О группе Гротендика

С. А. Кругляк

Пусть $\mathfrak{S}$ — аддитивная категория модулей. Возьмем символы $[A]$, где $A \in \mathfrak{S}$, за образующие свободной абелевой группы F. H — подгруппа группы F, порожденная словами $[A] - [A'] - [A'']$, где модули A, A', A'' образуют точную последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ в категории $\mathfrak{S}$ [1].

Пусть Λ — кольцо и $\mathfrak{S}$ — категория конечнопорожденных Λ-модулей. В этом случае группу Гротендика категории $\mathfrak{S}$ назовем группой Гротендика кольца Λ и обозначим $G(\Lambda)$; R — дедскиндово кольцо, K — его поле отношений. Λ — конечнопорожденное над R кольцо без R-кручения.

Рассмотрим в категории $\mathfrak{S}$ — категории всех конечнопорожденных Λ-модулей, подкатегорию $\mathfrak{S}'$ — категорию всех конечнопорожденных Λ-модулей без R-кручения. Естественным образом определяется вложение $\varphi: G(\mathfrak{S}') \to G(\Lambda)$ ($[A]\varphi = [A]$). Известно, что отображение является изоморфизмом групп [1]. Следовательно, группа Гротендика определяется двумя способами:

1) за образующие группы Гротендика берутся все элементы категории $\mathfrak{S}$, все соотношения для них получаются из точных в категории $\mathfrak{S}$ последовательностей $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$;

2) за образующие группы Гротендика берутся все элементы категории $\mathfrak{S}'$, все соотношения для них получаются из точных в категории $\mathfrak{S}'$ последовательностей $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$.

Ясно, что за образующие группы Гротендика кольца Λ можно взять: а) все неприводимые в категории $\mathfrak{S}'$ модули; б) совокупность неприводимых в категории $\mathfrak{S}'$ модулей в объединении с совокупностью неприводимых в категории $\mathfrak{S}$ модулей.

В данной заметке для указанных систем образующих находятся достаточно удобные системы определяющих соотношений. Полученные результаты используются в качестве примера для счета группы Гротендика одного конкретного класса колец.

Лемма. *Если в категории $\mathfrak{S}'$ имеют место точные последовательности*

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} B \to 0$$

$$0 \to C \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} D \to 0,$$

где модули A и C неприводимы в $\mathfrak{S}'$ и $A\varphi \neq C\alpha$, то существуют вложения $0 \to A \to D$ и $0 \to C \to B$ такие, что $D/A \approx B/C$.

Эта лемма является в известной мере обращением следующего весьма общего утверждения [2]:

Теорема 1. *Если для 4 модулей A, B, C, D над произвольным кольцом имеется изоморфизм $D/A \approx B/C$, то существует такой модуль V и такие морфизмы, что последовательности*

$$0 \to A \to V \to B \to 0,$$

$$0 \to C \to V \to D \to 0$$

точны.

Доказательство леммы. Так как модули A и C неприводимы в $\mathfrak{S}'$, $A\varphi \neq C\alpha$ и последовательности точны в $\mathfrak{S}'$, то $A\varphi \cap C\alpha = 0$ и, следовательно, гомоморфизмы $\varphi\beta$ и $\alpha\psi$ являются мономорфизмами. Можно построить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\varphi\beta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & D \arrow[r, "\eta"] \arrow[ur] & D/A \arrow[r] & 0 \\
& & V \arrow[ur, "\beta"'] \arrow[dr, "\psi"] & & & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[rr, "\alpha\psi"'] \arrow[ur, "\alpha"] & & B \arrow[r, "\zeta"] \arrow[dr] & B/C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

η и ζ—естественные отображения. Нетрудно проверить, что $\eta^{-1}\beta^{-1}\psi\zeta$ определяет отображение модуля D/A в модуль B/C и является гомоморфизмом. Обратное ему отображение имеет вид $\zeta^{-1}\psi^{-1}\beta\eta$. Следовательно, модули D/A и B/C изоморфны.

а) В качестве системы образующих для $G(\Lambda)$ возьмем совокупность всех неприводимых в $\mathfrak{S}'$ модулей. Если $A,\ B \in \mathfrak{S}'$, через $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ будем обозначать некоторое их расширение; A — подмодуль, B — фактор-модуль. $\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ — модуль, в котором фиксирован композиционный ряд (в категории $\mathfrak{S}'$) с неприводимыми факторами $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$. Модулю $\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix}$ в группе Гротендика отвечает элемент $[A_1] + [A_2] + \ldots + [A_n]$. Очевидно, что в качестве системы соотношений для выбранной нами системы образующих группы Гротендика можно взять совокупность всех соотношений вида

$$[A_1] + [A_2] + \ldots + [A_n] = [B_1] + [B_2] + \ldots + [B_n], \tag{1}$$

которые получаются из изоморфизмов модулей

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B_1 & & & * \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_n \end{pmatrix}.$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Система соотношений* (1) *в группе Гротендика эквивалентна системе соотношений вида*

$$[D] - [A] = [B] - [C], \tag{2}$$

получающихся из изоморфизмов $M \approx D/A \approx B/C$, A, B, C, D — *непроводимые в* $\mathfrak{S}'$ *модули и* M — *неприводимый в* $\mathfrak{S}$ *модуль.*

Если $[D] - [A] = [B] - [C]$ — соотношение вида (2), т. е. $D/A \approx \approx B/C$, то по теореме 1 для некоторых расширений

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} C & * \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

следовательно, наше соотношение получается из соотношения $[A] + [B] = = [D] + [C]$ вида (1).

Пусть

$$[A_1] + [A_2] + \ldots + [A_{n+1}] = [B_1] + [B_2] + \ldots + [B_{n+1}] \tag{3}$$

произвольное соотношение вида (1). Предположим, что все соотношения вида (1) длины $\leqslant n$ являются следствиями соотношений вида (2).

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n+1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B_1 & & & * \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{n+1} \end{pmatrix} \approx V.$$

Если в V $A_1 = B_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} A_2 & & & * \\ & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n+1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B_2 & & & * \\ & B_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{n+1} \end{pmatrix};$$

если A_1 и B_1 в V не совпадают, то тогда выполняются условия леммы и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} A_2 & & & * \\ & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n+1} \end{pmatrix}_{/B_1} \approx \begin{pmatrix} B_2 & & & * \\ & B_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{n+1} \end{pmatrix}_{/A_1}.$$

Если модули изоморфны, то изоморфны их периодические части и фактор-модули по периодическим частям.

В модуле $\begin{pmatrix} A_2 & & & * \\ & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n+1} \end{pmatrix}$ существует неприводимый (в $\mathfrak{S}'$) подмодуль A — максимальный неприводимый в $\mathfrak{S}'$ подмодуль, содержащий B_1 и, аналогично, в $\begin{pmatrix} B_2 & & & * \\ & B_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{n+1} \end{pmatrix}$ подмодуль B такие, что

$$A/B_1 \approx B/A_1 \text{ и } \begin{pmatrix} A_2 & & & * \\ & A_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{n+1} \end{pmatrix}_{/A} \approx \begin{pmatrix} B_2 & & & * \\ & B_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_{n+1} \end{pmatrix}_{/B} \approx N,$$

где N—модуль без кручения.

Пусть $N = \begin{pmatrix} N_1 & & & * \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N_{n-1} \end{pmatrix}$, N_i — неприводимы в $\mathfrak{S}'$.

Наше соотношение (3) является следствием соотношения $[A]-[B_1]=[B]-[A_1]$ вида (2) и соотношений

$$[A_2]+[A_3]+\ldots+[A_{n+1}]=[A]+[N_1]+\ldots+[N_{n-1}],$$
$$[B_2]+[B_3]+\ldots+[B_{n+1}]=[B]+[N_1]+\ldots+[B_{n-1}]$$

вида (1), но длины на единицу меньше, чем исходное соотношение.

Если теперь $D/A\approx B/C\approx M$, где M — приводимый в $\mathfrak{S}$ модуль, то, проведя между D и A, а также между B и C композиционные ряды и пользуясь теоремой Жордана — Гельдера, получим серию изоморфизмов $D_i/D_{i+1}\approx B_i/B_{i+1}\approx M_i$, где D_j, B_j — неприводимые в $\mathfrak{S}'$ модули и M_i — неприводимый в $\mathfrak{S}$ модуль. Ясно, что соотношение $[D]-[A]=[B]-[C]$ является следствием соотношений $[D_i]-[D_{i+1}]=[B_i]-[B_{i+1}]$. Этим заканчивается доказательство предложения 1.

б) Расширим исходную систему образующих, добавив к неприводимым модулям без кручения все периодические неприводимые модули. Соотношение $[D]-[A]=[B]-[C]$, где $D/A\approx B/C\approx M$, D, A, B, C — неприводимые в $\mathfrak{S}'$модули, M — неприводим в $\mathfrak{S}$, является следствием 2 соотношений $[D]-[A]=[M]$ и $[B]-[C]=[M]$.

Предложение 2. *Если в качестве системы образующих взята совокупность всех неприводимых в $\mathfrak{S}$ и совокупность всех неприводимых в $\mathfrak{S}'$ модулей, то в качестве системы соотношений для группы Гротендика достаточно взять все соотношения вида*

$$[A]-[B]=[P],$$

получающиеся из изоморфизмов $A/B\approx P; A$, B — неприводимые в $\mathfrak{S}'$ модули, P — неприводим в $\mathfrak{S}$.

В качестве примера рассмотрим следующий случай. $\widetilde{\Lambda}$ — полная матричная алгебра над полем p-адических чисел, Λ — ее порядок. В этом случае, если A, B — неприводимые Λ — модули из $\mathfrak{S}'$, A всегда можно погрузить в B и $B/A=M$ - периодический модуль. Следовательно, в группе Гротендика $[B]=[A]+\sum\limits_i[P_i]$, где P_i — неприводимые в $\mathfrak{S}$ модули. Т. е. в качестве системы образующих группы $G(\Lambda)$ можно взять один модуль A, неприводимый в $\mathfrak{S}'$, и все неприводимые в $\mathfrak{S}$ модули: $A, P_1, P_2, \ldots, P_n$. Ясно, что не существует соотношений между A и P_i (например, потому, что при естественном отображении $G(\Lambda)\to G(\widetilde{\Lambda})\to 0$ [1], где группа $G(\widetilde{\Lambda})$ в данной ситуации бесконечная циклическая, P_i переходят в 0, а A в образующий элемент циклической группы $G(\widetilde{\Lambda})$). Соотношения для P_i получаются все из соотношений вида $[A_i]-[B_i]=[P_i]$ (предложение 2)

$$\sum_{i=1}^{n} z_i[P_i]=\sum_{i=1}^{n} z_i([A_i]-[B_i])=0.$$

Отсюда ясно, что достаточно рассматривать соотношения вида

$$0=[B]-[B]=\sum_{i^*} z_i[P_i],$$

где B вкладывается в B максимальным нетривиальным образом, между ними проводится композиционный ряд и приравнивается 0 сумма факторов этого композиционного ряда в группе Гротендика. В нашем случае (Λ — полная матричная алгебра) $B\approx B_1$ тогда и только тогда, если $B_1=p^kB$.

Значит достаточно рассматривать соотношения вида

$$0=[B]-[pB]=\sum_i z_i[P_i].$$

Но, используя теорему Жордана — Гельдера, легко получить, что набор неприводимых факторов между A и pA и между B и pB один и тот же для двух различных неприводимых в $\mathfrak{S}'$ модулей A и B.

Таким образом $G(\Lambda)$ — коммутативная группа с $n+1$ образующим $A, P_1, P_2, \ldots, P_n$ и с одним соотношением $\sum_{i=1}^{n} z_i [P_i] = 0$. Отсюда легко заключить, что

$$G(\Lambda) = \underbrace{Z \oplus Z \oplus \ldots \oplus Z}_{n \text{ раз}} \oplus H_k,$$

Z — бесконечная циклическая группа и H_k — циклическая группа порядка k, где k—наибольший общий делитель совокупности чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$; n — число неприводимых в $\mathfrak{S}$ модулей кольца Λ.

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю Д. К. Фаддееву, а также А. В. Ройтеру за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Г. Суон, Индуцированные представления и проективные модули, Математика, 8 : 1, 1964.
2. Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, О неприводимых представлениях p-групп над $Z_p(\varepsilon)$, УМЖ. №1, 1966 г.