О периодических движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса

А. Я. Гадионенко

В работах [1, 2, 3] рассматривался вопрос об устойчивости маятника при определенном законе вибрации точки подвеса.

В настоящей статье рассматривается вопрос о периодических движениях маятника при более общем законе движения точки подвеса.

Уравнение движения маятника с вибрирующей точкой подвеса при законе движения точки подвеса по некоторому закону $x(t)$, $y(t)$ описывается уравнением:

$$\ddot{\alpha} + \frac{gl}{l^2 + \varrho^2} \sin \alpha = -\frac{l}{l^2 + \varrho^2} (\ddot{x} \cos \alpha + \ddot{y} \sin \alpha) - \lambda_1 \dot{\alpha}, \tag{1}$$

где α — угол отклонения маятника от вертикального направления в момент времени t; l — приведенная длина маятника; ϱ — радиус инерции маятника относительно его центра инерции; λ_1 — коэффициент затухания; g — ускорение земного притяжения.

Пусть точка подвеса совершает движение по следующему закону:

$$x(t) = a \cos \nu t, \quad y(t) = b \sin(\nu t + \chi), \tag{2}$$

где a, b, χ — постоянные. При $\chi = 0$ точка подвеса движется по окружности ($a = b$), по эллипсу ($a \neq b$), по вертикали ($a = 0,\ b \neq 0$), по горизонтали ($a \neq 0,\ b = 0$); при $\chi = \frac{\pi}{2}$ точка подвеса движется по прямой, составляющей с горизонталью угол $\gamma = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Предположим, что

$$\frac{a}{l} = \varepsilon \ll 1, \ \frac{b}{l} = \varepsilon r \ll 1, \ \lambda_1 = \varepsilon \lambda \ll 1, \frac{\varrho}{l} \ll 1. \tag{3}$$

Учитывая (2, 3), уравнение (1) с точностью до ε запишется в виде:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = \varepsilon \nu^2 \cos \nu t \cos \alpha + \varepsilon r \nu^2 \sin(\nu t + \chi) \sin \alpha - \varepsilon \lambda \dot{\alpha}. \tag{4}$$

Сделаем замену переменной $\tau = \nu t$ и положим

$$k = \frac{\omega_0}{\nu} : \frac{a}{l}, \ q = \frac{\lambda}{2\omega_0} k \ \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \right), \tag{5}$$

тогда уравнение (4) запишется в виде

$$\alpha'' + 2q\varepsilon\alpha' + k^3\varepsilon^2 \sin \alpha - \varepsilon \cos \tau \cos \alpha - \varepsilon r \sin(\tau + \chi) \sin \alpha = 0. \tag{6}$$

Заменой переменных

$$\alpha = \varphi - \varepsilon \cos\tau \cos\varphi - \varepsilon r \sin(\tau + \chi) \sin\varphi,$$
$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \varepsilon\Omega + \varepsilon \sin\tau \cos\varphi - \varepsilon r \sin\varphi \cos(\tau + \chi), \tag{7}$$

рассматриваемое дифференциальное уравнение второго порядка (6) сводим к системе уравнений первого порядка в стандартной форме:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon\Omega + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon \sin\tau (\Omega \sin\varphi - 2q\cos\varphi) - 2q\varepsilon\Omega + \varepsilon \cos(\tau + \chi)(r\Omega\cos\varphi + 2qr\sin\varphi) -$$
$$- \varepsilon k^2 \sin\varphi + \frac{1}{2}\varepsilon\cos^2\tau \sin 2\varphi - \varepsilon \sin^2(\tau + \chi)\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi +$$
$$+ \varepsilon r \cos 2\varphi \cos\tau \sin(\tau + \chi) + \varepsilon^2 \ldots \tag{8}$$

Для решения системы (8) применим принцип усреднения. В результате получим уравнения первого приближения:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon\Omega,$$

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \varepsilon\frac{1}{4}(1 - r^2)\sin 2\varphi - \frac{\varepsilon r}{2}\cos 2\varphi \sin\chi - \varepsilon k^2 \sin\varphi - 2q\varepsilon\Omega. \tag{9}$$

Система (9) эквивалентна одному дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2q\varepsilon\frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2\left[\frac{1}{4}(r^2 - 1)\sin 2\varphi + \frac{r}{2}\cos 2\varphi \sin\chi + k^2\sin\varphi\right] = 0. \tag{10}$$

При $\chi = 0$ из уравнения (10) непосредственно следует, что оно допускает четыре квазистатических решения

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \arccos\frac{2k^2}{1 - r^2}, \quad \varphi_4 = -\arccos\frac{2k^2}{1 - r^2}, \tag{11}$$

при этом решения φ_3 и φ_4 возможны при выполнении условия

$$v^2 \geqslant \frac{2gl}{a^2(1 - r^2)}.$$

При $\chi = \dfrac{\pi}{2}$ система также допускает квазистатические решения, определяемые из уравнения

$$(r^2 - 1)\sin\varphi\cos\varphi + r(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2k^2\sin\varphi = 0. \tag{12}$$

В общем случае нельзя записать значение корней этого уравнения.

Для исследования устойчивости рассмотрим малые отклонения $\delta\varphi = \varphi - \varphi^*$ от исследуемого положения равновесия φ^*, определяемого (11) или (12). Уравнение в вариациях для $\delta\varphi$ примет вид:

$$\frac{d^2\delta\varphi}{d\tau^2} + 2q\varepsilon\frac{d\delta\varphi}{d\tau} + \varepsilon^2\left[\frac{1}{2}(r^2 - 1)\cos 2\varphi^* - r\sin\chi\sin 2\varphi^* + k^2\cos\varphi^*\right]\delta\varphi = 0.$$

Достаточным условием асимптотической устойчивости положения равновесия φ^* является условие

$$\frac{1}{2}(r^2-1)\cos 2\varphi^* - r\sin\chi\sin 2\varphi^* + k^2\cos\varphi^* > 0. \tag{13}$$

Согласно результатам работы [2] положение равновесия усредненной системы порождает периодическое решение точной системы.

Пусть φ^* будет устойчивым положением равновесия уравнения первого приближения (10). Построим периодическое решение системы (6) в окрестности положения $\alpha^* = \varphi^*$ по методу, предложенному в работе [4]. Сделав замену переменной в системе (6)

$$\alpha = \alpha^* + x,$$

где x — новая независимая переменная, получим

$$x'' + 2q\varepsilon x' + [\varepsilon^2 k^2\cos\alpha^* + \varepsilon\sin\alpha^*\cos\tau - \varepsilon r\cos\alpha^*\sin(\tau+\chi)]\sin x +$$
$$+ [\varepsilon^2 k^2\sin\alpha^* - \varepsilon\cos\alpha^*\cos\tau - \varepsilon r\sin\alpha^*\sin(\tau+\chi)]\cos x = 0. \tag{14}$$

Преобразуем систему (14) в систему двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x' &= y,\\ y' &= 2q\varepsilon y - A(\tau)\sin x - B(\tau)\cos x, \end{aligned} \tag{15}$$

где $A(\tau)$, $B(\tau)$ —коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$, соответственно, из системы (14), периодические по τ с периодом $T = 2\pi$.

Будем рассматривать x, y из области $D = \{|x| < x^*,\ |y| < y^*\}$ при $\tau \in [0, \infty)$. Тогда правые части системы (15) ограничены вектором $\overline{M} = \{y^*, 2q\varepsilon y^* + \sqrt{2}\varepsilon(k^2\varepsilon + 1 + r)\}$, удовлетворяют условию Липшица с матрицей

$$\overline{K} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon(\cos\alpha^* + \sin\alpha^*)(k^2\varepsilon + 1 + r) & 2q\varepsilon \end{vmatrix}.$$

При выполнении условий

$$x^* - \pi y^* > 0, \quad y^* > \frac{\sqrt{2}\varepsilon\pi(k^2\varepsilon + 1 + r)}{1 + 2\varepsilon\pi q} \tag{16}$$

множество $D - \frac{\overline{M}T}{2}$ не пусто и при условии

$$|\cos\alpha^* + \sin\alpha^*| < \frac{3(1 - 2q\varepsilon)}{2\pi\varepsilon(k^2\varepsilon + 1 + r)} \tag{17}$$

собственные числа матрицы $\frac{\overline{K}T}{3}$ лежат в круге единичного радиуса.

При выполнении условий (16—17) находим периодическое решение системы (15) как предел последовательных приближений

$$x_m(\tau) = x_0 + \int_0^\tau [y_{m-1}(\tau) - \overline{y_{m-1}(\tau)}]\,d\tau,$$

$$y_m(\tau) = y_0 + \int_0^\tau \{[-2q\varepsilon y_{m-1}(\tau) - A(\tau)\sin x_{m-1}(\tau) - B(\tau)\cos x_{m-1}(\tau)] - \tag{18}$$

$$-[-2q\overline{\varepsilon y_{m-1}(\tau)} - \overline{A(\tau)\sin x_{m-1}(\tau)} - \overline{B(\tau)\cos x_{m-1}(\tau)}]\}\,d\tau \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

$$\overline{f(\tau, x(\tau), y(\tau))} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau, x(\tau), y(\tau))\,d\tau$$

и за нулевое приближение берется $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Тогда периодическое решение системы (4) запишется в виде:

$$\alpha(\tau) = \alpha^* + x(\tau), \tag{19}$$

где $x(\tau) = \lim_{m\to\infty} x_m(\tau)$.

Пример. Пусть $l = 40$; $a = 2$; $r = 0{,}5$; $q = 2$; $\nu = 200$; $\chi = 0$, при этих значениях параметров система (10) имеет устойчивое квазистатическое решение $\varphi^* = 0{,}858$ ($\varphi^* = 49^\circ 09'35''$).

Найдем несколько первых приближений для x и y:

$$\begin{aligned}
x_2 &= 0{,}0327 - 0{,}0378 \sin\tau - 0{,}0327 \cos\tau,\\
y_2 &= 0{,}0124 + 0{,}0365 \sin\tau - 0{,}0124 \cos\tau,\\
x_3 &= 0{,}0365 - 0{,}03126 \sin\tau - 0{,}0365 \cos\tau, \qquad (20)\\
y_3 &= 0{,}0122 + 0{,}0341 \sin\tau - 0{,}0122 \cos\tau + 0{,}00077 \sin\tau\cos\tau - 0{,}00009 \sin^2\tau,\\
x_4 &= 0{,}0359 - 0{,}03183 \sin\tau - 0{,}0359 \cos\tau + 0{,}00031 \sin^2\tau + 0{,}00002 \sin 2\tau -\\
&\quad - 0{,}00004 \cos 2\tau.
\end{aligned}$$

Как видно из (20) разность между последующими приближениями с увеличением m быстро уменьшается:

$$|x_3 - x_2| < 0{,}015, \quad |x_4 - x_3| < 0{,}002.$$

Тогда периодическое решение системы с точностью до 0,002 имеет вид

$$\alpha = 0{,}8949 - 0{,}03183 \sin\tau - 0{,}0359 \cos\tau + 0{,}00031 \sin^2\tau + 0{,}00002 \sin 2\tau - - 0{,}00004 \cos 2\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, Сб. И-та строит. мех. АН УССР, № 14, 1950.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. П. Л. Капица, Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса, ЖЭТФ, т. 21, № 5, 1951.
4. А. М. Самойленко, Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений, УМЖ, т. XVII, № 4, 1965.

Поступила 27.XI 1965 г.
Киев