac{1}{2} \langle I^{0,1}_{a_1b'} [I^{1,2}_{b'a_2}]^2 + [I^{1,2}_{a_1b'}]^2 I^{0,1}_{b'a_2} \rangle \Big\} \, dq' + \tag{24}$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \{ I^{0,2}_{b'b''} (I^{0,1}_{a_1b'} I^{1,2}_{b''a_2} + I^{1,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b''a_2}) +$$

$$+ I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} (I^{1,2}_{a_1b''} + I^{1,2}_{b''a_2}) + I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} I^{1,2}_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} \} \, dq' dq''.$$

Пользуясь полученными результатами, можем написать подробное выражение для функции распределения

$$g^{(0)}_{a_1a_2} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v}\right)^l g^{(0,l)}_{a_1a_2} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v}\right)^l \sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m g^{(0,l,m)}_{a_1a_2}.$$

Имея ввиду, что все члены разложения, у которых третий индекс не превышает второго, аннулируются, и вынося за скобки наименьшую из оставшихся степеней λ, получим:

$$\begin{aligned} g^{(0)}_{a_1a_2} = 1 &+ \lambda g^{(0,0,1)}_{a_1a_2} + \lambda^2 g^{(0,0,2)}_{a_1a_2} + \lambda^3 g^{(0,0,3)}_{a_1a_2} + \lambda^4 g^{(0,0,4)}_{a_1a_2} + \lambda^5 g^{(0,0,5)}_{a_1a_2} + \ldots \\ &\ldots + \frac{\lambda}{v}\left(\lambda g^{(0,1,2)}_{a_1a_2} + \lambda^2 g^{(0,1,3)}_{a_1a_2} + \lambda^3 g^{(0,1,4)}_{a_1a_2} + \lambda^4 g^{(0,1,5)}_{a_1a_2} + \ldots\right) + \\ &+ \left(\frac{\lambda}{v}\right)^2\left(\lambda g^{(0,2,3)}_{a_1a_2} + \lambda^2 g^{(0,2,4)}_{a_1a_2} + \lambda^3 g^{(0,2,5)}_{a_1a_2} + \ldots\right) + \\ &+ \left(\frac{\lambda}{v}\right)^3\left(\lambda g^{(0,3,4)}_{a_1a_2} + \lambda^2 g^{(0,3,5)}_{a_1a_2} + \ldots\right) + \ldots \end{aligned} \tag{25}$$

Вводя вспомогательный параметр суммирования χ_0^2 в (25) получим

$$g^{(0)}_{a_1a_2} = 1 + \lambda G^{0,1}_{a_1a_2} + \lambda^2 G^{0,2}_{a_1a_2}, \tag{26}$$

где

$$G^{0,m}_{a_1a_2} = g^{(0,0,m)}_{a_1a_2} + \chi_0^2 g^{(0,1,m+1)}_{a_1a_2} + (\chi_0^2)^2 g^{(0,2,m+2)}_{a_1a_2} + \ldots \tag{27}$$

В других обозначениях

$$\begin{aligned} G^{0,m}_{a_1a_2} = I^{0,m}_{a_1a_2} &+ \chi_0^2\left(I^{0,m-1}_{a_1a_2} I^{1,2}_{a_1a_2} + I^{0,m-2}_{a_1a_2} I^{1,3}_{a_1a_2} + \ldots + I^{1,m+1}_{a_1a_2}\right) + \\ &+ (\chi_0^2)^2\left(I^{0,m-1}_{a_1a_2} I^{2,3}_{a_1a_2} + I^{0,m-2}_{a_1a_2} I^{2,4}_{a_1a_2} + \ldots + I^{2,m+2}_{a_1a_2}\right) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (\chi_0^2)^n\left(I^{0,m-1}_{a_1a_2} I^{n,n+1}_{a_1a_2} + I^{0,m-2}_{a_1a_2} I^{n,n+2}_{a_1a_2} + \ldots + I^{n,m+n}_{a_1a_2}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Как видим, искомые функции G представлены в виде разложений по степеням вспомогательного параметра. Перейдем к их суммированию. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} Ku_{a_1a_2} &= \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} I^{0,1}_{a_1b'} u_{b'a_2} dq', \\ \overline{K}u_{a_1a_2} &= \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} u_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} dq'. \end{aligned} \tag{28}$$

Записывая их с помощью выражения (27), видим, что они являются ни чем иным, как итерациями интегральных уравнений для определения функции G. Так, для $G^{0,1}$ и $G^{0,2}$ имеем

$$(E - \chi_0^2 K)\, G^{0,1}_{a_1a_2} = I^{0,1}_{a_1a_2}, \tag{29}$$

$$(E - \chi_0^2 K)(E + \chi_0^2 \overline{K})\, G^{0,2}_{a_1a_2} = \frac{1}{2}\left[G^{0,1}_{a_1a_2}\right]^2, \tag{30}$$

где E — единичный оператор.

Первое из них решаем с помощью Фурье-представлений и получаем, перейдя в решении к пределу при $\alpha \to 0$:

$$G^{0,1}_{a_1a_2} = -\frac{z_{a_1}z_{a_2}}{4\pi|q_1-q_2|}\cdot\exp\{-\chi|q_1-q_2|\}, \text{ где } \chi^2 = \chi_0^2\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}z^2_{b'}, \quad (31)$$

что совпадает с результатом Дебая.

Решение второго из уравнений (30) есть

$$G^{0,2}_{a_1a_2} = \frac{1}{2}\Big\{[G^{0,1}_{a_1a_2}]^2 + \chi_0^2\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}\left(G^{0,1}_{a_1b'}[G^{0,1}_{b'a_2}]^2 + [G^{0,1}_{a_1b'}]^2G^{0,1}_{b'a_2}\right)dq' +$$

$$+(\chi_0^2)^2\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}G^{0,1}_{a_1b'}[G^{0,1}_{b'b''}]^2G^{0,1}_{b''a_2}dq'dq''\Big\}, \quad (32)$$

что совпадает с результатом работы [4].

Займемся теперь определением вклада в функцию распределения, обусловленного наличием как кулоновского, так и короткодействующего потенциала. С этой целью возвратимся к основному уравнению (11) и соберем в нем члены первого порядка относительно параметра ε. Получим уравнение для определения функции $g^{(1)}_{a_1a_2}$

$$g^{(1)}_{a_1a_2}\Big\{1 + \frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}P_{a_1b'}dq' + \frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\times$$

$$\times\frac{N_{b''}}{N}P_{a_1b'}P_{a_1b''}g^{(0)}_{b'b''}dq'dq'' + \frac{1}{6v^3}\iiint\sum_{b'b''b'''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\times$$

$$\times\frac{N_{b'''}}{N}P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{a_1b'''}g^{(0)}_{b'b''b'''}dq'dq''dq'''\Big\} + g^{(0)}_{a_1a_2}\Big\{\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}(1+P_{a_1b'})\times$$

$$\times f_{a_1b'}dq' + \frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}[P_{a_1b'}P_{a_1b''}g^{(1)}_{b'b''} +$$

$$+\langle P_{a_1b'}P_{a_1b''}(f_{a_1b'}+f_{b'b''}+f_{a_1b''}) + P_{a_1b'}f_{a_1b''} + P_{a_1b''}f_{a_1b'}\rangle g^{(0)}_{b'b''}]\,dq'dq'' +$$

$$+\frac{1}{6v^3}\iiint\sum_{b'b''b'''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\cdot\frac{N_{b'''}}{N}[P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{a_1b'''}g^{(1)}_{b'b''b'''} +$$

$$+\langle P_{a_1b'}P_{a_1b''}(1+P_{a_1b'''})f_{a_1b'''} + P_{a_1b'}P_{a_1b'''}(1+P_{a_1b''})f_{a_1b''} +$$

$$+P_{a_1b''}P_{a_1b'''}(1+P_{a_1b'})f_{a_1b'} + P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{a_1b'''}(f_{b'b''}+f_{b'b'''}+f_{b''b'''})\rangle g^{(0)}_{b'b''b'''}]\times$$

$$\times dq'dq''dq'''\} = (1+P_{a_1a_2})\Big\{\frac{1}{v}\int\sum_{b'}\frac{N_{b'}}{N}\langle P_{a_1b'}g^{(1)}_{b'a_2} + [(1+P_{a_1b'})f_{a_1b'} +$$

$$+P_{a_1b'}f_{b'a_2}]\,g^{(0)}_{b'a_2}\rangle\,dq' + \frac{1}{2v^2}\iint\sum_{b'b''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\langle P_{a_1b'}P_{a_1b''}g^{(1)}_{b'b''a_2} +$$

$$+[P_{a_1b'}P_{a_1b''}(f_{a_1b'}+f_{a_1b''}+f_{b'b''}+f_{b'a_2}+f_{b''a_2}) + P_{a_1b'}f_{a_1b''} +$$

$$+P_{a_1b''}f_{a_1b'}]g^{(0)}_{b'b''a_2}\rangle\,dq'dq'' + \frac{1}{6v^3}\iiint\sum_{b'b''b'''}\frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\times$$

$$\times \frac{N_{b'''}}{N} \langle P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{a_1b'''}g^{(1)}_{b'b''b'''a_2} + [P_{a_1b'}P_{a_1b''}(1 + P_{a_1b'''}) f_{a_1b'''} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{a_1b'''}(1 + P_{a_1b''}) f_{a_1b''} + P_{a_1b''}P_{a_1b'''}(1 + P_{a_1b'}) f_{a_1b'} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{a_1b'''}(f_{b'b''} + f_{b''b'''} + f_{b'b'''} + f_{b'a_2} +$$

$$+ f_{b''a_2} + f_{b'''a_2})] \, g^{(0)}_{b'b''b'''a_2} \rangle \, dq'dq''dq''' \Big\}. \tag{33}$$

Точно также находим уравнения для первого приближения тернарной и четверной функций, а затем, разлагая их по степеням плотности и решая соответствующие уравнения, получаем следующие результаты:

$$g^{(1,0)}_{a_1a_2} = g^{(1,0)}_{a_1a_2a_3} = g^{(1,0)}_{a_1a_2a_3a_4} = 0, \tag{34}$$

$$g^{(1,1)}_{a_1a_2} = (1 + P_{a_1a_2}) \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} [f_{a_1b'}(1 + P_{a_1b'}) P_{b'a_2} + P_{a_1b'}(1 + P_{b'a_2}) f_{b'a_2}] dq',$$

$$g^{(1,1)}_{a_1a_2a_3} = (1 + P_{a_1a_2})(1 + P_{a_1a_3})(1 + P_{a_2a_3}) \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \{(1 + P_{a_2b'}) f_{a_2b'}P_{b'a_3} +$$

$$+ (1 + P_{a_3b'}) f_{a_3b'}P_{b'a_2} + (1 + P_{a_1b'}) f_{a_1b'}P_{b'a_2} + (1 + P_{a_1b'}) f_{a_1b'}P_{b'a_3} +$$

$$+ (1 + P_{b'a_2}) P_{a_1b'}f_{b'a_2} + (1 + P_{b'a_3}) P_{a_1b'}f_{b'a_3} + (1 + P_{a_1b'}) f_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'a_3} +$$

$$+ (1 + P_{b'a_2}) P_{b'a_3}P_{a_1b'}f_{b'a_2} + (1 + P_{b'a_3}) P_{a_1b'}P_{b'a_2}f_{b'a_3}\} \, dq'. \tag{35}$$

$$g^{(1,2)}_{a_1a_2} = (1 + P_{a_1a_2}) \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} (f_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}f_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}f_{b'b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}f_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''a_2} + f_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'b''}P_{b''a_2} +$$

$$+ f_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{a_1b''}P_{b''a_2} + f_{a_1b'}P_{b'b''}P_{a_1b''}P_{b''a_2} + f_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{b''b'}P_{b'a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'b''}f_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''a_2}f_{b''a_2} + P_{a_1b''}f_{b''a_2}P_{b''b'}P_{b'a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{a_1b''}f_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}P_{a_1b''}f_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'a_2}f_{b'b''}P_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}f_{b'b''}P_{a_1b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}f_{b'b''}P_{b'b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}f_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'b''}P_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{b'b''}f_{a_1b'}P_{b'a_2} + P_{a_1b'} \; {}_{a_1b'}P_{b'b''}P_{a_1b''}P_{b''a_2} + f_{a_1b'}P_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{a_1b''}P_{b''a_2} +$$

$$+ f_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'b''}P_{a_1b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{b'b''}P_{b''a_2}f_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b''}f_{b''a_2}P_{b''a_2}P_{b''b'}P_{b'a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''a_2}P_{a_1b''}f_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b'a_2}P_{a_1b''}f_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'a_2}P_{a_1b''}P_{b''a_2}f_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{b'a_2}f_{b'b''}P_{b'b''}P_{b''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}f_{b'b''}P_{a_1b''}P_{b''a_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} P_{a_1b'}P_{a_1b''}f_{b'b''}P_{b'a_2}P_{b''a_2} + f_{a_1b'}P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{b'b''}P_{b'a_2}P_{b''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{b'b''}P_{b'a_2}P_{b''a_2}f_{b''a_2} + \frac{1}{2} P_{a_1b'}P_{a_1b''}P_{b'b''}f_{b'b''}P_{b'a_2}P_{b''a_2}) \, dq'dq''. \tag{36}$$

Выражение для $g^{(1,3)}_{a_1a_2}$ получается довольно громоздким, поэтому, выписывая его, оставим лишь члены не выше третьего порядка по λ:

$$g^{(1,3)}_{a_1a_2} = (1 + P_{a_1a_2}) \iiint \sum_{b'b''b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} (f_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''b'''}P_{b'''a_2} +$$

$$+ P_{a_1b'}f_{b'b''}P_{b''b'''}P_{b'''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}f_{b''b'''}P_{b'''a_2} + P_{a_1b'}P_{b'b''}P_{b''b'''}f_{b'''a_2})\, dq'dq''dq'''. \quad (37)$$

Далее, в выражениях (34), (35), (36), (37) разлагаем по степеням λ входящие в них функции распределения и величины P_{ab}, имеем

$$g^{(1,0,m)}_{a_1a_2} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (38)$$

$$g^{(1,1,0)}_{a_1a_2} = 0, \quad g^{(1,1,m)}_{a_1a_2} = \sum_{1\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-1}_{a_1a_2} H^{1,i}_{a_1a_2}, \quad (39)$$

где

$$H^{1,m}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \Bigg[\sum_{1\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1b'} I^{0,i}_{b'a_2} (f_{a_1b'} + f_{b'a_2}) + I^{0,m}_{a_1b'} f_{b'a_2} +$$

$$+ f_{a_1b'} I^{0,m}_{b'a_2} \Bigg] dq'. \quad (40)$$

Аналогично

$$g^{(1,2,0)}_{a_1a_2} = 0, \quad g^{(1,2,1)}_{a_1a_2} = 0, \quad g^{(1,2,m)}_{a_1a_2} = \sum_{2\leqslant i\leqslant m} I^{0,m-i}_{a_1a_2} H^{2,i}_{a_1a_2}, \quad (41)$$

причем

$$H^{2,2}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (I^{1,2}_{a_1b'} f_{b'a_2} + f_{a_1b'} I^{1,2}_{b'a_2})\, dq' + \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} I^{0,1}_{a_1b'} f_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2}\, dq'dq'', \quad (42)$$

$$H^{2,3}_{a_1a_2} = I^{1,2}_{a_1a_2} H^{1,1}_{a_1a_2} + \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \{ (I^{0,1}_{a_1b'} I^{1,2}_{b'a_2} + I^{1,2}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2}) (f_{a_1b'} + f_{b'a_2}) +$$

$$+ (I^{0,1}_{a_1b'} I^{1,2}_{a_1b'} + I^{1,3}_{a_1b'}) f_{b'a_2} + f_{a_1b'} (I^{0,1}_{b'a_2} I^{1,2}_{b'a_2} + I^{1,3}_{b'a_2}) + I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'a_2} (H^{1,1}_{a_1b'} + H^{1,1}_{b'a_2}) \}\, dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} (I^{0,2}_{a_1b'} f_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,1}_{a_1b'} I^{0,1}_{b'b''} f_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2} + I^{0,1}_{a_1b'} f_{b'b''} I^{0,2}_{b''a_2})\, dq'dq'', \quad (43)$$

точно так же

$$g^{(1,3,0)}_{a_1a_2} = g^{(1,3,1)}_{a_1a_2} = g^{(1,3,2)}_{a_1a_2} = 0, \qquad g^{(1,3,3)}_{a_1a_2} = H^{3,3}_{a_1a_2}, \quad (44)$$

где

$$H^{3,3}_{a_1a_2} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (I^{2,3}_{a_1b'} f_{b'a_2} + f_{a_1b'} I^{2,3}_{b'a_2})\, dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \frac{N_{b''}}{N} (I^{0,1}_{a_1b'} f_{b'b''} I^{1,2}_{b''a_2} + I^{1,2}_{a_1b'} f_{b'b''} I^{0,1}_{b''a_2})\, dq'dq''. \quad (45)$$

Пользуясь полученными результатами, напишем подробное выражение для функции распределения

$$g^{(1)}_{a_1a_2} = \sum_{l} \left(\frac{1}{v}\right)^{l} g^{(1,l)}_{a_1a_2} = \sum_{l} \left(\frac{1}{v}\right)^{l} \sum_{m} \lambda^m g^{(1,l,m)}_{a_1a_2}. \quad (46)$$

Имея ввиду, что все члены разложения, у которых третий индекс меньше второго, аннулируются, введем вспомогательный параметр χ_0^2. Получим

$$g^{(1)}_{a_1a_2} = \frac{1}{v}\left(\lambda G^{1,1}_{a_1a_2} + \lambda^2 G^{1,2}_{a_1a_2} + \ldots\right), \tag{47}$$

где

$$G^{1,m}_{a_1a_2} = \sum_n (\chi_0^2)^n\, g^{(1,n+1,m+n)}_{a_1a_2} \tag{48}$$

или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} G^{1,m}_{a_1a_2} &= I^{0,m-1}_{a_1a_2} H^{1,1}_{a_1a_2} + I^{0,m-2}_{a_1a_2} H^{1,2}_{a_1a_2} + \ldots + H^{1,m}_{a_1a_2} + \\ &+ \chi_0^2 \left(I^{0,m-1}_{a_1a_2} H^{2,2}_{a_1a_2} + I^{0,m-2}_{a_1a_2} H^{2,3}_{a_1a_2} + \ldots + H^{2,m+1}_{a_1a_2}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{49}$$

В частности для $G^{1,1}_{a_1a_2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\chi_0^2)^{n-1} H^{n,n}_{a_1a_2}$ после суммирования:

$$\begin{aligned} G^{1,1}_{a_1a_2} &= \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N}\left(G^{0,1}_{a_1b'} f_{b'a_2} + f_{a_1b'} G_{b'a_2}\right) dq' + \\ &+ \chi_0^2 \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N}\, G^{0,1}_{a_1b'} f_{b'b''} G^{0,1}_{b''a_2}\, dq'\, dq''. \end{aligned} \tag{50}$$

Переходим к подсчету вклада, даваемого членами второго порядка относительно короткодействия.

Уравнение для функции $g^{(2)}_{a_1a_2}$ не выписываем ввиду его громоздкости, решаем его таким же способом, как решали уравнение для $g^{(1)}_{a_1a_2}$ и получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} g^{(2,0)}_{a_1a_2} &= 0, \\ g^{(2,1)}_{a_1a_2} &= (1 + P_{a_1a_2}) \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (1 + P_{a_1b'})(1 + P_{b'a_2}) f_{a_1b'} f_{b'a_2}\, dq'. \end{aligned} \tag{51}$$

В следующем выражении оставляем члены не выше второго порядка по λ:

$$\begin{aligned} g^{(2,2)}_{a_1a_2} &= (1 + P_{a_1a_2}) \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N}\cdot\frac{N_{b''}}{N} \Big\{ P_{a_1b'} f_{b'b''} f_{b''a_2} + f_{a_1b'} f_{b'b''} P_{b''a_2} + \\ &+ f_{a_1b'} P_{b'b''} f_{b''a_2} + P_{a_1b'} P_{a_1b''} \left(\frac{1}{2} f_{b'a_2} f_{b''a_2} + f_{b'b''} f_{b''a_2}\right) + f_{a_1b'} P_{b'b''} P_{a_1b''} f_{b''a_2} + \\ &+ f_{a_1b'} P_{b'a_2} P_{b'b''} f_{b''a_2} + P_{b'a^2} P_{b''a_2} \left(\frac{1}{2} f_{a_1b'} f_{a_1b''} + f_{a_1b'} f_{b'b''}\right) + P_{a_1b'} P_{b'b''} (f_{a_1b''} f_{b''a_2} + \\ &+ f_{a_1b'} f_{b''a_2} + f_{b'a_2} f_{b''a_2} + f_{b'b''} f_{b''a_2}) + P_{b'b''} P_{b''a_2} (f_{a_1b'} f_{a_1b''} + f_{a_1b'} f_{b'a_2} + \\ &+ f_{a_1b'} f_{b''a_2} + f_{a_1b'} f_{b'b''}) + P_{a_1b'} P_{b'a_2} (f_{a_1b''} f_{b''a_2} + f_{b'b''} f_{b''a_2}) + P_{a_1b''} P_{b''a_2} f_{a_1b'} f_{b'b''} + \\ &+ P_{a_1b'} P_{b''a_2} (f_{a_1b''} f_{b'a_2} + f_{b'b''} f_{a_1b''} + f_{b'a_2} f_{b'b''} + f_{a_1b'} f_{b'b''} + f_{b'b''} f_{b''a_2}) + \ldots \Big\}\, dq'\, dq''. \end{aligned} \tag{52}$$

Разлагая по степеням λ величины, входящие в выражения (51), (52), имеем

$$g_{a_1a_2}^{(2,0,m)} = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,1,0)} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} f_{a_1b'} f_{b'a_2} dq',$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,1,m)} = \frac{(-1)^m}{m!} \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (I_{a_1a_2}^{0,1} + I_{a_1b'}^{0,1} + I_{b'a_2}^{0,1})^m f_{a_1b'} f_{b'a_2} dq', \tag{53}$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,2,0)} = 0,$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,2,1)} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (I_{a_1b'}^{0,1} g_{b'a_2}^{(2,1,0)} + g_{a_1b'}^{(2,1,0)} I_{b'a_2}^{0,1})\, dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} f_{a_1b'} I_{b'b''}^{0,1} f_{b''a_2} dq'\, dq'',$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,2,2)} = I_{a_1a_2}^{0,1} g_{a_1a_2}^{(2,2,1)} + I_{a_1a_2}^{1,2} g_{a_1a_2}^{(2,1,0)} + \frac{1}{2} [(K - \overline{K})^2 f_{a_1a_2}] +$$

$$+ \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} \Big\{ (I_{a_1b'}^{1,2} + I_{b'a_2}^{1,2}) f_{a_1b'} f_{b'a_2} + \frac{1}{2} (I_{a_1b'}^{0,1} + I_{b'a_2}^{0,1}) (I_{a_1b'}^{0,1} g_{b'a_2}^{(2,1,0)} + g_{a_1b'}^{(2,1,0)} I_{b'a_2}^{0,1}) +$$

$$+ (I_{a_1b'}^{0,1} f_{b'a_2} + f_{a_1b'} I_{b'a_2}^{0,1}) [(K - \overline{K}) (f_{a_1b'} + f_{b'a_2})] + \tag{54}$$

$$+ [(K - \overline{K}) f_{a_1b'}] f_{b'a_2} I_{b'a_2}^{0,1} + f_{a_1b'} I_{a_1b'}^{0,1} [(K - \overline{K}) f_{b'a_2}] \Big\} dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} (I_{a_1b'}^{0,1} I_{b'b''}^{0,1} f_{b'b''} f_{b''a_2} + f_{a_1b'} I_{b'b''}^{0,2} f_{b''a_2} + f_{a_1b'} f_{b'b''} I_{b'b''}^{0,1} I_{b''a_2}^{0,1})\, dq'\, dq'',$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,3,0)} = g_{a_1a_2}^{(2,3,1)} = 0,$$

$$g_{a_1a_2}^{(2,3,2)} = \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (I_{a_1b'}^{1,2} g_{b'a_2}^{(2,1,0)} + g_{a_1b'}^{(2,1,0)} I_{b'a_2}^{1,2})\, dq' +$$

$$+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} (f_{a_1b'} I_{b'b''}^{1,2} f_{b''a_2} + I_{a_1b'}^{0,1} g_{b'b''}^{(2,1,0)} I_{b''a_2}^{0,1})\, dq'\, dq'' + \tag{55}$$

$$+ \iiint \sum_{b'b''b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} (f_{a_1b'} I_{b'b''}^{0,1} f_{b''b'''} I_{b'''a_2}^{0,1} + I_{a_1b'}^{0,1} f_{b'b''} I_{b''b'''}^{0,1} f_{b'''a_2})\, dq'\, dq''\, dq'''.$$

Пользуясь полученными результатами, запишем подробное выражение для функции распределения

$$g_{a_1a_2}^{(2)} = \sum_l \left(\frac{1}{v}\right)^l g_{a_1a_2}^{(2,l)} = \sum_l \left(\frac{1}{v}\right)^l \sum_m \lambda^m g_{a_1a_2}^{(2,l,m)}.$$

Так как, те члены разложения, для которых индекс $m \leqslant l - 2$, равны нулю, то вводя вспомогательный параметр χ_0^2, получаем:

$$g_{a_1a_2}^{(2)} = \frac{1}{v} (G_{a_1a_2}^{2,0} + \lambda G_{a_1a_2}^{2,1} + \ldots),$$

где

$$G^{2,m}_{a_1a_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (\chi_0^2)^n g^{(2,n+1,m+n)}_{a_1a_2}. \tag{56}$$

После суммирования

$$\begin{aligned} G^{2,0}_{a_1a_2} &= g^{(2,1,0)}_{a_1a_2} + \chi_0^2 \Big\{ \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (G^{0,1}_{a_1b'} g^{(2,1,0)}_{b'a_2} + g^{(2,1,0)}_{a_1b'} G^{0,1}_{b'a_2})\, dq' + \\ &+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} f_{a_1b'} G^{0,1}_{b'b''} f_{b''a_2} dq'\, dq'' \Big\} + \\ &+ (\chi_0^2)^2 \Big\{ \iiint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} G^{0,1}_{a_1b'} g^{(2,1,0)}_{b'b''} G^{0,1}_{b''a_2} dq'\, dq'' + \\ &+ \iiint \sum_{b'b''b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} (f_{a_1b'} G^{0,1}_{b'b''} f_{b''b'''} G^{0,1}_{b'''a_2} + G^{0,1}_{a_1b'} f_{b'b''} G^{0,1}_{b''b'''} f_{b'''a_2})\; dq'\, dq''\, dq''' \Big\}. \end{aligned} \tag{57}$$

Итак, нами получено следующее разложение бинарной функции распределения:

$$g_{a_1a_2} = g^{(0)}_{a_1a_2} + \varepsilon g^{(1)}_{a_1a_2} + \varepsilon^2 g^{(2)}_{a_1a_2},$$

формальный параметр ε можем опустить, тогда

$$g_{a_1a_2} = 1 + \lambda G^{0,1}_{a_1a_2} + \lambda^2 G^{0,2}_{a_1a_2} + \frac{1}{v} (G^{2,0}_{a_1a_2} + \lambda G^{1,1}_{a_1a_2}). \tag{58}$$

Возвратимся теперь к основной функции распределения $F_{a_1a_2}$, связанной с функцией $g_{a_1a_2}$ соотношением (10), и подставим в (58) выражения для функций $G_{a_1a_2}$ из соотношений (31), (32), (50), (57).

Тогда

$$\begin{aligned} F_{a_1a_2} &= (1 + f_{a_1a_2}) \Big\{ 1 + \lambda G^{0,1}_{a_1a_2} + \frac{\lambda^2}{2} \langle [G^{0,1}_{a_1a_2}]^2 + \\ &+ \chi_0^2 \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (G^{0,1}_{a_1b'} [G^{0,1}_{b'a_2}]^2 + [G^{0,1}_{a_1b'}]^2 G^{0,1}_{b'a_2})\, dq' + \\ &+ (\chi_0^2)^2 \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} G^{0,1}_{a_1b'} [G^{0,1}_{b'b''}]^2 G^{0,1}_{b''a_2} dq'\, dq'' \rangle + \\ &+ \frac{1}{v} \Big[g^{(2,1,0)}_{a_1a_2} + \chi_0^2 \langle \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (G^{0,1}_{a_1b'} g^{(2,1,0)}_{b'a_2} + g^{(2,1,0)}_{a_1b'} G^{0,1}_{b'a_2})\, dq' + \\ &+ \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} f_{a_1b'} G^{0,1}_{b'b''} f_{b''a_2} dq'\, dq'' \rangle + \\ &+ (\chi_0^2)^2 \langle \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} G^{0,1}_{a_1b'} g^{(2,1,0)}_{b'b''} G^{0,1}_{b''a_2} dq'\, dq'' + \\ &+ \iiint \sum_{b'b''b'''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} \cdot \frac{N_{b'''}}{N} (f_{a_1b'} G^{0,1}_{b'b''} f_{b''b'''} G^{0,1}_{b'''a_2} + \end{aligned} \tag{59}$$

$$+ G^{0,1}_{a_1 b'} f_{b'b''} G^{0,1}_{b''b'''} f_{b'''a_2}) \, dq' \, dq'' \, dq''' \rangle +$$

$$+ \lambda \langle \int \sum_{b'} \frac{N_{b'}}{N} (G^{0,1}_{a_1 b'} f_{b'a_2} + f_{a_1 b'} G^{0,1}_{b'a_2}) \, dq' +$$

$$+ \chi_0^2 \iint \sum_{b'b''} \frac{N_{b'}}{N} \cdot \frac{N_{b''}}{N} G^{0,1}_{a_1 b'} f_{b'b''} G^{0,1}_{b''a_2} dq' \, dq'' \rangle \Big] \Big\}.$$

В этом разложении учтены члены чисто кулоновские и члены, включающие потенциал короткодействия до второго порядка включительно.

Вопросы математического обоснования рассматриваемого метода оставлены в стороне ввиду их сложности и являются предметом отдельного исследования.

В заключение автор выражает признательность Н. Н. Боголюбову за внимательное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Debye u. E. Hückel, Zur Teorie der Elektrolyte, Phys. Zeits., **24**, 1923.
2. I. Mayer and M. Goeppert Mayer, Statistical Mechanics, New York, 1940.
3. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
4. Е. А. Стрельцова, К вопросу о функциях распределения для систем с кулоновским взаимодействием, ЖЭТФ, т. 26, 2, 1954, 173.
5. Е. А. Стрельцова, Кинетические уравнения в теории электролитов, ДАН СССР, т. 116, 5, 1957, 820.
6. Е. А. Стрельцова, Нестационарные процессы в теории электролитов, УМЖ, т. XI, 1, 1959, 83.
7. Е. А. Стрельцова, Определение электрофоретической скорости иона по методу функции распределения, ДАН СССР, т. 144, 2, 1962, 300.
8. О. О. Стрільцова, До питання про електропровідність розчинів сильних електролітів, ДАН УРСР, 11, 1963, 1468.
9. И. Р. Юхновский, Бинарная функция распределения для систем взаимодействующих заряженных частиц, ЖЭТФ, т. 27, 6 (12), 1954, 690.
10. И. Р. Юхновский, Применение коллективных переменных и учет короткодействующих сил в теории систем заряженных частиц, ЖЭТФ, т. 34, 1958, 379.
11. И. Р. Юхновский, Свободная энергия систем заряженных частиц, ДАН СССР, т. 126, 3, 1959, 557.
12. В. В. Толмачев и Є. В. Тябликов, К классической теории сильных электролитов, ДАН СССР, т. 119, 1958, 314.
13. А. А. Веденов, Новый метод в классической статистической физике, ДАН СССР, т. 125, 4, 1959, 757.
14. А. А. Веденов, Термодинамические свойства вырожденной плазмы, ЖЭТФ, т. 36, 1959, 942.
15. В. И. Цепляев, Уравнения для корреляционных функций равновесной системы кулоновских частиц с короткодействием, ДАН СССР, т. 143, 4, 1962, 829.
16. Г. А. Мартынов, Определение корреляционных функций плотных газов и жидкостей, ЖЭТФ, т. 45, 3 (9), 1963, 656.
17. I. E. Mayer, The theory of ionic solutions, I. Chem. Phys., **18**, 1950.
18. Е. А. Стрельцова, Исследование явления электрофорезиса с точки зрения статистического метода Н. Н. Боголюбова, сборник «Вопросы матем. физ. и теории функций», изд-во «Наукова думка», вып. 2, 1964, 98.

Поступила 30.XII 1965 г.
Киев