Критерии устойчивой выпуклости области при однолистных конформных отображениях. II

Н. И. Черней

1. В этой статье, являющейся продолжением [5], устанавливаются критерии устойчивой выпуклости области в круге $|z| < 1$ относительно преобразований этого круга, осуществляемых функциями некоторых классов однолистных и локально-однолистных в этом круге функций.

В данных исследованиях развиваются идеи работ [1, 3] и, в частности, рассмотрен вопрос, каким условиям должна удовлетворять область B в круге $|z| < 1$, чтобы образ ее при отображении любой функцией $f(z) \in S$ был бы выпуклой областью? Этот вопрос был поставлен в обзорном докладе [6] И. А. Александрова, которому принадлежит и ответ на него для области с достаточно гладкой границей. В настоящей заметке дается ответ на указанный вопрос для области с произвольной границей.

2. Кругом с неевклидовым радиусом ϱ в круге $|z| < 1$ назовем каждый круг, определяемый неравенством вида

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \leqslant \varrho, \tag{1}$$

где $|z_0| < 1$. Ясно, что при таком определении неевклидового радиуса всегда $0 < \varrho \leqslant 1$.

Окружность с центром, расстояние которого от точки $z = 0$ есть ϱ_0, и радиусом h, $0 \leqslant \varrho_0 < 1$, $0 < h \leqslant 1 - \varrho_0$, назовем окружностью семейства G_m, $1 \leqslant m \leqslant 2$, если

$$\varrho_0^2 + m^2 - 1 = (m - h)^2, \tag{2}$$

откуда

$$h = m - \sqrt{\varrho_0^2 + m^2 - 1}.$$

Докажем, что всякая окружность семейства G_m обладает неевклидовым радиусом

$$\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1},$$

а также и обратное утверждение.

Пусть даны z_0 и ϱ, $|z_0| < 1$, $0 < \varrho \leqslant 1$. Уравнение окружности с неевклидовым центром z_0 и неевклидовым радиусом ϱ есть $\left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \varrho$. Если ϱ_0 есть расстояние от точки $z = 0$ до евклидового центра этой окружности, а евклидовый радиус есть h, то нетрудно показать, что

$$\varrho_0 = \frac{(1 - \varrho^2)\,|z_0|}{1 - \varrho^2 |z_0|^2}; \qquad h = \frac{\varrho\,(1 - |z_0|^2)}{1 - \varrho^2 |z_0|^2}.$$

Исключая $|z_0|$, получаем

$$\varrho_0^2 + \frac{1}{4}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)^2 - 1 = \left[\frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) - h\right]^2. \tag{3}$$

Сопоставляя (3) с (2), получаем

$$\frac{1}{2}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) = m, \qquad 1 \leqslant m \leqslant 2,$$

откуда $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$.

Наоборот, если подставить это выражение для ϱ в (3), то получим (2), что и требовалось доказать.

3. Определим теперь класс $\mathfrak{M}^{(m)}$, $1 \leqslant m \leqslant 2$, регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций, ассоциированных с семейством G_m.

Функция класса $\mathfrak{M}^{(m)}$, $1 \leqslant m \leqslant 2$, регулярна однолистна в круге $|z| < 1$ и преобразует каждый круг с неевклидовым радиусом $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$, содержащийся в круге $|z| < 1$, в выпуклую область, но для круга с неевклидовым радиусом, большим, чем $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$, это уже несправедливо, т. е. в $\mathfrak{M}^{(m)}$ найдется хотя бы одна функция, которая отобразит этот круг на невыпуклую область. Класс $\mathfrak{M}^{(1)}$ совпадает с классом $\mathfrak{M}$ регулярных однолистных выпуклых в круге $|z| < 1$ функций, а класс $\mathfrak{M}^{(2)}$ содержит [3] все регулярные однолистные в круге $|z| < 1$ функции.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ группу преобразований вида

$$\xi = e^{i\alpha}\,\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \tag{4}$$

где $|a| < 1$, $\alpha \in [0;\ 2\pi]$ (группа Пуанкаре). Каждое такое преобразование, как известно [7], переводит круг $|z| < 1$ в себя, причем каждый круг с неевклидовым радиусом ϱ превращается в круг такого же неевклидового радиуса.

Пусть теперь $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$. Полагая

$$f\left(e^{-i\alpha}\,\frac{\xi + a_1}{1 + \bar{a}_1\xi}\right) = F(\xi),$$

получаем функцию, регулярную однолистную в круге $|\xi| < 1$ и преобразующую каждый круг с неевклидовым радиусом $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$ в выпуклую область, поскольку z и ξ, связанные преобразованием (4), как мы видели, одновременно пробегают круги с одним и тем же неевклидовым радиусом ϱ, но с разными центрами. В силу сказанного, класс $\mathfrak{M}^{(m)}$ является «линейно-инвариантным» по терминологии Поммеренке [1].

Все круги с неевклидовыми радиусами, не превышающими $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$, являются $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклыми, ибо если неевклидов радиус круга меньше ϱ, то этот круг содержится внутри некоторого круга с неевклидовым радиусом ϱ, а тогда всякая аналитическая функция, преобразующая этот последний круг в выпуклую область, по известному свойству однолистных выпуклых конформных отображений преобразует в выпуклую область и всякий содержащийся в нем круг.

4. Каждая функция $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, кроме свойства преобразовывать в выпуклые области все G_m-круги (будем так в дальнейшем называть круги, границы которых есть окружности семейства G_m), обладает эквивалентным

свойством удовлетворять при каждом фиксированном $r = |z|$, $0 < r < 1$, неравенству

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2mr}{1-r^2}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant 2. \tag{5}$$

В самом деле, пусть $\mathfrak{M}_1^{(m)}$—класс регулярных в круге $|z|<1$ однолистных функций, удовлетворяющих неравенству (5). Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. $\mathfrak{M}^{(m)} = \mathfrak{M}_1^{(m)}$, *где* $1 \leqslant m \leqslant 2$.

Доказательство. Пусть $f(z) \in \mathfrak{M}_1^{(m)}$; докажем, что $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, т. е. $\mathfrak{M}_1^{(m)} \subset \mathfrak{M}^{(m)}$. Нам нужно показать, что все G_m-круги обладают устойчивой выпуклостью по отношению к функциям класса $\mathfrak{M}_1^{(m)}$, причем любой круг с центром, находящимся на расстоянии ϱ_0 от $z = 0$, радиус которого больше $h = m - \sqrt{m^2 - 1 + \varrho_0^2}$, уже не обладает свойством устойчивой выпуклости по отношению к классу $\mathfrak{M}_1^{(m)}$.

Сначала мы найдем условие, которому должна удовлетворять граница C области D, для того чтобы эта область была устойчиво выпуклой относительно функций класса $\mathfrak{M}_1^{(m)}$. Пусть K_z — кривизна кривой C, а K_w — кривизна ее образа при отображении функциями класса $\mathfrak{M}_1^{(m)}$. Известно [2], что K_w и K_z связаны соотношением

$$K_w = \frac{1}{f'(z)}\left| K_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right|, \text{ где } \vec{\tau} = \frac{z'}{|z'|}.$$

Область D будет устойчиво выпуклой тогда и только тогда, когда $K_w \geqslant 0$, т. е. если

$$K_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0. \tag{6}$$

Из условия (5) получаем:

$$\left|\frac{z\cdot f''(z)}{f'(z)} - \frac{2z\cdot\bar{z}}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2m\cdot|z|}{1-r^2},$$

отсюда

$$\left|\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2\vec{\tau}\cdot\bar{z}}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2m|\vec{\tau}|}{1-r^2} = \frac{2m}{1-r^2}.$$

Из этого неравенства следует:

$$\operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant \frac{-2m + 2\operatorname{Im}(\vec{\tau}\bar{z})}{1-r^2}.$$

Подставляя соотношение (6), получаем:

$$K_z + \frac{-2m + 2\operatorname{Im}(\vec{\tau}\bar{z})}{1-r^2} \geqslant 0,$$

откуда

$$K_z \geqslant \frac{2}{1-r^2}[m - \operatorname{Im}(\vec{\tau}\bar{z})]. \tag{7}$$

Итак, образ области D будет выпуклым, если в каждой точке границы D кривизна удовлетворяет соотношению (7). Этот результат в несколько другой форме был получен в [3] для класса регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций.

Пусть область D есть круг $|z - z_0| = h$ с центром в точке z_0, $|z_0| = \varrho_0 < 1$. Этот круг перейдет в выпуклую область при отображении функцией $f(z) \in \mathfrak{M}_1^{(m)}$, если выполняется соотношение

$$\frac{1}{h} \geqslant \frac{2}{1-r^2}\,[m - \operatorname{Im}(\vec{\tau}\bar{z})]. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Im}(\vec{\tau}\bar{z}) = x\tau_y - y\tau_x$, где τ_x и τ_y — проекции вектора $\vec{\tau}$ на оси. Пусть $z = re^{i\psi}$, $z_0 = \varrho_0 e^{i\alpha}$, а уравнение круга D имеет вид $z = z_0 + he^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Тогда $x = \varrho_0 \cos\alpha + h\cos\varphi$; $y = \varrho_0 \sin\alpha + h\sin\varphi$;

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\varrho_0^2 + h^2 + 2\varrho_0 h\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Так как $\vec{\tau} = \dfrac{z'}{|z'|} = -\sin\varphi + i\cos\varphi$, то $\tau_x = -\sin\varphi$, а $\tau_y = \cos\varphi$. Подставляя выражения для x, y, τ_x, τ_y и r в (8), получим неравенство:

$$\frac{1}{h} \geqslant \frac{2\,[m - \varrho_0\cos(\varphi - \alpha) - h]}{1 - \varrho_0^2 - h^2 - 2\varrho_0 h\cos(\varphi - \alpha)},$$

откуда следует

$$h^2 - 2hm + 1 - \varrho_0^2 \geqslant 0,$$

или

$$(m-h)^2 \geqslant \varrho_0^2 + m^2 - 1, \qquad h \leqslant m - \sqrt{\varrho_0^2 + m^2 - 1},$$

т. е. круг D принадлежит G_m, а, следовательно, $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$. Итак, $\mathfrak{M}_1^{(m)} \subset \mathfrak{M}^{(m)}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{M}^{(m)} \subset \mathfrak{M}_1^{(m)}$. Пусть $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$. Возьмем любую точку z_0, $|z_0| = r < 1$, и проведем через нее произвольный орт $\vec{\tau}$.

Существует только одна окружность с неевклидовым радиусом $\varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}$, которая касается орта $\vec{\tau}$ «в заданном направлении». Если $h(z_0; \vec{\tau})$ есть радиус этой окружности, то применение формулы для кривизны образа гладкой кривой дает:

$$K_w = \frac{1}{|f'(z_0)|}\left[\frac{1}{h(z_0; \vec{\tau})} + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)\right].$$

Следовательно, так как $f(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, то

$$\frac{1}{h(z_0; \vec{\tau})} + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right) \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$K_z = \frac{1}{h(z_0; \vec{\tau})} \geqslant \frac{2}{1-r^2}\,[m - \operatorname{Im}(\vec{\tau}\cdot\bar{z}_0)].$$

Поэтому должно быть

$$\frac{2}{1-r^2}\,[m - \operatorname{Im}(\vec{\tau}\cdot\bar{z}_0)] + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\right) \geqslant 0$$

или

$$\frac{2m}{1-r^2} + \operatorname{Im}\left[\left(\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\bar{z}_0}{1-r^2}\right)\cdot\vec{\tau}\right] \geqslant 0.$$

В силу произвольности орта $\vec{\tau}$, получаем:

$$\frac{2m}{1-r^2} - \left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\bar{z}_0}{1-r^2}\right| \geqslant 0,$$

т. е.

$$\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\bar{z}_0}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2m}{1-r^2}.$$

Или

$$\left|\frac{z_0 \cdot f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2z_0\bar{z}_0}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2mr}{1-r^2}.$$

Но так как z_0 — произвольная точка внутри круга $|z| < 1$, то $f(z) \in \mathfrak{M}_1^{(m)}$. Итак, $\mathfrak{M}^{(m)} \subset \mathfrak{M}_1^{(m)}$. Следовательно, $\mathfrak{M}^{(m)} = \mathfrak{M}_1^{(m)}$. Теорема доказана.

5. Рассмотрим теперь некоторые свойства функций класса $\mathfrak{M}^{(m)}$. Прежде всего найдем ту функцию $f_0(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, которая при любом $|z| = r \in \in (0; 1)$ реализует в (5) знак равенства. Нетрудно проверить, что все такие функции определяются уравнением

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{2z^2}{1-z^2} + \frac{2mz}{1-z^2},$$

откуда, полагая $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) = 1$, получаем

$$f_0(z) = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^m - 1\right].$$

Имеет место теорема.

Т е о р е м а 2. *Если* $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots \in \mathfrak{M}^{(m)}$, *то* $|a_2| \leqslant m$, *причем оценка точная и реализуется функцией* $f_0(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как класс $\mathfrak{M}^{(m)}$ — «линейно-инвариантный», то вместе с $f(z)$ и

$$F(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)} \in \mathfrak{M}^{(m)}, \qquad |z_0| < 1. \tag{9}$$

И обратно, для каждой функции $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots \in \mathfrak{M}^{(m)}$ и любого ξ_0, $|\xi_0| < 1$, можно указать такую функцию $F(z; \xi_0) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, что

$$f(\xi) = \frac{F\left(\dfrac{\xi+\xi_0}{1+\bar{\xi}_0\xi}; \xi_0\right) - F(\xi_0; \xi_0)}{F'_\xi(\xi_0; \xi_0)(1-|\xi_0|^2)}.$$

В самом деле, из (9) следует

$$F(-z_0) = \frac{-f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)} \text{ и } F'(-z_0) = \frac{1}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)^2}.$$

Отсюда

$$f(\xi) = \frac{F\left(\dfrac{\xi - z_0}{1-\bar{z}_0\xi}\right) - F(-z_0)}{F'(-z_0)(1-|z_0|^2)}.$$

Обозначая $-z_0 = \xi_0$, получаем

$$f(\xi) = \frac{F\left(\dfrac{\xi+\xi_0}{1+\bar{\xi}_0\xi}\right) - F(\xi_0)}{F'(\xi_0)(1-|\xi_0|^2)}. \tag{10}$$

Итак, из (9) следует (10). Поэтому

$$2a_2 = f''(0) = \frac{F''_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)}{F'_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)}(1 - |\xi_0|^2) - 2\bar{\xi}_0.$$

Отсюда

$$\frac{\xi_0 F''_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)}{F'_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)} - \frac{2|\xi_0|^2}{1-|\xi_0|^2} = 2a_2\frac{\xi_0}{1-|\xi_0|^2}$$

или

$$\left|\frac{\xi_0 F''_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)}{F'_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)} - \frac{2|\xi_0|^2}{1-|\xi_0|^2}\right| = \frac{2|a_2|\cdot|\xi_0|}{1-|\xi_0|^2}.$$

Поскольку $F(\xi;\ \xi_0) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, то

$$\left|\frac{\xi_0 F''_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)}{F'_{\xi}(\xi_0;\ \xi_0)} - \frac{2|\xi_0|^2}{1-|\xi_0|^2}\right| \leqslant \frac{2m|\xi_0|}{1-|\xi_0|^2}.$$

Поэтому $|a_2| \leqslant m$. Теорема доказана.

6. Теорема 3 (об аппроксимации). *Пусть D_z $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклая область в круге $|z| < 1$ с произвольной границей C_z. Тогда эта область обладает следующим свойством: можно указать в D_z сколь угодно близкую к ней $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклую область D_δ с регулярной (даже аналитической) границей L_z.*

Докажем это утверждение. Пусть D_w — образ области D_z при отображении функцией $w = F(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, а C_w — граница D_w. Возьмем круг $|\xi| < 1$. Область D_z можно отобразить на круг $|\xi| < 1$ посредством однолистной аналитической функции $z = \varphi(\xi)$. Тогда функция $w = F[\varphi(\xi)]$ преобразует круг $|\xi| < 1$ в выпуклую область D_w. Возьмем окружность $|\xi| = r$, $1 - \delta < r < 1$, концентрическую $|\xi| = 1$. Она, в силу выпуклости отображений $z = \varphi(\xi)$ и $w = F[\varphi(\xi)]$, отображается на выпуклые аналитические кривые L_z и L_w в D_z и D_w соответственно, сколь угодно близкие к C_z и C_w. Следовательно, выпуклая область D_δ с границей L_z отображается функцией $w = F(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$ на выпуклую область D_δ^* с границей L_w, т. е D_δ является $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклой.

Таким образом, дело сводится к рассмотрению $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклых областей D_δ с дважды непрерывно дифференцируемой границей и дальнейшему их обобщению на области D с произвольной границей путем предельного перехода при $\delta \to 0$.

7. Пусть C — регулярная граница области D и K_z — кривизна C в произвольной точке M. $\widetilde{K}_z$ — кривизна окружности Γ семейства G_m, проходящей через ту же точку в том же направлении. Эту окружность Γ впредь будем называть соприкасательной окружностью. K_w — кривизна образа кривой C в соответствующей точке и $\widetilde{K}_w$—кривизна образа окружности Γ. Имеет место следующий K — критерий $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчивой выпуклости области D.

Теорема 4. *Для $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчивой выпуклости области D в круге $|z| < 1$ необходимо и достаточно, чтобы в любой точке кривой C выполнялось неравенство*

$$K_z \geqslant \widetilde{K}_z. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть образ области D является выпуклым, т. е. $K_w \geqslant 0$. Докажем, что из этого следует неравенство $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$. Предположим противное, т. е. что $K_z < \widetilde{K}_z$. Рассмотрим семейство окружностей кривизны кривой C. Пусть Γ — та окружность из этого семейства, которая касается C в заданной точке M. Тогда кривизна образа этой окружности и кривизна образа кривой C в точке M_1, являющейся образом точки M, одинаковы. Так как окружность Γ не принадлежит G_m, можно подобрать такую функцию $f_\Gamma(z) \in \mathfrak{M}^{(m)}$, чтобы

$$K_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) < 0.$$

Но тогда будет в точке M_1 $K_w < 0$, т. е. образ D при отображении $w = f_\Gamma(z)$ является невыпуклым. Итак, предположение, что $K_z < \widetilde{K}_z$, неверно и необходимость условия $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$ доказана.

Пусть выполняется неравенство $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$. Рассмотрим подсемейство G_C кругов из G_m, для которого C является огибающей. В какой-нибудь точке кривой C:

$$\widetilde{K}_w = \frac{1}{|f'(z)|}\left|\widetilde{K}_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right],$$

где $\widetilde{K}_w$ — кривизна образа круга из G_C, касающегося C в этой точке. Для образа самой кривой C в этой же точке:

$$K_w = \frac{1}{|f'(z)|}\left|K_z + \operatorname{Im}\left(\vec{\tau}\cdot\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right|.$$

Но $\widetilde{K}_w \geqslant 0$ и $K_z \geqslant \widetilde{K}_z$. Поэтому, вычитая из второго равенства первое, получим:

$$K_w - \widetilde{K}_w = \frac{1}{|f'(z)|}(K_z - \widetilde{K}_z) \geqslant 0.$$

Отсюда $K_w - \widetilde{K}_w \geqslant 0$, $K_w \geqslant \widetilde{K}_w \geqslant 0$, т. е. $K_w \geqslant 0$.
Образ кривой C, а значит, и области D выпуклый, т. е. область D $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла. Теорема доказана.

Если предположить, что граница C является дважды непрерывно дифференцируемой, то (11) можно записать в виде

$$\frac{2\varrho(\varphi)}{\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}}\,[r(\psi)\cos(\psi-\varphi)+r'(\psi)\sin(\psi-\varphi)] + [(1-\varrho^2(\varphi)]\,K_z \geqslant 2m,$$

где $z = \varrho(\varphi)e^{i\varphi} = \omega + r(\psi)e^{i\psi}$, $\omega \in D$, уравнение кривой C, откуда при $m = 2$ получаем критерий Александрова [3] для класса регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций.

8. Лемма 1. *Пусть две выпуклые дуги расположены по одну и ту же сторону стягивающей их общей хорды. Пусть внешняя дуга является дугой окружности радиуса R и по длине не превосходит πR, а в каждой точке внутренней дуги существует круг кривизны радиуса $\varrho(\varphi)$, где $\varrho(\varphi)$ — непрерывная функция угла φ наклона касательной к оси абсцисс. Тогда указанное расположение дуг невозможно, если известно, что $\varrho(\varphi) \leqslant R$.*

Доказательство. Пусть для дуги окружности угол φ меняется от $-\alpha$ до α, где $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, а для внутренней дуги от $-\beta$ до γ, где $0 < \beta \leqslant \alpha$, $0 < \gamma \leqslant \alpha$. Обозначая длину хорды через l, а также учитывая, что dx для обеих дуг соответственно равен $R\cos\varphi\, d\varphi$ и $\varrho(\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$, мы видим, что

$$l = \int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\varphi d\varphi = \int_{-\beta}^{\gamma}\varrho(\varphi)\cos\varphi d\varphi.$$

Отсюда ясно, что

$$\int_{-\beta}^{\gamma}\varrho(\varphi)\cos\varphi d\varphi - \int_{-\beta}^{\gamma} R\cos\varphi d\varphi \geqslant 0.$$

Поэтому разность $\varrho(\varphi) - R$ не может сохранять знак минус на интервале $[-\beta, \gamma]$, если только она не равна тождественно нулю, что невозможно, ибо дуги по предположению несовпадающие. Поэтому для такой комбинации двух дуг невозможно выполнение неравенства $\varrho(\varphi) - R \leqslant 0$, и должны быть такие значения φ, для которых $\varrho(\varphi) > R$. Поэтому если известно, что $\varrho(\varphi) \leqslant R$, то указанное в лемме расположение двух дуг невозможно. Лемма доказана.

9. Имеет место такое свойство $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклых областей в круге $|z| < 1$.

Лемма 2. *Если область D $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла, то, положив* $\xi = l(z; \alpha, z_0) \equiv e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, *где* $\alpha \in [0; 2\pi]$, $|z_0| < 1$, *получаем область*

$$D_\xi \equiv l(D; \alpha, z_0)$$

также $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклую.

Доказательство. Действительно, если бы это было не так, то в $\mathfrak{M}^{(m)}$ существовала бы функция $F(\xi)$, преобразующая D_ξ в невыпуклую область B. Полагая

$$f(z) = F\left(e^{i\alpha}\cdot\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}\right),$$

получаем функцию $f(z)$ тоже из $\mathfrak{M}^{(m)}$, преобразующую D в B, что невозможно. Лемма доказана.

10. Теперь мы докажем H — критерий для областей с дважды непрерывно дифференцируемой границей.

Теорема 5. *Для того чтобы область D с дважды непрерывно дифференцируемой границей C в круге $|z| < 1$ была $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала H-свойством, т. е. содержалась в каждом соприкасательном G_m-круге своей границы C.*

Доказательство. Пусть область D $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла. Докажем, что она содержится в каждом соприкасательном G_m-круге своей границы C. Возьмем точку A внутри области D и проведем через нее окружность Q семейства G_m. Как располагается Q по отношению к границе C области D_m? Возможны, в принципе, три случая: 1) Q целиком лежит внутри C; 2) Q пересекает C в двух точках; 3) Q пересекает C более, чем в двух точках. Докажем, что на самом деле возможен только второй случай.

1) Вся окружность Q не может лежать внутри C, так как длина C не превосходит длину Q. В силу $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчивой выпуклости области D радиус кривизны ее границы C в любой точке M не превосходит радиуса соответствующей соприкасательной окружности Γ семейства G_m, т. е.

$$R_C \leqslant R_\Gamma.$$

Пользуясь леммой 2, мы можем центр окружности Q перенести в точку $z = 0$, а тогда Q переходит в окружность семейства G_m с максимальным евклидовым радиусом R_Q, равным неевклидовому радиусу ϱ, т. е.

$$R_Q = \varrho = m - \sqrt{m^2 - 1}.$$

Следовательно,

$$l_C = \int_0^{2\pi} R_C(\varphi)\,d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} R_\Gamma d\varphi = 2\pi R_\Gamma \leqslant 2\pi R_Q.$$

3) Пусть Q пересекает C более, чем в двух точках. Применим лемму 2 и перенесем центр Q в точку $z = 0$. Очевидно, что лишь одна из дуг Q, лежащих вне области D, может быть больше полуокружности, а все остальные меньше. Возьмем любую из этих дуг M_1M_2. Так как $R_C \leqslant R_\Gamma$, а $R_\Gamma \leqslant R_Q$, то $R_C \leqslant R_Q$ во всех точках кривой C, в том числе и во всех точках

дуги M_1M_2. Но тогда в силу леммы 1 дуга M_1M_2 окружности Q не лежит вне D. Итак, окружность Q не может пересекать границу C области D более, чем в двух точках.

2) Следовательно, окружность Q, проходящая через любую точку A внутри области D, разделяет эту область на две части, из которых одна лежит вне, а другая—внутри Q. Заставляя точку A сближаться до совпадения с любой точкой M границы C, мы получим в пределе соприкасательную окружность Γ_M кривой C в точке M; причем ясно, что D содержится в G_m-круге, ограниченном окружностью Γ_M. Таким образом, $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклая область D в круге $|z| < 1$ обладает H-свойством.

Легко доказать, что это свойство и достаточно, а не только необходимо. Действительно, если выполняется H-критерий, то образ области D выпуклый, поскольку этот образ является пересечением системы выпуклых областей, которыми являются образы соприкасательных G_m-кругов области D. Теорема доказана.

11. Теперь мы можем доказать теорему, являющуюся обобщением теоремы Поммеренке [4], о внутреннем критерии $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчивой выпуклости области D с дважды непрерывно дифференцируемой границей C.

Т е о р е м а 6. *Выпуклая область D в круге $|z| < 1$ $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла тогда и только тогда, если через любые две точки M_1 и M_2 этой области можно провести окружность семейства G_m и выпуклая луночка, ограниченная дугами двух таких окружностей с вершинами в точках M_1 и M_2, содержится* в D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть область D $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла. Тогда она обладает H-свойством, т. е. содержится в каждом соприкасательном G_m-круге своей границы C. Но через любую пару различных точек внутри G_m-круга можно провести две и только две окружности семейства G_m, так как расстояние между этими точками меньше $2\,(m - \sqrt{m^2 - 1})$. Поэтому через любые две точки M_1 и M_2 внутри D также можно провести две и только две окружности семейства G_m, причем выпуклая луночка, образованная дугами этих окружностей, принадлежит D. Необходимость доказана.

Пусть теперь область D обладает внутренним свойством, указанным в теореме. Тогда каждая из окружностей семейства G_m, образующих выпуклую луночку, разделяет область D на две части, одна из которых лежит внутри, а другая — вне окружности семейства G_m. Отсюда предельным переходом получаем, что область D обладает H-свойством. Но H-свойство является достаточным, следовательно, и внутреннее свойство, указанное в теореме, также является достаточным, т. е. выпуклая область D, обладающая внутренним свойством, $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла. Теорема доказана полностью.

12. Переходим теперь к общему случаю. Пусть C — граница выпуклой области D, а M — какая-нибудь точка на C. Обозначим через l_M опорную прямую области D в точке M (если их бесконечно много, то любую из них). Через точку M проходят две и только две окружности семейства G_m, которые касаются в этой точке прямой l_M. Пусть Γ_M — та из этих окружностей, которая расположена в той же полуплоскости относительно прямой l_M, что и область D. Будем называть ее соприкасательной окружностью семейства G_M к кривой C в точке M, ассоциированной с прямой l_M.

Т е о р е м а 7. *Чтобы область D в круге $|z| < 1$ была $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы она обладала* H-свойством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть D $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла. Докажем, что она содержится в любом своем соприкасательном G_m-круге. Применив теорему об аппроксимации, мы получим область D_δ с регулярной границей, которая согласно теореме 5 содержится в каждом своем соприкасательном G_m-круге. Пусть Γ — соприкасательная окружность семейства G_m, проходящая через произвольную точку M границы C области D, а Γ_ξ — соответствующая ей соприкасательная окружность в точке M_δ границы C_δ области D_δ. Тогда при $\delta \to 0$ область $D_\delta \to D$, $C_\delta \to C$, точка $M_\delta \to M$ и окружность $\Gamma_\delta \to \Gamma$, следовательно, область D содержится в Γ. Таким образом, $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпуклая область D в круге $|z| < 1$ обладает H-свойством.

Достаточность H-свойства доказывается так же, как в теореме 5.

Теорема 8. *Выпуклая область D с произвольной границей C в круге $|z| < 1$ $\mathfrak{M}^{(m)}$-устойчиво выпукла тогда и только тогда, если через любые две точки M_1 и M_2 этой области можно провести окружность семейства G_m и выпуклая луночка, ограниченная дугами двух таких окружностей с вершинами в точках M_1 и M_2, содержится в D.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6, только используется H-критерий в общем виде, доказанный в теореме 7.

Имеет место и K-критерий в той обобщенной формулировке, в которой он был высказан в предыдущей заметке [5], с заменой семейства орициклов на семейство G_m.

Все вышеприведенные результаты без существенных изменений справедливы для функций класса $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$, регулярных в круге $|z| < 1$ и преобразующих каждый круг с неевклидовым радиусом $\varrho = m - \sqrt{m^2-1}$, содержащийся в круге $|z| < 1$, в однолистную выпуклую область. Класс $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ введен в работе [1]. Однако, там он изучается с других точек зрения.

В заключение выражаю благодарность профессору Зморовичу В. А. за ценные советы и указания при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Pommerenke, Linear — invariante Familien analytischer Funktionen, I, Math. Ann., 12, 1964.
2. В. А. Зморович, Про границі коливання кривизни образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях, ДАН УРСР, 4, 1959.
3. И. А. Александров, Об условиях выпуклости образцов области при отображении ее регулярными однолистными в единичном круге функциями, Изв. высш. уч. завед., Математика, № 6, 1958.
4. Ch. Pommerenke, Jmages of convex domains under convex conformal mappings, Mich. Math. J., 9, № 3, 1962.
5. Н. И. Черней, Критерии устойчивой выпуклости области при однолистных конформных отображениях, УМЖ, т. 18, 1966.
6. И. А. Александров, Геометрические свойства однолистных функций, Труды Томского гос. ун-та им. В. В. Куйбышева, т. 175, серия мех.-мат., 1964, 29—38.
7. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Поступила 28.X 1965 г.
Киев